

Harjoitus 4

deadline: 20.4.2026, klo 12:00

Ex 4.1: Etsi injektio $S: \ell^p \rightarrow \ell^p$, $1 \leq p < \infty$, jonka kuva-avaruus ei ole suljettu avaruudessa ℓ^p .

Ex 4.2: Olkoot E ja F Banach-avaruuksia, sekä $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Osoita, että tällöin joko T on surjektio, tai kuvajoukko $T(E)$ on ensimmäisen kategorian joukko avaruudessa F .

Ex 4.3: Olkoot $1 \leq p < q \leq \infty$. Osoita, että ℓ^p on ensimmäisen kategorian joukko avaruudessa ℓ^q .

Ex 4.4: Osoita, että jokaisella Hilbert-avaruudella E on olemassa (mahdollisesti yli-numeroituva) Hilbertin kanta, eli joukko $(e_j)_{j \in J}$ siten, että $e_j \perp e_k$ jos $j \neq k$, $\|e_j\| = 1$ kaikilla $j \in J$ ja

$$\overline{\text{span}}(\{e_j : j \in J\}) = E.$$

Ex 4.5: Osoita, että jokaisella vektoriavaruudella E on olemassa Hamelin kanta, eli lineaarisesti riippumaton joukko $K \subset E$ siten, että $\text{span}(K) = E$.

Ex 4.6: Osoita, ettei ääretönulotteisen Banach-avaruuden E Hamelin kanta voi olla numeroituva.