Siis $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})$ ja $||(\widehat{f}(n))||_\infty \leq \frac{1}{2\pi}||f||_1$. Toisaalta Fejérin Lauseen 2.8 nojalla trigonometriset polynomit ovat tiheässä avaruudessa $L^1([0,2\pi])$. Jos $\epsilon > 0$ on annettu, löydetään siis trigonometrinen polynomi

$$P(x) = \sum_{k=-m}^{m} a_k e^{ikx},$$

jolle on $||f-P||_1 < \epsilon$. Edellä $\widehat{P}(n) = a_n$ kaikilla $|n| \leq m$ ja $\widehat{P}(n) = 0$ aina, kun $|n| > m$. Siten kaikilla $|n| > m$

$$|\widehat{f}(n)| = |\widehat{f}(n) - \widehat{P}(n)| = |\widehat{f-P}(n)| \leq \frac{1}{2\pi}||f-P||_1 < \epsilon,$$

joten $|\widehat{f}(n)| \to 0$, kun $|n| \to \infty$, eli $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$. □

Siten $X = c_0(\mathbb{Z})$ kelpaa erääksi vastaukseksi 1. kysymykseen. Osoitetaan seuraavaksi avoimen kuvauksen lauseen avulla, että $c_0(\mathbb{Z})$ ei kelpaa 2. kysymykseen Fourier-kertoimien lähtöavaruudeksi.

Lause 3.12. *Kuvaus* $T\colon L^1([0,2\pi]) \to c_0(\mathbb{Z})\colon f \mapsto (\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ *on jatkuva lineaarinen injektio. Kuva-avaruus* $T(L^1)$ *on tiheä avaruudessa* $c_0(\mathbb{Z})$*, mutta* T *ei ole surjektio.*

Todistus. Selvästi T on lineaarinen, koska $f \mapsto \widehat{f}(k)$ on lineaarinen kaikilla k. Edellisen lauseen todistus näyttää, että T on jatkuva kuvaus $T\colon L^1([0,2\pi]) \to c_0(\mathbb{Z})$ ja $||T|| \leq \frac{1}{2\pi}$.

Näytetään seuraavaksi, että T on injektio. On osoitettava, että jos $Tf = \bar{0}$, eli $\widehat{f}(n) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, niin itse asiassa $f = \bar{0}$. Oletetaa siis, että $Tf = \bar{0}$. Tällöin

$$\int_{[0,2\pi]} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-m}^{m} a_k \int_{[0,2\pi]} f(t)e^{ikt}\,\mathrm{d}t = 2\pi \sum_{k=-m}^{m} a_k\widehat{f}(-k) = 0, \tag{3.1}$$

kaikilla trigonometrisillä polynomeilla $g = \sum_{k=-m}^{m} a_k e^{ikt}$. Fejérin lauseen 2.8 ja Lebesguen dominoidun konvergenssin avulla (3.1) pätee myös kaikilla $g \in C([0,2\pi])$.

Jos $A \subset [0,2\pi]$ on mitallinen joukko, niin löytyy (katso Hilbert-avaruuksien kurssin Lauseen 4.6 todistus) sellainen jono $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,2\pi])$, että

$$|g_n(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [0,2\pi], n \in \mathbb{N} \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} g_n(t) = \chi_A(t) \quad \text{m.k. } t \in [0,2\pi].$$

Soveltamalla taas Lebesguen dominoidun konvergenssin lausetta, saamme että (3.1) pätee myös kaikille $g = \chi_A$, eli

$$\int_A f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[0,2\pi]} f(t)\chi_A(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,2\pi]} f(t)g_n(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Olkoon seuraavaksi $f \in L^1([0,2\pi])$ ei-negatiivinen funktio ja

$$A_n = \left\{ t \in [0,2\pi] \ : \ f(t) > \frac{1}{n} \right\}, \qquad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Joukot A_n ovat mitallisia, koska f on mitallinen funktio. Siten käyttämällä kaavaa (3.1) funktioon $g = \chi_{A_n}$ havaitaan, että

$$0 = \int_{[0,2\pi]} f(t)\chi_{A_n}(t)\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{n}m(A_n),$$

eli $m(A_n) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siten mitan subadditiivisuuden nojalla $m(A) = 0$, missä

$$A = \bigcup_{n\ \in \mathbb{N}} A_n = \{t \in [0, 2\pi] \ : \ f(t) > 0\}.$$

Siispä $f(t) = 0$ melkein kaikilla $t \in [0, 2\pi]$.

Kirjoittamalla mielivaltaisen $f \in L^1([0, 2\pi])$ reaali- ja imaginaariosien negatiivisten ja positiivisten osien summana, nähdään edellisen kohdan nojalla, että $f(t) = 0$ melkein kaikilla $t \in [0, 2\pi]$. Siispä T on injektio.

Osoitetaan seuraavaksi, että kuva $T(L^1([0, 2\pi]))$ on tiheä avaruudessa $c_0(\mathbb{Z})$. Olkoon $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c_{00}(\mathbb{Z}) \subset c_0(\mathbb{Z})$, eli on olemassa $m \in \mathbb{N}$ siten, että $a_k = 0$ kaikilla $|k| > m$. Tällöin trigonometrinen polynomi

$$P(t) = \sum_{k=-m}^{m} a_k e^{ikt}$$

on L^1-funktio, ja aikaisempien laskujen perusteella

$$\widehat{P}(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^{m} a_k \int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-int} \,\mathrm{d}t = \begin{cases} a_n, & \text{jos } |n| \leq m \\ 0, & \text{jos } |n| > m. \end{cases}$$

Siis $T(P) = (\widehat{P}(k))_{k\in\mathbb{Z}} = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, joten $c_{00}(\mathbb{Z}) \subset T(L^1([0, 2\pi]))$. selvästi $c_{00}(\mathbb{Z})$ on tiheä avaruudessa $c_0(Z)$, joten $T(L^1([0, 2\pi]))$ on tiheä avaruudessa $c_0(\mathbb{Z})$.

Osoitetaan lopuksi avoimen kuvauksen lauseen avulla, että $T(L^1([0, 2\pi])) \neq c_0(\mathbb{Z})$, eli että T ei ole surjektio. Jos näin olisi, olisi $T \colon L^1([0, 2\pi]) \to c_0(\mathbb{Z})$ bijektio. Tällöin avoimen kuvauksen lauseen Seurauksen 3.7 nojalla T olisi isomorfismi, joten erityisesti olisi olemassa vakio $\beta > 0$ siten, että

$$||Tf||_\infty \geq \beta ||f||_1 \tag{3.2}$$

jokaisella $f \in L^1([0, 2\pi])$. Toisaalta Dirichlet'n ydin $D_n \in L^1([0, 2\pi])$ ja $||(\widehat{D}_n(k))||_\infty = 1$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$ ja Lauseen 2.9 todistuksessa huomasimme, että $||D_n||_1 \to \infty$. Tämä on ristiriidassa arvion (3.2) kanssa. Siispä T ei voi olla surjektio. □

Käydään vielä läpi yksi avoimen kuvauksen lauseen seuraus (tai oikeastaan yhtäpitävä muotoilu), joka tunnetaan nimellä *suljetun kuvaajan lause*.

Määritelmä 3.13. Kuvauksen $f \colon X \to Y$ *kuvaaja* eli *graafi* on joukko

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y \ : \ x \in X\} \subset X \times Y.$$

Varustetaan seuraavassa normiavaruuksien E ja F tuloavaruus $E \times F$ normilla

$$||(x, y)|| = ||x||_E + ||x||_F, \qquad \text{kaikilla } (x, y) \in E \times F.$$

Tällöin $E \times F$ on Banach-avaruus jos E ja F ovat Banach-avaruuksia.

Lause 3.14. *Olkoon E ja F normiavaruuksia ja $f \colon E \to F$ jatkuva kuvaus. Tällöin funktion f kuvaaja $G(f)$ on suljettu joukko avaruudessa $E \times F$.*

Todistus. Riittää osoittaa, että $\overline{G(f)} = G(f)$. Olkoon siis $(x, y) \in \overline{G(f)} \subset E \times F$. Tällöin on olemassa jono $(x_n, f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ joukossa $G(f)$ siten, että

$$||(x_n, f(x_n)) - (x, y)||_{F\times F} = ||x_n - x||_E + ||f(x_n) - y||_F \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Siis sekä $||x_n - x||_E \to 0$, että $||f(x_n) - y||_F \to 0$, kun $n \to \infty$. Koska f on jatkuva kuvaus, on $||f(x_n) - f(x)|| \to 0$ kun $n \to \infty$. Koska raja-arvo on yksikäsitteinen, on $y = f(x)$ ja siten $(x, y) = (x, f(x)) \in G(f)$. Siispä $G(f)$ on suljettu avaruudessa $E \times F$. □

Jos $T\colon E \to F$ on lineaarikuvaus, on lineaarisuuden nojalla

$$\alpha(x, Tx) + \beta(y, Ty) = (\alpha x + \beta y, T(\alpha x + \beta y)) \in G(T)$$

kaikilla $s, y \in E$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Siten $G(T)$ on avaruuden $E \times F$ vektorialiavaruus kuvauksen T ollessa lineaarinen.

Lause 3.15 (Suljetun kuvaajan lause)**.** *Olkoot E ja F Banach-avaruuksia ja $T\colon E \to F$ sellainen lineaarikuvaus, että kuvaaja $G(T)$ on avaruuden $E \times F$ suljettu vektorialiavaruus. Tällöin T on jatkuva.*

Todistus. Koska $E \times F$ on Banach-avaruus ja $G(T)$ suljettu vektorialiavaruus, on $G(T)$ myös Banach-avaruus avaruuden $E \times F$ normin rajoittumalla varustettuna. Määritellään kuvaus

$$\psi\colon G(T) \to E\colon (x, Tx) \to x.$$

Koska T on lineaarinen, on myös ψ lineaarinen. Lisäksi ψ on bijektio, sillä ψ on selvästi surjektio ja myös injektio:

$$\bar{0} = \psi((x, Tx)) = x \implies (x, Tx) = (\bar{0}, \bar{0}).$$

Lisäksi ψ on rajoitettu koska

$$||\psi((x, Tx))|| = ||x|| \leq ||x|| + ||Tx|| = ||(x, Tx)||$$

kaikilla $(x, Tx) \in G(T)$.

Näimme siis, että ψ on jatkuva lineaarinen bijektio $G(T) \to E$. Nyt avoimen lauseen kuvauksen Seurauksen 3.7 mukaan käänteiskuvaus ψ^{-1} on myös jatkuva. Siten Seurauksen 1.5 mukaan on olemassa vakio $\beta > 0$ siten, että

$$\beta||(x, Tx)|| \leq ||\psi((x, Tx))|| = ||x||$$

kaikilla $(x, Tx) \in G(T)$. Tästä seuraa, että

$$\beta||Tx|| \leq \beta(||x|| + ||Tx||) = \beta||(x, Tx)|| \leq ||x||$$

kaikilla $x \in E$. Siis

$$||Tx|| \leq \frac{1}{\beta}||x||$$

eli T on jatkuva. □

Esimerkki 3.16. Olkoon $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ siten, että

(1) $M := \sum_{i,j \in \mathbb{N}} |a_{ij}| < \infty$.

(2) Jos $(s_j) \in \ell^1$, niin $(t_i) \in \ell^1$ missä

$$t_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} s_j, \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Ehdon (2) nojalla meillä on nyt lineaarikuvaus

$$A\colon \ell^1 \to \ell^1\colon (s_j) \mapsto \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} s_j\Big)_{i \in \mathbb{N}}.$$

Suljetun kuvaajan lauseen avulla voidaan lineaarikuvaus A osoittaa jatkuvaksi. Olkoon $x^{(n)} \in \ell^1$ siten, että $x^{(n)} \to x$ ja $A(x^{(n)}) \to y$ avaruudessa ℓ^1 kun $n \to \infty$. Merkitään $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$, $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ja $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Tavoitteena on osoittaa, että $Ax = y$. Osoitetaan tämä kullekin $k \in \mathbb{N}$ erikseen. Olkoon siis $k \in \mathbb{N}$ kiinnitetty ja määritellään kuvaus

$$\Lambda\colon \ell^1 \to \mathbb{K}\colon u \mapsto (Au)_k,$$

missä $Au = ((Au)_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Λ on lineaarinen ja ehdosta (1) seuraa, että

$$|\Lambda u| = |\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}u_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}|\,|u_j| \leq M||u||_1$$

kaikilla $u = (u_j) \in \ell^1$. Siten Λ on jatkuva ja

$$y_k = \lim_{n\to\infty}(Ax^{(n)})_k = \lim_{n\to\infty}\Lambda x^{(n)} = \Lambda(\lim_{n\to\infty} x^{(n)}) = \Lambda x = (Ax)_k.$$

Siispä $y = Ax$ ja $G(A)$ on suljettu. Suljetun kuvaajan lauseen nojalla siis A on jatkuva.

4. Hahn-Banachin lauseet

Olkoon E Hilbert-avaruus, $M \subset E$ suljettu vektorialiavaruus, F normiavaruus ja $T \in \mathcal{L}(M, F)$. Tällöin T voidaan jatkaa jatkuvaksi lineaarikuvaukseksi koko avaruuteen E, eli on olemassa $T_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ siten, että $T_1 x = Tx$ kaikilla $x \in M$. Tämä jatko voidaan tehdä vieläpä niin, että $||T_1|| = ||T||$. Tämä jatko saadaan käyttämällä ortoprojektiota $P_M \colon E \to M$ määrittelemällä $T_1 = TP_M$.

Jos lähtöavaruus E oletetaan pelkästään Banach-avaruudeksi, ei jatkamisongelmalla ole aina ratkaisua. Esimerkiksi jos $E = \ell^\infty$, $F = M = c_0 \subset E$ ja $T = I \colon c_0 \to c_0$, ei ole olemassa $T_1 \in \mathcal{L}(l^\infty, c_0)$ jolle pätisi $T_1 x = x$ kaikilla $x \in c_0$.

Hahn-Banachin lauseet liittyvät jatkamisongelmaan, jossa maaliavaruutena on skalaarikunta $\mathbb{K}$. Otetaan ensin reaalikertoiminen versio Hahn-Banachin lauseesta.

Lause 4.1 (Hahn-Banach)**.** *Olkoon E vektoriavaruus kerroinkuntanaan $\mathbb{R}$, $M \subset E$ vektorialiavaruus, p seminormi*[1] *avaruudessa E ja $f \in L(M, \mathbb{R})$ siten, että $|f(u)| \le p(u)$ kaikilla $u \in M$. Tällöin on olemassa $g \in L(E, \mathbb{R})$ siten, että $g(u) = f(u)$ kaikilla $u \in M$ ja $|g(u)| \le p(u)$ kaikilla $u \in E$.*

Hahn-Banachin lauseiden todistuksessa tarvitsemme apuna Zornin lemmaa. Palautetaan mieleen mitä Zornin lemma sanoo.

Lause 4.2 (Zornin lemma)**.** *Olkoon $(H, \prec)$ järjestetty joukko siten, että $H \neq \emptyset$ ja jokaisella H:n ketjulla K on pienin yläraja. Tällöin H:ssa on ainakin yksi maksimaalinen alkio.*

Zornin lemman ymmärtämiseksi tulee tietysti muistaa mitä tarkoitetaan (osittaisella) järjestyksellä, ketjulla, ylärajalla ja maksimaalisella alkiolla.

Määritelmä 4.3. Joukon H relaatio $\prec$ on *(osittainen) järjestys*, jos kaikilla $a, b, c \in H$ on

(1) $a \prec a$
(2) $a \prec b \prec a \Rightarrow a = b$
(3) $a \prec b \prec c \Rightarrow a \prec c$.

Paria $(H, \prec)$ sanotaan *(osittain) järjestetyksi joukoksi*, jos $\prec$ on osittainen järjestys H:ssa.

Järjestys $\prec$ on *täysi* jos kaikille $a, b \in H$ on $a \prec b$ tai $b \prec a$. Osajoukko $K \subset H$ on *ketju*, jos järjestys $\prec$ rajoitettuna joukkoon K on täysi. Alkio $b \in H$ on joukon $A \subset H$ *yläraja*, jos $a \prec b$ kaikilla $a \in A$. Alkio $c \in H$ on joukon $A \subset H$ *pienin yläraja*, jos ei ole olemassa joukon A ylärajaa $b \in H \setminus \{c\}$ siten, että $b \prec c$. Alkio $b \in H$ on *maksimaalinen* jos ei ole olemassa alkiota $a \in H \setminus \{b\}$ siten, että $b \prec a$.

Aloitetaan Lauseen 4.1 todistus seuraavalla aputuloksella, joka on eräänlainen induktioaskel Lauseen 4.1 todistuksessa.

Lemma 4.4. *Olkoon E vektoriavaruus, jonka skalaarikuntana on $\mathbb{R}$. Olkoon $M \subset E$ aito vektorialiavaruus, p seminormi avaruudessa E ja $f \in L(M, \mathbb{R})$ siten, että $|f(u)| \le p(u)$ kaikilla $u \in M$. Jos $z \in E \setminus M$ ja $M_1 = M \oplus span(z)$, niin tällöin on olemassa $f_1 \in L(M_1, \mathbb{R})$ siten, että $f_1(u) = f(u)$ kaikilla $u \in M$ ja $|f_1(u)| \le p(u)$ kaikilla $u \in M_1$.*

Todistus. Jos $x, y \in M$ ovat mielivaltaisia, niin

$$f(x) - f(y) = f(x - y) \le p(x - y) \le p(x + z) + p(-y - z) = p(x + z) + p(y + z),$$

[1] Muista, että p on seminormi jos se toteuttaa muut normin ehdot paitsi mahdollisesti ei ehtoa (N3): $p(x) = 0$ jos ja vain jos $x = \bar{0}$.

koska p on seminormi avaruudessa E. Näin siis

$$-p(y+z) - f(y) \le p(x+z) - f(x)$$

kaikilla $x, y \in M$. Koska edellisen arvion oikea puoli ei riipu vektorista $y \in M$, niin

$$\sup_{y \in M}(-p(y+z) - f(y)) \le p(x+z) - f(x)$$

ja edelleen, koska tämän arvion vasen puoli ei riipu vektorista $x \in M$, niin

$$\sup_{y \in M}(-p(y+z) - f(y)) \le \inf_{x \in M}(p(x+z) - f(x)).$$

Siten on olemassa vakio $c \in \mathbb{R}$ siten, että

$$-p(y+z) - f(y) \le c \le p(x+z) - f(x) \tag{4.1}$$

kaikilla $x, y \in M$.

Jos $w \in M_1$, voidaan se kirjoittaa muodossa $w = u + \lambda z$, missä $u \in M$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ ovat yksikäsitteiset. Määritellään

$$f_1 \colon M_1 \to \mathbb{R} \colon w \mapsto f(u) + \lambda c.$$

Tällöin $f_1 \in (M_1)^\dagger$ ja $f_1(u) = f(u)$ kaikilla $u \in M$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $|f_1(w)| \le p(w)$ kaikilla $w \in M_1$. Jos $\lambda = 0$, on väite selvästi totta. Voidaan siis olettaa, että $\lambda \neq 0$. Valitsemalla $x = y = \lambda^{-1}u \in M$ epäyhtälöissä (4.1), saadaan

$$-p(\lambda^{-1}u + z) - f(\lambda^{-1}u) \le c \le p(\lambda^{-1}u + z) - f(\lambda^{-1}u)$$

eli

$$-\frac{1}{|\lambda|}p(u+\lambda z) - \frac{1}{\lambda}f(u) \le c \le \frac{1}{|\lambda|}p(u+\lambda z) - \frac{1}{\lambda}f(u).$$

Tämä epäyhtälöketju voidaan kirjoittaa muodossa

$$-\frac{1}{|\lambda|}p(w) \le c + \frac{1}{\lambda}f(u) \le \frac{1}{|\lambda|}p(w).$$

Koska

$$c + \frac{1}{\lambda}f(u) = \frac{1}{\lambda}(f(u) + \lambda c) = \frac{1}{\lambda}f_1(w),$$

voidaan epäyhtälöketju edelleen kirjoittaa muodossa

$$-\frac{1}{|\lambda|}p(w) \le \frac{1}{\lambda}f_1(w) \le \frac{1}{|\lambda|}p(w),$$

joka antaa halutun arvion $|f_1(w)| \le p(w)$. □

Lemman 4.4 avulla voimme nyt todistaa Hahn-Banachin Lauseen 4.1.

Lauseen 4.1 todistus. Todistuksen ideana on käyttää Lemmaa 4.4 ja Zornin lemmaa. Tätä varten määritellään ensin järjestys joukkoon

$$\mathcal{F} = \bigcup_{N \in U} \mathcal{F}_N,$$

missä

$$U = \{N \subset E \ : \ N \text{ on vektorialiavaruus ja } M \subset N\}$$

ja

$$\mathcal{F}_N = \{h \in L(N, \mathbb{R}) \ : \ f(x) = h(x) \text{ kaikilla } x \in M \text{ ja } |h(x)| \le p(x) \text{ kaikilla } x \in N\},$$