Fejérin lause sovellettuna funktioon D_n antaa $T_n(K_j) = D_n * K_j = K_j * D_n \to D_n$ tasaisesti välillä $[0, 2\pi]$ kun $j \to \infty$. Lisäksi Lemman 2.7 perusteella $K_j \geq 0$ ja $||K_j||_1 = 2\pi$. Siten edellisen lauseen todistuksessa saadun arvion perusteella

$$2\pi ||T_n|| \geq \sup_j ||T_n(K_j)||_1 \geq \lim_{j\to\infty} ||T_n(K_j)||_1 = ||D_n||_1 \to \infty, \quad \text{kun } n \to \infty.$$

□

Lisätietoja Fourier-sarjojen suppenemisesta:

- Jos $1 < p < \infty$ ja $f \in L^p([0, 2\pi])$, niin
$$||f - s_n(f; \cdot)||_p \to 0, \qquad \text{kun } n \to \infty.$$
- Jos $1 < p < \infty$ ja $j \in L^p([0, 2\pi])$, niin
$$s_n(f; x) \to f(x), \qquad \text{melkein kaikilla } x \in [0, 2\pi] \text{ kun } n \to \infty.$$
(Carleson-Hunt: Carleson 1966 tapauksessa $p = 2$ ja Hunt 1968 muille p)
- On olemassa sellainen $f \in L^1([0, 2\pi])$, jonka Fourier-sarja hajaantuu jokaisessa pisteessä $x \in [0, 2\pi]$. (Kolmogorov 1926)

3. Avoimen kuvauksen lause

Palautetaan ensin mieleen, mitä tarkoitetaan avoimella kuvauksella.

Määritelmä 3.1. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia. Kuvaus $f\colon X \to Y$ on *avoin*, jos $f(U)$ on avoin Y:ssä aina kun U on avoin X:ssä.

Kurssilla tutkitaan normiavaruuksia, jotka ovat erityisesti metrisiä avaruuksia. Kuvauksen avoimuudelle voidaan antaa myös seuraava lokaali määritelmä.

Määritelmä 3.2. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $f\colon X \to Y$ on *avoin pisteessä* $a \in X$ jos jokaiselle $r > 0$ on olemassa $r' > 0$ siten, että

$$B_{\mathsf{d}_Y}(f(a), r') \subset f(B_{\mathsf{d}_X}(a, r)).$$

Avoimuuden lokaali ja globaali määritelmä sopivat yhteen, kuten seuraava lause osoittaa.

Lause 3.3. *Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja $f\colon X \to Y$ kuvaus. Tällöin f on avoin jos ja vain jos se on avoin jokaisessa pisteessä $a \in X$.*

Todistus. Oletetaan, että f on avoin kuvaus. Olkoot lisäksi $a \in X$ ja $r > 0$. Koska $f(a) \in f(B_{\mathsf{d}_X}(a, r))$ ja $f(B_{\mathsf{d}_X}(a, r))$ on oletuksen nojalla avoin, on olemassa $r' > 0$ siten, että

$$B_{\mathsf{d}_Y}(f(a), r') \subset f(B_{\mathsf{d}_X}(a, r)).$$

Oletetaan seuraavaksi, että f on avoin jokaisessa X:n pisteessä. Olkoon $U \subset X$ avoin joukko ja $a \in U$. Tällöin on olemassa $r > 0$ siten, että $B_{\mathsf{d}_X}(a, r) \subset U$. Oletuksen nojalla on olemassa $r' > 0$ siten, että

$$B_{\mathsf{d}_Y}(f(a), r') \subset f(B_{\mathsf{d}_X}(a, r)).$$

Erityisesti siis $f(a)$ on joukon $f(U)$ sisäpiste. Koska tämä oli voimassa kaikille $a \in U$, on $f(U)$ avoin joukko Y:ssä. $\square$

Huomaa, että kuvauksen avoimuus liittyy "käänteiskuvauksen" jatkuvuuteen vaikkakaan käänteiskuvausta ei aina ole olemassa. Erityisesti avoin kuvaus ei aina ole jatkuva eikä jatkuva kuvaus aina avoin.

Osoitetaan, että kuten jatkuvuuskin myös avoimuus lineaarikuvaukselle seuraa jo yhden pisteen avoimuudesta

Lause 3.4. *Olkoot E ja F normiavaruuksia sekä $T\colon E \to F$ lineaarinen. Tällöin T on avoin kuvaus jos ja vain jos T on avoin pisteessä $\bar{0}$.*

Todistus. Kuvauksen avoimuudesta seuraa Lauseen 3.3 perusteella avoimuus pisteessä $\bar{0}$. Osoitetaan siis toinen suunta ja oletetaan, että T on avoin pisteessä $\bar{0}$.

Olkoot $x \in E$ ja $r > 0$. Tällöin löytyy sellainen $r' > 0$, että

$$B(\bar{0}, r') \subset T(B(\bar{0}, r)).$$

Täten kuvauksen T lineaarisuuden nojalla

$$B(Tx, r') = Tx + B(\bar{0}, r') \subset Tx + T(B(\bar{0}, r)) = T(x + B(\bar{0}, r)) = T(B(x, r)).$$

$\square$

Normiavaruuksien välinen avoin kuvaus on aina surjektio. Avoimen kuvauksen lause sanoo, että Banach-avaruuksien välisille jatkuville lineaarikuvauksille käänteinenkin väite on totta.

Lause 3.5 (Avoimen kuvauksen lause)**.** *Jos E ja F ovat Banach-avaruuksia ja $T \in \mathcal{L}(E, F)$ on surjektio, niin tällöin T on avoin kuvaus.*

Avoimen kuvauksen lauseen todistuksessa käytämme seuraavaa aputulosta.

Lemma 3.6. *Olkoot E normiavaruus, F Banach-avaruus ja $T\colon E \to F$ lineaarinen surjektio. Jos V on pisteen $\bar{0} \in E$ ympäristö avaruudessa E, niin sulkeuma $\overline{T(V)}$ on pisteen $\bar{0}$ ympäristö avaruudessa F.*

Todistus. Koska V on pisteen $\bar{0} \in E$ ympäristö, on olemassa sellainen $r > 0$, että $B(\bar{0}, 2r) \subset V$. Tällöin joukolle $B = B(\bar{0}, r)$, on voimassa $B + B \subset V$.

Jos $y \in F$ on mielivaltainen, niin on olemassa $x \in E$ jolle $y = Tx$, koska T on surjektio. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ siten, että $||x|| < nr$. Tällöin

$$y \in T(nB) = nT(B) \subset \overline{nT(B)}.$$

Siten

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{nT(B)}.$$

Koska F on Banach-avaruus, voidaan soveltaa Bairen lauseen Seurausta 2.2. Siten ainakin yksi suljetuista joukoista $\overline{nT(B)} = n\overline{T(B)}$ sisältää avoimen pallon. Jos siis $B(x_0, \rho_0) \subset n\overline{T(B)}$, niin kuvauksen T lineaarisuuden nojalla

$$B(\frac{x_0}{n}, \frac{\rho_0}{n}) = \frac{1}{n} B(x_0, \rho_0) \subset \overline{T(B)},$$

eli myös joukko $\overline{T(B)}$ sisältää avoimen pallon. Merkitään nyt $x = x_0/n$ ja $\rho = \rho_0/n$, jolloin

$$B(x, \rho) \subset \overline{T(B)}.$$

Lisäksi $-x \in \overline{T(B)}$, sillä kaikilla $y \in T(B)$ myös $-y \in T(B)$. Jälleen kuvauksen T lineaarisuuden nojalla

$$B(\bar{0}, \rho) = -x + B(x, \rho) \subset \overline{T(B)} + \overline{T(B)} \subset \overline{T(B) + T(B)} = \overline{T(B + B)} \subset \overline{T(V)}.$$

Siten $\overline{T(V)}$ on pisteen $\bar{0} \in F$ ympäristö avaruudessa F. □

Lemman 3.6 avulla voimme nyt todistaa avoimen kuvauksen lauseen.

Avoimen kuvauksen lauseen todistus. Osoitetaan, että T on avoin pisteessä $\bar{0}$. Olkoon $r > 0$ annettu ja $r_k = 2^{-k-1} r$, kun $k \geq 0$. Tällöin $r_k > 0$ ja

$$r_0 = \sum_{k=1}^{\infty} r_k.$$

Lemman 3.6 nojalla löydämme luvut $s_k \searrow 0$ joille

$$B(\bar{0}, s_k) \subset \overline{T(B(\bar{0}, r_k))}, \qquad \text{kaikilla } k \geq 0.$$

Osoitetaan nyt, että

$$B(\bar{0}, s_0) \subset T(B(\bar{0}, r)).$$

Koska $r > 0$ mielivaltainen, seuraa tästä kuvauksen T avoimuus pisteessä $\bar{0}$ josta edelleen Lauseen 3.3 nojalla että T on avoin kuvaus.

Olkoon nyt $y \in F$ siten, että $||y|| < s_0$. Siispä $y \in \overline{T(B(\bar{0}, r_0))}$. Löytyy siis $x_0 \in B(\bar{0}, r_0)$, jolle

$$||y - Tx_0|| < s_1, \qquad \text{eli} \qquad y - Tx_0 \in B(\bar{0}, s_1) \subset \overline{T(B(\bar{0}, r_1)}.$$

Vastaavasti havaitsemme, että on olemassa sellainen $x_1 \in B(\bar{0}, r_1)$, että

$$||y - Tx_0 - Tx_1|| < s_2, \qquad \text{eli} \qquad y - Tx_0 - Tx_1 \in B(\bar{0}, s_2) \subset \overline{T(B(\bar{0}, r_2)}.$$

Oletetaan nyt että $x_k \in B(\bar{0}, r_k)$ on valittu kaikilla $0 \leq k \leq n-1$ siten, että

$$y - \sum_{k=0}^{n-1} Tx_k \in B(\bar{0}, s_n) \subset \overline{T(B(\bar{0}, r_n))}.$$

Tällöin on olemassa sellainen $x_n \in B(\bar{0}, r_n)$, että

$$||y - \sum_{k=0}^{n} Tx_k|| < s_{n+1}.$$

Näin saadaan jono (x_n) avaruudessa E, jolle $||x_k|| < r_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||x_k|| < \sum_{k=0} r_k = 2r_0 = r < \infty,$$

eli sarja $\sum_k x_k$ on absoluuttisesti suppeneva avaruudessa E. Koska E on täydellinen, sarja $\sum_k x_k$ suppenee avaruudessa E. Merkitään

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k.$$

Tällöin siis

$$||x|| \leq \sum_{k=0}^{\infty} ||x_k|| < r$$

ja konstruktion perusteella

$$||y - T(\sum_{k=0}^{n} x_k)|| = ||y - \sum_{k=0}^{n} Tx_k|| < s_n \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Siten kuvauksen T jatkuvuuden perusteella

$$y = \lim_{n \to \infty} T(\sum_{k=0}^{n} x_k) = T(\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} x_k) = Tx.$$

Siispä olemme osoittaneet, että $B(\bar{0}, s_0) \subset T(B(\bar{0}, r))$, mikä riitti lauseen todistamiseksi. $\square$

Seuraus 3.7. *Jos E ja F ovat Banach-avaruuksia ja $T\colon E \to F$ on jatkuva linaarinen bijektio, niin T on tällöin lineaarinen isomorfismi (eli käänteiskuvaus T^{-1} on jatkuva).*

Todistus. Käänteiskuvauksen $T^{-1}\colon F \to E$ jatkuvuuden osoittamiseksi otetaan avoin joukko $U \subset E$. Tällöin $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ kuvauksen T bijektiivisyyden nojalla. Tämä joukko taas on avoin, sillä avoimen kuvauksen lauseen nojalla $T\colon E \to F$ on avoin kuvaus. $\square$

Esimerkki 3.8. Olkoot $|| \cdot ||_1$ ja $|| \cdot ||_2$ normeja vektoriavaruudessa E siten, että on olemassa $\beta > 0$ jolle $||x||_2 \leq \beta ||x||_1$ kaikilla $x \in E$. Tällöin identtinen kuvaus $I\colon (E, || \cdot ||_1) \to (E, || \cdot ||_2)$ on jatkuva lineaarinen bijektio. Jos lisäksi sekä $(E, || \cdot ||_1)$ ja $(E, || \cdot ||_2)$ ovat Banach-avaruuksia, on identtinen kuvaus I Seurauksen 3.7 nojalla isomorfismi, joten normit $|| \cdot ||_1$ ja $|| \cdot ||_2$ ovat ekvivalentteja. Toisin sanoen on olemassa sellainen $\alpha > 0$, että

$$\alpha ||x||_1 \leq ||x||_2 \leq \beta ||x||_1 \qquad \text{kaikilla } x \in E.$$

Otetaan vielä pari hyödyllistä seurausta avoimen kuvauksen lauseelle.

Seuraus 3.9. *Olkoot E ja F Banach-avaruuksia ja $T \in \mathcal{L}(E, F)$ surjektio. Tällöin on olemassa sellainen $M < \infty$, että jokaista $y \in F$ kohti on olemassa $x \in E$ jolle $Tx = y$ ja $||x|| \leq M||y||$.*

Todistus. Avoimen kuvauksen lauseen nojalla on olemassa sellainen $s > 0$, että

$$\bar{B}(\bar{0}, s) \subset T(B(\bar{0}, 1)).$$

Jos $y \in F$ on mielivaltainen, niin $||s\frac{y}{||y||}|| = s$, joten on olemassa sellainen $z \in B(\bar{0}, 1)$, että $Tz = s\frac{y}{||y||}$. Lineaarisuudesta seuraa, että $T(\frac{||y||}{s}z) = y$, missä $||\frac{||y||}{s}z|| \leq \frac{1}{s}||y||$. Voisaan siis valita $M = \frac{1}{s}$. □

Seuraus 3.10. *Olkoot E ja F Banach-avaruuksia ja $T \in \mathcal{L}(E, F)$ injektio. Tällöin kuva-avaruus $T(E)$ on avaruuden F suljettu aliavaruus jos ja vain jos löytyy sellainen $\beta > 0$, että*

$$||Tx|| \geq \beta||x|| \quad \textit{jokaisella } x \in E.$$

Todistus. Oletetaan, että $T(E)$ on suljettu. Koska $T(E) \subset F$ on Banach-avaruuden suljettu aliavaruus, niin se on myös Banach-avaruus. Nyt siis $T \colon E \to T(E)$ on jatkuva bijektio, joten väite seuraa avoimen kuvauksen lauseen Seurauksesta 3.7.

Todistetaan seuraavaksi toinen suunta. Oletetaan siis, että on olemassa sellainen $\beta > 0$, että $||Tx|| \geq \beta||x||$ kaikilla $x \in E$. Nyt erityisesti kaikilla $x \in E$ on

$$||x|| \leq \frac{||Tx||}{\beta} \leq \frac{||T||}{\beta}||x||.$$

Siten $T \colon E \to T(E)$ on lineaarinen isomorfismi ja Lauseen 1.7 nojalla $T(E)$ on täydellinen ja siten $T(E)$ on suljettu. □

Sovelletaan seuraavaksi avoimen kuvauksen lausetta Fourier-sarjoihin. Besselin epäyhtälön nojalla kaikille $f \in L^2([0, 2\pi])$ on $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 < \infty$ eli $(\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$. Riesz-Fischerin lause taas kertoo, että kaikille $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ on olemassa $f \in L^2([0, 2\pi])$ siten, että

$$\widehat{f}(k) = a_k \qquad \text{kaikilla } k \in \mathbb{Z}.$$

Tutkitaan seuraavaksi onko L^1-funktioille voimassa vastaavanlaisia tuloksia:

1. Onko olemassa jonoista koostuva Banach-avaruus X joille $(\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in X$ kaikilla $f \in L^1([0, 2\pi])$?
2. Onko olemassa Riesz-Fischerin lauseen vastinetta avaruudessa L^1?

Seuraava Riemann-Lebesguen lemma vie hieman 1. kysymyksen suuntaan. Merkitään

$$c_0(\mathbb{Z}) = \{(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \ : \ x_k \in \mathbb{C} \text{ kaikilla } k \in \mathbb{Z}, \lim_{|k|\to\infty} x_k = 0\}$$

ja varustetaan tämä avaruus $||\cdot||_\infty$-normilla. Tällöin $(c_0(\mathbb{Z}), ||\cdot||_\infty)$ on Banach-avaruus.

Lause 3.11 (Riemann-Lebesguen lemma)**.** *Jos $f \in L^1([0, 2\pi])$, niin*

$$(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z}).$$

Todistus. Jos $f \in L^1([0, 2\pi])$ ja $n \in \mathbb{Z}$, niin

$$|\widehat{f}(n)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{[0,2\pi]} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} |f(t)|\,|e^{-int}|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}||f||_1.$$