Banach-avaruudet 2026
Harjoitus 2
deadline: 8.4.2026, klo 10:00

Ex 2.1: Olkoon (a_k) jono $\mathbb{R}$:ssä siten, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \qquad \text{suppenee kaikilla } (x_k) \in c_0 = \{(y_k) \in \ell^\infty \,:\, \lim_{k\to\infty} y_k = 0\}.$$

Osoita, että tällöin $(a_k) \in \ell^1$.

Ex 2.2: Olkoon E, F ja G Banach-avaruuksia ja $T\colon E \times F \to G$ bilineaarinen, eli kuvaukset $T_{1,z}\colon E \to G\colon x \mapsto T(x,z)$ ja $T_{2,w}\colon F \to G\colon x \mapsto T(w,x)$ ovat lineaarisia kaikilla $z \in F$ ja $w \in E$. Varustetaan $E \times F$ normilla $||(x,y)||_{E\times F} = \max(||x||_E, ||y||_F)$. Osoita, että T on rajoitettu jos ja vain jos kaikilla $z \in E$ ja $w \in F$ kuvaukset $T_{1,z}$ ja $T_{2,w}$ ovat rajoitettuja.

Ex 2.3: Olkoon

$$c_{00} = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty \,:\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.e. } x_n = 0 \ \forall\, n \geq n_0\}.$$

Osoita, ettei ole olemassa normia $||\cdot||$ jolla $(c_{00}, ||\cdot||)$ olisi Banach-avaruus.

Ex 2.4: Osoita, että kaikilla $k, M \in \mathbb{N}$ joukko

$$A_{M,k} := \left\{ f \in C([0,1]) \,:\, \exists\, x \in [0,1] \text{ s.e. } \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|} \leq M \ \forall\, 0 < |t| < \frac{1}{k} \right\}$$

on ohut (eli ei missään tiheä) avaruudessa $(C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$.

Ex 2.5: Näytä, että joukko

$$N := \{f \in C([0,1]) \,:\, f \text{ ei ole derivoituva yhdessäkään pisteessä } x \in [0,1]\}$$

on toisen kategorian joukko avaruudessa $(C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$.

Ex 2.6: Anna esimerkki funktiosta $f \in C([0,1])$ joka ei ole derivoituva missään välin $[0,1]$ pisteessä.