

## 2. TASAISEN RAJOITUKSEN PERIAATE

“Palautetaan” seuraavaksi mieleen *Bairen kategorialause*. Nimityksen ymmärtämiseksi otetaan ensin Bairen määrittelemät kategoriat:

Topologisen avaruuden  $X$  osajoukko  $A$  on

- *ei-missään tiheä* (nowhere dense), jos sen sulkeumalla ei ole sisäpisteitä,
- *ensimmäisen kategorian joukko* jos se on numeroituva yhdiste ei-missään tiheistä joukoista, ja
- *toisen kategorian joukko* jos se ei ole ensimmäisen kategorian joukko.

Bairen kategorialause sanoo, että jokaisen täydellisen metrisen avaruuden avoin epätyhjä osajoukko on toisen kategorian joukko. Toisin sanoen:

**Lause 2.1** (Bairen lause). *Olkoon  $(X, d)$  täydellinen metrisen avaruus. Jos  $V_j \subset X$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , on numeroituva kokoelma avoimia tiheitä osajoukkoja, niin*

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} V_j \text{ on tiheä avaruudessa } X.$$

*Erityisesti siis  $\bigcap_{j=1}^{\infty} V_j \neq \emptyset$ .*

*Todistus.* Osoitetaan, että kaikilla  $x \in X$  ja  $r > 0$  on

$$B(x, r) \cap \left( \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j \right) \neq \emptyset.$$

Koska  $V_1$  on avoin ja tiheä, on olemassa  $y_1 \in V_1 \cap B(x, r)$ . Koska  $V_1$  on avoin, on myös  $V_1 \cap B(x, r)$  avoin. Siten on olemassa  $0 < r_1 < r$  siten, että  $\overline{B(y_1, r_1)} \subset V_1 \cap B(x, r)$ . Edelleen koska  $V_2$  on avoin ja tiheä, on olemassa  $y_2 \in V_2 \cap B(y_1, r_1)$  ja  $0 < r_2 < \frac{1}{2}r_1$  siten, että  $\overline{B(y_2, r_2)} \subset V_2 \cap B(y_1, r_1)$ . Jatkamalla tätä konstruktiota induktiivisesti saadaan avaruuden  $X$  jono  $(y_n)$ , jolle

$$\overline{B(y_n, r_n)} \subset V_n \cap B(y_{n-1}, r_{n-1}). \quad n = 2, 3, \dots,$$

missä  $0 < r_n < \frac{1}{n}r$ . Koska  $y_m \in B(y_n, r_n)$  kaikilla  $m \geq n$ , on  $(y_n)$  Cauchy-jono. Koska  $(X, d)$  on täydellinen, on olemassa  $z = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ . Koska  $y_m \in B(y_n, r_n)$  kaikilla  $m \geq n$ , on rajalla  $z \in \overline{B(y_n, r_n)} \subset V_n \cap B(x, r)$  kaikilla  $n$ . Siten

$$z \in B(x, r) \cap \left( \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j \right) \neq \emptyset.$$

□

**Seuraus 2.2.** *Olkoon  $(X, d)$  täydellinen metrisen avaruus, ja*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

*missä  $F_n \subset X$  on suljettu kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ . Tällöin on olemassa sellaiset  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $x_0 \in X$  ja  $r_0 > 0$ , että joukko  $F_{n_0}$  sisältää avoimen pallon  $B(x_0, r_0)$ .*

*Todistus.* Olkoon  $V_n = X \setminus F_n$  kun  $n \in \mathbb{N}$ , jolloin  $V_n \subset X$  on avoin kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ . Oletetaan, että väite ei ole totta eli ettei mikään  $F_n$  sisällä avointa palloa. Tällöin  $V_n$  on avoin ja tiheä

kaikilla  $n \in \mathbb{N}$  ja Bairen kategorialauseeseen nojalla leikkaus  $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$  on tiheä avaruudessa  $X$ . Erityisesti on olemassa

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

mikä on ristiriidassa oletuksen

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

kanssa. □

Käytetään nyt Bairen kategorialauseetta tasaisen rajoituksen periaatteen todistamiseen.

**Lause 2.3** (Banach-Steinhausin lause eli tasaisen rajoituksen periaate). *Olkoon  $E$  Banach-avaruus,  $F$  normiavaruus ja  $\{T_\alpha\}_{\alpha \in J}$  kokoelma jatkuvia lineaarikuvauksia  $T_\alpha: E \rightarrow F$ . Tällöin joko*

(1) *on olemassa sellainen  $M < \infty$ , että*

$$\|T_\alpha\| \leq M \quad \text{kaikilla } \alpha \in J$$

*tai*

(2) *on olemassa  $x \in E$  siten, että*

$$\sup_{\alpha \in J} \|T_\alpha x\| = \infty.$$

*Todistus.* Olkoon

$$F(n, \alpha) := \{x \in E : \|T_\alpha x\| \leq n\},$$

kun  $\alpha \in J$  ja  $n \in \mathbb{N}$ . Koska  $f_\alpha: x \mapsto \|T_\alpha x\|$  on jatkuva, on  $F(n, \alpha) = f_\alpha^{-1}([0, n]) \subset E$  suljettu joukko kaikilla  $\alpha \in J$  ja  $n \in \mathbb{N}$ . Siten

$$F_n := \bigcap_{\alpha \in J} F(n, \alpha)$$

on suljettujen joukkojen leikkauksena suljettu.

Oletetaan, nyt että (2) ei päde. Olkoon siis  $x \in E$  mielivaltainen. Koska (2) ei ole totta, on

$$\sup_{\alpha \in J} \|T_\alpha x\| < \infty.$$

Siten on olemassa  $n \in \mathbb{N}$  siten, että

$$\sup_{\alpha \in J} \|T_\alpha x\| \leq n$$

eli  $x \in F_n$ . Niinpä  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ . Seurauksesta 2.2 seuraa, että on olemassa  $N \in \mathbb{N}$  ja avoin pallo  $B(x_0, r_0) \subset E$  siten, että

$$B(x_0, r_0) \subset F_N.$$

Olkoon nyt  $x \in E$  siten, että  $\|x\| \leq 1$ . Tällöin

$$x_0 + \frac{r_0}{2}x \in B(x_0, r_0) \subset F_N,$$

joten  $\|T_\alpha(x_0 + \frac{r_0}{2}x)\| \leq N$  kaikilla  $\alpha \in J$ . Kuvauksen  $T_\alpha$  lineaarisuuden nojalla

$$\begin{aligned} \|T_\alpha x\| &= \frac{2}{r_0} \|T_\alpha(\frac{r_0}{2}x)\| = \frac{2}{r_0} \|T_\alpha(x_0 + \frac{r_0}{2}x) - T_\alpha x_0\| \\ &\leq \frac{2}{r_0} \left( \|T_\alpha(x_0 + \frac{r_0}{2}x)\| + \|T_\alpha x_0\| \right) \leq \frac{4N}{r_0} =: M. \end{aligned}$$

Siis  $\|T_\alpha\| \leq M$  kaikilla  $\alpha \in J$ . □

Yhtenä tasaisen rajoituksen periaatteen seurauksena voidaan todistaa, että lähtöavaruuden ollessa täydellinen jatkuvien lineaarikuvausten pisteittäisestä suppenemisesta seuraa rajafunktion jatkuvuus.

**Lause 2.4.** *Olkkoon  $E$  Banach-avaruus,  $F$  normiavaruus ja  $(T_n)$  jono avaruudessa  $\mathcal{L}(E, F)$  siten, että  $T_n$  suppenee kuvaukseen  $T$  pisteittäin. Tällöin  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ .*

*Todistus.* Kuvaus on lineaarinen Lauseen 1.2 nojalla. Koska kaikilla  $x \in E$  jono  $(T_n x)$  suppenee avaruudessa  $F$ , on se Cauchy-jono ja siten rajoitettu. Niinpä

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n x\| < \infty \quad \text{kaikilla } x \in E.$$

Siten Banach-Steinhausin lauseen nojalla on olemassa  $M < \infty$  siten, että  $\|T_n\| \leq M$  kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ . Siispä

$$\|Tx\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| \|x\| \leq M \|x\|$$

eli  $\|T\| \leq M$ . □

Otetaan nyt esimerkki edellisen lauseen (eli siten myös Banachin-Steinhausin lauseen) käytöstä

**Esimerkki 2.5.** Olkkoon  $(a_n)_{n=1}^\infty$  jono  $\mathbb{R}$ :ssä siten, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \quad \text{suppenee } \mathbb{R}\text{:ssä kaikilla jonoilla } (x_n) \in \ell^1.$$

Mitä voimme tällöin sanoa jonosta  $(a_n)$ ?

Selvästi jos  $(a_n) \in \ell^\infty$ , on

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \quad \text{kaikilla } (x_n) \in \ell^1.$$

Osoittautuu kuitenkin, että  $(a_n) \in \ell^\infty$  on myös välttämätön ehto:

Asetetaan kaikille  $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x_j) = \sum_{j=1}^n a_j x_j \quad \text{kun } (x_j) \in \ell^1.$$

Tällöin  $f_n: \ell^1 \rightarrow \mathbb{R}$  on lineaarinen kaikilla  $n \in \mathbb{N}$  ja

$$|f_n(x_j)| = \left| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_j| |x_j| \leq \max_{k=1, \dots, n} |a_k| \|(x_j)\|_1 < \infty.$$

Siten  $f_n$  on myös jatkuva kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ . Jos  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$  suppenee kaikilla  $(x_n) \in \ell^1$ , on oletuksen nojalla olemassa raja-arvo

$$f(x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_j x_j = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_j).$$

Koska  $\ell^1$  on Banach-avaruus, on Lauseen 2.4 nojalla  $f$  jatkuva. Siten kaikilla  $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \ell^1$  missä  $k$ :s alkio on nolasta poikkeava, on

$$|a_k| = |f e_k| \leq \|f\| \|e_k\|_1 = \|f\|,$$

eli  $(a_k) \in \ell^\infty$ .

Palautetaan mieliin Hilbert-avaruuksien kurssilta Fourier-kertoimista opittua. Eräs  $L^2([0, 2\pi])$ :n ortonormaali jonoa  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , saatiin funktioista

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\cos(nt) + i \sin(nt)), \quad n \in \mathbb{Z}, t \in [0, 2\pi].$$

Näitä käyttäen määriteltiin  $f$ :n  $n$ :s Fourier-kerroin kaavalla

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f | e_n).$$

Lisäksi funktiolle  $f \in L^2([0, 2\pi])$  kirjoitettiin  $n$ :s Fourier-osasumma

$$s_n(f; x) := \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Määriteltiin lisäksi  $n$ :s Dirichlet'n ydin asettamalla

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}.$$

Dirichlet'n ytimien aritmeettista keskiarvoa

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x), \quad x \in [0, 2\pi]$$

kutsuttiin *Fejérin ytimeksi*. Osasummista ja ytimistä todisteettiin seuraavaa.

**Lemma 2.6.** *Fourier-osasummilla  $s_n(f; \cdot)$  on integraaliesitys*

$$s_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} f(t) D_n(x-t) dt.$$

**Lemma 2.7.** (i) *Kaikilla  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  on voimassa*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_n(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(x) dx = 1,$$

(ii)  *$K_n(x) \geq 0$  kaikilla  $x \in [0, 2\pi]$ , ja lisäksi kaikilla  $0 < \delta \leq x \leq 2\pi - \delta$  on*

$$K_n(x) \leq \frac{2}{(n+1)(1 - \cos \delta)}.$$

**Lause 2.8** (Fejérin lause). *Olkoon  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  jatkuva,  $f(0) = f(2\pi)$ . Tällöin*

$$\|K_n * f - f\|_\infty \rightarrow 0, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty.$$

Tutkitaan seuraavaksi miten Banach-Steinhausin lausetta voidaan käyttää Fourier-sarjojen yhteydessä. Osoitimme jo aikaisemmin Fejérin lauseen eli, että jatkuvien  $2\pi$ -periodisten funktioiden Fourier-osasummien keskiarvo suppenee tasaisesti kohti funktiota. Vielä jäi avoimeksi mitä tapahtuu itse Fourier-sarjalle. Ehkä hieman yllättäen Fourier-sarjat eivät aina suppene:

**Lause 2.9.** *On olemassa jatkuva  $2\pi$ -periodinen funktio  $f \in C([0, 2\pi])$ , jonka Fourier-sarja*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}$$

*hajaantuu pisteessä  $x = 0$ .*

*Todistus.* Olkoon

$$s_n(f; x) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx}, \quad x \in [0, 2\pi]$$

$n$ :s Fourier osasumma. Näytämme, että on olemassa sellainen jatkuva funktio  $f \in C([0, 2\pi])$ , jolla  $f(0) = f(2\pi)$  ja

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |s_n(f; 0)| = \infty.$$

Lemman 2.6 nojalla

$$s_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t) dt = (D_n * f)(x),$$

missä  $D_n$  on Dirichlet'n ydin

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

Asetetaan kaikilla  $n \in \mathbb{N}$

$$\Lambda_n(f) = s_n(f; 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(-t) dt.$$

Tällöin kuvaus  $\Lambda_n: C([0, 2\pi]) \rightarrow \mathbb{C}$  on lineaarinen ja

$$|\Lambda_n(f)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(t) D_n(-t) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| |D_n(-t)| dt \leq \frac{\|f\|_{\infty}}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| dt$$

eli  $\|\Lambda_n\| \leq (2\pi)^{-1} \|D_n\|_1 < \infty$  ja siten kukin  $\Lambda_n$  on jatkuva lineaarikuvaus. Osoitetaan seuraavaksi, että  $\|\Lambda_n\| \rightarrow \infty$  kun  $n \rightarrow \infty$  jolloin Banach-Steinhausin nojalla on olemassa jokin

$$f \in \{g \in C([0, 2\pi]) : g(0) = g(2\pi)\}$$

jolle  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\Lambda_n(f)| = \infty$ .

Osoitetaan ensin, että  $\|\Lambda_n\| = (2\pi)^{-1} \|D_n\|_1$  ja sen jälkeen, että  $\|D_n\|_1 \rightarrow \infty$ , kun  $n \rightarrow \infty$ .

Halutaan siis, että edellä olleessa  $|\Lambda_n(f)|$ :n arvioissa epäyhtälöt ovat yhtälöitä. Haluttaisiin siis ottaa funktioksi  $f$  funktio

$$g_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } D_n(-t) \geq 0 \\ -1, & \text{kun } D_n(-t) < 0, \end{cases}$$

jolloin olisi  $g_n(t)D_n(-t) = |D_n(-t)|$  kaikilla  $t \in [0, 2\pi]$ . Olkoon  $(f_j)$  jono  $2\pi$ -periodisia funktioita  $C([0, 2\pi])$ :ssa siten, että

$$-1 \leq f_j(t) \leq 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(t) = g_n(t)$$

kaikilla  $t \in [0, 2\pi]$ . Tällöin Lebesguen dominoidun konvergenssin nojalla

$$\begin{aligned} \|\Lambda_n\| &\geq \sup_{j \in \mathbb{N}} \Lambda_n f_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_j(t) D_n(-t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_n(t) D_n(-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(-t)| dt. \end{aligned}$$

Osoitetaan lopuksi, että  $\|D_n\|_1 \rightarrow \infty$ , kun  $n \rightarrow \infty$ . Tämä nähdään arvioimalla

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| dt &\geq \int_0^{2\pi} \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{t} dt \geq \int_0^\pi |\sin((n + \frac{1}{2})t)| \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} |\sin s| \frac{ds}{s} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin s| ds = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

kun  $n \rightarrow \infty$ . □

Fourier-sarjoja tutkittaessa huomasimme myös, että jos  $f \in L^2$ , niin funktion  $f$  Fourier-sarja suppenee  $L^2$ -normin mielessä. Osoitetaan seuraavaksi Banach-Steinhausin lauseen avulla, että tässä avaruutta  $L^2$  ei voida vaihtaa avaruuteen  $L^1$ .

**Lause 2.10.** *On olemassa  $f \in L^1([0, 2\pi])$  siten, että*

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx} \right\|_1 \not\rightarrow 0, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty.$$

*Todistus.* Olkoon kaikille  $n \in \mathbb{N}$  kuvaus  $T_n: L^1([0, 2\pi]) \rightarrow L^1([0, 2\pi])$  määritelty

$$(T_n f)(x) = s_n(f; x) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx} = (D_n * f)(x), \quad x \in [0, 2\pi].$$

Kuvaukset  $T_n$  ovat lineaarisia, koska Fourier-kertoimet ovat lineaarisia  $f$ :n suhteen. Lisäksi

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| |e^{ikt}| dt = \frac{1}{2\pi} \|f\|_1,$$

joten kaikilla  $f \in L^1([0, 2\pi])$  on

$$\|T_n f\|_1 = \left\| \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx} \right\|_1 \leq \sum_{k=-n}^n |\widehat{f}(k)| \|e^{ikx}\|_1 \leq (2n+1) \|f\|_1.$$

Erityisesti kuvaukset  $T_n$  ovat jatkuvia.

Kuten edellisenkin lauseen todistuksessa, nyt riittää osoittaa, että  $\|T_n\| \rightarrow \infty$  kun  $n \rightarrow \infty$ , jolloin Banach-Steinhausin lauseen nojalla löytyy väitteen kuvaus  $f$ . Käytetään tähän apuna jo aikaisemminkin käytettyjä Fejérin ytimiä

$$K_j(x) = \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^j D_k(x).$$