

1. KERTAUSTA JA TÄYDENNYSTÄ HILBERT-AVARUUKSIEN KURSSIIN

Määritelmä 1.1. Olkoon E $\mathbb{K}$ -kertoiminen vektoriavaruus. Kuvaus $p: E \rightarrow [0, \infty)$ on *normi* E :ssä, jos

- (N1) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ kaikilla $x, y \in E$,
- (N2) $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ kaikilla $x \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, ja
- (N3) $p(x) = 0$ jos ja vain jos $x = \bar{0}$.

Tavallisesti merkitään $\|x\| = p(x)$. Paria $(E, \|\cdot\|)$ sanotaan *normiavaruudeksi*.

Kuvaus $p: E \rightarrow [0, \infty)$ on *seminormi* E :ssä jos se toteuttaa edellisen määritelmän muut ehdot paitsi ei välttämättä ehtoa (N3). Seminormi p määrittää normin tekijäavaruuteen $E/\sim$, missä $x \sim y$ joss $p(x - y) = 0$. (Semi)normia $p(\cdot)$ merkitään usein $\|\cdot\|$.

Normiavaruus $(E, \|\cdot\|)$ on *täydellinen*, jos $(E, \|\cdot\|)$ on täydellinen metrinen avaruus. Täydellistä normiavaruutta kutsutaan *Banach-avaruudeksi*.

Kuvausta $T: E \rightarrow F$ sanotaan lineaariseksi, jos

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty \quad \text{kaikilla } x, y \in E \text{ ja } \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Lineaarikuvaus on jatkuva jos ja vain jos sen operaattorinormi $\|T\|$ on äärellinen, missä

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F.$$

Palautetaan mieliin myös merkinnät

$$\begin{aligned} L(E, F) &= \{T: E \rightarrow F \mid T \text{ on lineaarikuvaus}\}, \\ \mathcal{L}(E, F) &= \{T: E \rightarrow F \mid T \text{ on jatkuva lineaarikuvaus}\}. \end{aligned}$$

Tapauksessa $E = F$ merkitsemme yleensä $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.

Lause 1.2. Olkoon E ja F normiavaruuksia ja (T_n) jono lineaarikuvauksia $L(E, F)$:ssä joka suppenee pisteittäin kohti kuvausta $T: E \rightarrow F$. Tällöin T on lineaarinen.

Hilbert-avaruuksien kurssilla huomasimme, että pisteittäinen suppeneminen ei kuitenkaan riitä aina jatkuvuuden säilymiseen. *Tasaisen rajoituksen periaatteen* eli *Banach-Steinhausin lauseen*) avulla (jonka kohta todistamme) tulemme huomaamaan, että pisteittäinen suppeneminen takaa rajafunktionaalin jatkuvuuden, jos lähtöavaruus on Banach.

Määritelmä 1.3. Banachin avaruutta E sanotaan *Banachin algebraksi*, jos avaruuden E alkioille on määritetty tulo $E \times E \rightarrow E: (x, y) \mapsto xy$, joka toteuttaa ehdon

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\|, \quad \text{kaikilla } x, y \in E,$$

ja lisäksi algebran ehdot.

Muistutukseksi Algebran kurssilta: $(E, +, \cdot)$ on algebra, jos

$$\begin{aligned} x(yz) &= (xy)z, & (\text{tulo on assosiatiiivinen}) \\ x(y + z) &= xy + xz, \\ (x + y)z &= xz + yz, & (\text{osittelulait}) \\ (\lambda x)y &= \lambda(xy) = x(\lambda y), & (\text{yhteensopivuus skalaarilla kertomisen kanssa}) \end{aligned}$$

kaikilla $x, y, z \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$.

Hilbert-avaruuden kurssin perusteella $\mathcal{L}(E)$ on Banachin algebra, kun E on Banachin avaruus.

Lause 1.4. Olkoon E, F normiavaruuksia ja $T: E \rightarrow F$ lineaarinen bijektio. Tällöin T^{-1} on lineaarinen ja

$$T^{-1} \text{ on jatkuva} \iff \exists \alpha > 0 \text{ s.e. } \|Tx\| \geq \alpha\|x\|, \forall x \in E.$$

Todistus. Jos $x, y \in F$ ja $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, niin

$$\lambda T^{-1}x + \mu T^{-1}y = T^{-1}T(\lambda T^{-1}x + \mu T^{-1}y) = T^{-1}(\lambda TT^{-1}x + \mu TT^{-1}y) = T^{-1}(\lambda x + \mu y),$$

eli T^{-1} on lineaarinen.

Oletetaan nyt, että T^{-1} on jatkuva. Voidaan olettaa, että on olemassa $x_0 \in F \setminus \{\bar{0}\}$, jolloin

$$0 < \frac{\|T^{-1}x_0\|}{\|x_0\|} \leq \|T^{-1}\|.$$

Siispä $0 < \|T^{-1}\| < \infty$, joten $\frac{1}{\|T^{-1}\|} < \infty$. Jos $x \in E$ on mielivaltainen, niin $\|x\| = \|T^{-1}Tx\| \leq \|T^{-1}\| \|Tx\|$, joten

$$\|Tx\| \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|} \|x\|,$$

joten väitteen α :ksi voidaan valita $\frac{1}{\|T^{-1}\|}$.

Väitteen toisen puolen osoittamiseksi oletetaan seuraavaksi, että $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$ kaikilla $x \in E$. Jos $y \in F$ on mielivaltainen, valitaan $x = T^{-1}y$. Tällöin oletuksen nojalla

$$\|T^{-1}y\| = \|x\| \leq \frac{1}{\alpha} \|Tx\| = \frac{1}{\alpha} \|y\|.$$

Siten $\|T^{-1}\| \leq 1/\alpha < \infty$, joten T^{-1} on jatkuva. □

Seuraus 1.5. Olkoot E, F normiavaruuksia ja $T: E \rightarrow F$ lineaarinen bijektio. Tällöin T on homeomorfismi jos ja vain jos on olemassa vakiot $\alpha, \beta > 0$ joille

$$\alpha\|x\| \leq \|Tx\| \leq \beta\|x\| \quad \text{kaikilla } x \in E.$$

Määritelmä 1.6. Jos $T \in \mathcal{L}(E, F)$ toteuttaa Seurauksen 1.5 ehdon, sanomme kuvausta T lineaariseksi *isomorfismiksi* ja avaruuksia E ja F (lineaarisesti) *isomorfisiksi*.

Lause 1.7. Olkoot E ja F lineaarisesti isomorfisia normiavaruuksia. Tällöin E on täydellinen jos ja vain jos F on täydellinen.

Todistus. Olkoon $T \in \mathcal{L}(E, F)$ lineaarinen isomorfismi. Symmetrian vuoksi riittää osoittaa väite vain toiseen suuntaan. Oletetaan siis, että E on täydellinen. Olkoon $(x_n)_{n=1}^\infty$ Cauchy-jono avaruudessa F . Tällöin

$$\|T^{-1}x_n - T^{-1}x_m\|_E = \|T^{-1}(x_n - x_m)\|_E \leq \|T^{-1}\| \|x_n - x_m\|_F$$

kaikilla $n, m \in \mathbb{N}$, joten $(T^{-1}x_n)_{n=1}^\infty$ on Cauchy-jono avaruudessa E . Koska E on täydellinen, on olemassa $y \in E$ siten, että $T^{-1}x_n \rightarrow y$, kun $n \rightarrow \infty$. Siten

$$\|x_n - Ty\|_F = \|T(T^{-1}x_n) - Ty\|_F \leq \|T\| \|T^{-1}x_n - y\|_E \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$. Siten myös F on täydellinen. □

Esimerkki 1.8. Osoitetaan, että jonoavaruus

$$c = \{(x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ on olemassa}\}$$

on isomorfinen jonoavaruuden

$$c_0 = \{(x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$$

kanssa (kun molemmat varustetaan supremum-normilla).

Määritellään $T: c \rightarrow c_0: (x_n) \mapsto (y_n)$, missä $y_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, ja $y_n = x_{n-1} - y_1$, kun $n \geq 2$. Tällöin $T(x_n) \in c_0$ ja T on lineaarinen. Lisäksi

$$\|T(x_n)\|_\infty \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| + |y_1| \leq 2\|(x_n)\|_\infty,$$

joten T on jatkuva. Määritellään seuraavaksi $S: c_0 \rightarrow c: (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (x_{n+1} + x_1)_{n \in \mathbb{N}}$. Tällöin S on lineaarikuvaus ja

$$\|S(x_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_{n+1} + x_1| \leq 2\|(x_n)\|_\infty,$$

eli myös S on jatkuva. Lisäksi $TS = \text{id}_{c_0}$ ja $ST = \text{id}_c$, joten T on haluttu isomorfismi.

Lause 1.9. *Olko E normiavaruus, F Banachin avaruus, $M \subset E$ vektorialiavaruus sekä $T: M \rightarrow F$ jatkuva lineaarikuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen jatkuva lineaarikuvaus $\hat{T}: \bar{M} \rightarrow F$, jolle $\hat{T}z = Tz$ kaikilla $z \in M$ ja $\|\hat{T}\| = \|T\|$.*

Todistus. Olko $z \in \bar{M}$. Tällöin löytyy sellainen jono (x_n) avaruudesta M jolle $x_n \rightarrow z$ kun $n \rightarrow \infty$. Jos $p, q \in \mathbb{N}$, saadaan

$$\|Tx_p - Tx_q\| = \|T(x_p - x_q)\| \leq \|T\| \|x_p - x_q\|,$$

joten (Tx_n) on Cauchy-jono avaruudessa F . Koska F on Banachin avaruus, on tällä jonolla raja-arvo $\hat{T}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n \in F$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\hat{T}(z)$ ei riipu jonon (x_n) valinnasta. Olko (y_n) jono avaruudessa M siten, että $z = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Olko $u = \lim_{n \rightarrow \infty} Ty_n \in F$. Tällöin

$$\hat{T}(z) - u = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n - \lim_{n \rightarrow \infty} Ty_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n - y_n) = \bar{0}$$

eli $\hat{T}(z) = u$. Siten $\hat{T}(z)$ riippuu vain pisteestä z .

Koska kaikille $z \in M$ jono $(z)_{n=1}^\infty$ suppenee kohti alkia z , on $\hat{T}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} Tz = Tz$. Siten $\hat{T}$ on kuvauksen T laajennus.

Osoitetaan seuraavaksi kuvauksen $\hat{T}$ lineaarisuus. Olko $x, y \in \bar{M}$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$. Valitaan sellaiset jonot (x_n) ja (y_n) avaruudesta M , että $x_n \rightarrow x$ ja $y_n \rightarrow y$ kun $n \rightarrow \infty$. Nyt myös $(x_n + \alpha y_n)$ on avaruuden M jono ja $x_n + \alpha y_n \rightarrow x + \alpha y$. Siten

$$\hat{T}(x + \alpha y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \alpha y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n + \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} Ty_n = \hat{T}(x) + \alpha \hat{T}(y).$$

Osoitetaan seuraavaksi, että $\|\hat{T}\| = \|T\|$. Jos $z \in \bar{M}$, valitaan jono (x_n) avaruudesta M siten, että $x_n \rightarrow z$. Tällöin $\hat{T}z = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n$ ja siten

$$\|\hat{T}z\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T\| \|x_n\| = \|T\| \|z\|.$$

Koska tämä oli totta kaikille $z \in \bar{M}$, on $\|\hat{T}\| \leq \|T\|$. Toiseen suuntaan epäyhtälö on vielä ilmeisempi, sillä $\|Tz\| = \|\hat{T}z\| \leq \|\hat{T}\| \|z\|$ kaikilla $z \in M$.

Lopuksi vielä osoitetaan kuvauksen $\hat{T}$ yksikäsitteisyys. Oletetaan, että S on jatkuva lineaarinen kuvaus $\bar{M} \rightarrow F$, jolle $Sz = Tz$ kaikilla $z \in M$. Koska $S - \hat{T}$ on myös jatkuva on kaikilla $z \in \bar{M}$ voimassa

$$Sz - \hat{T}z = \lim_{n \rightarrow \infty} (Sx_n - Tx_n) = 0$$

missä (x_n) on jono avaruudessa M siten, että $x_n \rightarrow z$. Siten kuvaus $\hat{T}$ on yksikäsitteinen. $\square$

1.1. Duaaliavaruudet. Jos E on vektoriavaruus jonka skalaarikunta on $\mathbb{K}$, merkitään

$$E^\dagger = L(E, \mathbb{K})$$

tarkoittaa avaruuden *algebrallista duaalia*. Duaalin $E^\dagger$ alkioit ovat avaruuden E lineaarisia muotoja eli *funktionaaleja*. Jatkossa merkitsemme usein $\langle x, f \rangle = f(x)$. Ehto $(x, f) \mapsto \langle x, f \rangle$ määrittelee *kanonisen bilineaarimuodon* $E \times E^\dagger \rightarrow \mathbb{K}$.

Määritelmä 1.10. Jos E on normiavaruus jonka skalaarikuntana on $\mathbb{K}$, niin $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ on avaruuden E (*topologinen*) *duaali*.

Perusesimerkkinä duaaliavaruudesta otetaan ℓ^p -avaruuksien duaalit. Lause oli Hilbert-avaruuksien kurssilla, mutta sen todistus ohitettiin. Käydään todistus nyt läpi.

Lause 1.11. Olkoon $0 < p, q < \infty$ duaalieksponentit (eli $1/p + 1/q = 1$). Tällöin avaruuden $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ duaali on isometrisesti isomorfinen avaruuden $(\ell^q, \|\cdot\|_q)$ kanssa.

Todistus. Merkitään kaikilla $k \in \mathbb{N}$, $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \ell^p$, missä k :s alkio on nollasta poikkeava. Merkitään lisäksi

$$s_n((x_k)) = \sum_{k=1}^n x_k e_k = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots), \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Tällöin $x = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$ avaruudessa ℓ^p .

Jos $x^* \in (\ell^p)^*$, $x = (x_k) \in \ell^p$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin lineaarisuuden perusteella

$$\langle s_n(x), x^* \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \langle e_k, x^* \rangle =: \sum_{k=1}^n x_k y_k,$$

missä siis $y_k = \langle e_k, x^* \rangle$, kun $k \in \mathbb{N}$. Koska x^* on jatkuva, on

$$\langle x, x^* \rangle = \langle \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x), x^* \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle s_n(x), x^* \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Näytetään seuraavaksi, että $(y_k) \in \ell^q$. Määritellään

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{|y_k|^q}{y_k}, & \text{kun } y_k \neq 0 \\ 0, & \text{kun } y_k = 0, \end{cases}$$

ja asetetaan

$$w_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k.$$

Tällöin

$$\|w_n\|_p^p = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^p = \sum_{k=1}^n |y_k|^{p(q-1)} = \sum_{k=1}^n |y_k|^q$$

ja siten

$$\begin{aligned} A &:= \sum_{k=1}^n |y_k|^q = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k = \langle w_n, x^* \rangle = |\langle w_n, x^* \rangle| \\ &\leq \|w_n\|_p \|x^*\| = \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{p}} \|x^*\| = A^{1/p} \|x^*\|. \end{aligned}$$

Kertomalla tämä epäyhtälö puolittain $A^{-1/p}$:llä saadaan

$$\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q} = A^{1/q} = A^{1-1/p} \leq \|x^*\|$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Määritellään tämän perusteella lineaarinen kuvaus

$$T: (\ell^p)^* \rightarrow \ell^q: x^* \mapsto (\langle e_k, x^* \rangle)_{k \in \mathbb{N}}.$$

Osoitimme siis jo, että $\|T\| \leq 1$.

Kääntäen, jos $x = (x_k) \in \ell^p$ ja $y = (y_k) \in \ell^q$, niin Hölderin epäyhtälön mukaan

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/q}.$$

Siten lineaarikuvaus $\Lambda_y: x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ on jatkuva ja siten avaruuden $(\ell^p)^*$ alkio. Lisäksi

$$\|\Lambda_y\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/q} = \|y\|_q.$$

Määritellään siis

$$S: \ell^q \rightarrow (\ell^p)^*: y \mapsto \Lambda_y,$$

jolloin $\|S\| \leq 1$. Kaikille $y \in \ell^q$ on

$$TSy = (\langle e_k, \Lambda_y \rangle)_{k \in \mathbb{N}} = (y_k)_{k \in \mathbb{N}} = y$$

ja kaikille $x^* \in (\ell^p)^*$ on

$$(STx^*)z = (S(\langle e_k, x^* \rangle)_{k \in \mathbb{N}})z = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \langle e_k, x^* \rangle = \langle z, x^* \rangle$$

kaikilla $z \in \ell^p$. Siten S on operaattorin T käänteiskuvaus ja T on isometrinen isomorfismi. $\square$

Lauseen 1.11 vuoksi $(\ell^p)^*$ usein samaistetaan ℓ^q :n kanssa. Koska duaaliekspONENTtien p ja q asema on symmetrinen, on

$$((\ell^p)^*)^* \cong (\ell^q)^* \cong \ell^p$$

eli ℓ^p on *refleksiivinen* kun $1 < p < \infty$.

Edellisen lauseen kaltaisella päättelyllä voidaan osoittaa, että $c_0^* \cong \ell^1$ ja $(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$. Kuitenkin $(\ell^\infty)^* \not\cong \ell^1$. (Duaali $(\ell^\infty)^*$ voidaan esittää $\mathbb{N}$:n äärellisesti additiivisten mittojen joukkona.)

Määritelmä 1.12. Jos E on normiavaruus, niin $E^{**} = (E^*)^*$ on avaruuden E *biduaali*.

Duaaliavaruutena myös biduaali on aina Banach-avaruus. Määritellään nyt kaikille $x \in E$ kuvaus

$$J_x: E^* \rightarrow \mathbb{K}: x^* \mapsto \langle x, x^* \rangle.$$

Huomataan, että $J_x \in (E^*)^*$, sillä J_x on lineaarinen:

$$J_x(\alpha x^* + \beta y^*) = \langle x, \alpha x^* + \beta y^* \rangle = \alpha \langle x, x^* \rangle + \beta \langle x, y^* \rangle = \alpha J_x(x^*) + \beta J_x(y^*)$$

kaikilla $x^*, y^* \in E^*$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Lisäksi se on jatkuva:

$$|J_x(x^*)| = |\langle x, x^* \rangle| \leq \|x\| \|x^*\|$$

kaikilla $x^* \in E^*$.

Näin saatua kuvausta

$$J: E \rightarrow E^{**}: x \mapsto J_x$$

kutsutaan *kanoniseksi kuvaukseksi*.

Lause 1.13. Jos E on normiavaruus, niin kanoninen kuvaus $J: E \rightarrow E^{**}$ on lineaarinen isometria.

Todistus. Olkoon $x, y \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ja $x^* \in E^*$. Tällöin funktionaalin x^* lineaarisuuden nojalla

$$\langle x^*, J(\alpha x + \beta y) \rangle = \langle \alpha x + \beta y, x^* \rangle = \alpha \langle x, x^* \rangle + \beta \langle y, x^* \rangle = \alpha \langle x^*, Jx \rangle + \beta \langle x^*, Jy \rangle,$$

joten $J(\alpha x + \beta y) = \alpha Jx + \beta Jy$. Lisäksi

$$\|Jx\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |\langle x^*, Jx \rangle| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |\langle x, x^* \rangle| = \|x\|$$

kaikilla $x \in E$, joten J on isometria. □

Määritelmä 1.14. Normiavaruus E on *refleksiivinen*, jos $J(E) = E^{**}$.

Esimerkki 1.15. Jos $1 < p < \infty$, niin ℓ^p on refleksiivinen: Jos q on p :n duaaliekspONENTTI, on $(\ell^p)^* = \ell^q$ ja

$$\langle x, y^* \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k \bar{y}_k,$$

kun $x = (x_k) \in \ell^p$, $y^* = (y_l) \in \ell^q$. Siis

$$J: \ell^p \rightarrow (\ell^p)^{**} = \ell^p$$

on identtinen kuvaus.