

Ex 1.1: Osoita, että lineaarikuvausten suppenemisesta operaattorinormissa seuraa pisteittäinen suppeneminen.

Ex 1.2: Osoita, että pisteittäisestä suppenemisestä ei aina seuraa suppeneminen operaattorinormissa.

Ex 1.3: Osoita, että kuvaus $T: \ell^p \rightarrow \ell^p: (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$ on lineaarinen isometria (eli säilyttää etäisyydet).

Ex 1.4: Olkoon T kuten edellisessä tehtävässä. Etsi kuvaus $S \in \mathcal{L}(\ell^p)$, jolle $ST = I$. Onko T kääntyvä?

Tarkastellaan yhtälöä

$$(1) \quad h(y) \int_{[0,1]} f(x)h(x) dx + f(y) = g(y) \quad \forall y \in [0, 1],$$

missä $g, h \in C([0, 1], \mathbb{R})$.

Ex 1.5: Osoita Banachin kiintopistelausetta käyttäen, että mikäli $\|h\|_2 < 1$, on olemassa yksikäsitteinen $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ joka toteuttaa yhtälön (1).

Ex 1.6: Jos $\|h\|_2 \geq 1$, onko tällöin olemassa yksikäsitteistä $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ joka toteuttaa yhtälön (1)? ¹

¹Vihje: käytä Banachin kiintopisteen lauseen sijaan Hilbert-avaruuksien teoriaa. Esimerkiksi voit tutkia yhtälöä avaruuden $L^2([0, 1])$ Hilbert-kannassa, jossa ensimmäinen vektori saadaan skaalaamalla vektoria h .