

Todistus. a) Olkoon $\lambda \in \mathbb{C}$ ja $q(z) = \lambda - p(z)$. Koska q on polynomi,

$$q(z) = c(z - \mu_1) \cdots (z - \mu_n), \quad c \neq 0, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{C}.$$

Nyt $\lambda \notin \delta(p(T))$ jos ja vain jos $\lambda I - p(T)$ on kääntövä jos ja vain jos $q(T)$ on kääntövä jos ja vain joss

$$c(T - \mu_1 I) \cdots (T - \mu_n I) \text{ on kääntövä.}$$

Tämä taas on totta jos ja vain jos $(T - \mu_i I)$ on kääntövä kaikilla $i = 1, \dots, n$, joka taas on totta jos ja vain jos mikään q :n nollakohdista ei kuulu $\delta(T)$:hen eli jos ja vain jos $\lambda \neq p(\mu)$ kaikilla $\mu \in \delta(T)$.

b) Koska T on kääntövä, on $0 \notin \delta(T)$. Erityisesti jokainen $\delta(T^{-1})$:n alkio voidaan kirjoittaa muodossa μ^{-1} , missä $\mu \in \mathbb{C}$. Koska

$$\mu^{-1}I - T^{-1} = -T^{-1}\mu^{-1}(\mu I - T)$$

ja koska $-T^{-1}\mu^{-1}$ on kääntövä, on $\mu^{-1} \in \delta(T^{-1})$ jos ja vain jos $\mu^{-1}I - T^{-1}$ ei ole kääntövä jos ja vain jos $\mu I - T$ ei ole kääntövä jos ja vain jos $\mu \in \delta(T)$. $\square$

Merkitään operaattorille $T \in \mathcal{L}(H)$

$$V(T) = \{\langle Tx, x \rangle : \|x\| = 1\}$$

Lemma 7.6. *Olkoon H Hilbert-avaruus ja $T \in \mathcal{L}(H)$ normaali. Tällöin $\delta(T) \subset \overline{V(T)}$.*

Todistus. Olkoon $\lambda \in \delta(T)$. Myös $T - \lambda I$ on normaali. (HT) Koska $T - \lambda I$ ei ole kääntövä, on olemassa jono x_n siten, että $\|x_n\| = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $\|(T - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0$. Nyt Cauchy-Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$|\langle (T - \lambda I)x_n, x_n \rangle| \leq \|(T - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$. Siten

$$\langle Tx_n, x_n \rangle - \lambda \langle x_n, x_n \rangle \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$. Toisaalta $\langle x_n, x_n \rangle = 1$, joten $\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow \lambda$, kun $n \rightarrow \infty$. $\square$

Lause 7.7. *Olkoon H Hilbert-avaruus ja $T \in \mathcal{L}(H)$ itseadjungoitu. Tällöin*

- a) $V(T) \subset \mathbb{R}$,
- b) $\delta(T) \subset \mathbb{R}$
- c) *joko* $\|T\| \in \delta(T)$ *tai* $-\|T\| \in \delta(T)$.

Todistus. a) Itseadjungoituvuuden nojalla

$$\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle}.$$

b) Seuraa a)-kohdasta ja Lemmasta 7.6.

c) Voidaan olettaa, että $\|T\| = 1$. Tällöin on olemassa jono (x_n) siten, että $\|x_n\| = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $\|Tx_n\| \rightarrow 1$, kun $n \rightarrow \infty$. Nyt

$$\begin{aligned} \|(I - T^2)x_n\|^2 &= \langle (I - T^2)x_n, (I - T^2)x_n \rangle = \|x_n\|^2 + \|T^2x_n\|^2 - 2\langle T^2x_n, x_n \rangle \\ &\leq 2 - 2\langle Tx_n, Tx_n \rangle = 2 - 2\|Tx_n\|^2 \rightarrow 0, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Siis $\|(I - T^2)x_n\|^2 \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$, joten $1 \in \delta(T^2)$. (Harjoitustehtävä) Lauseen 7.5 nojalla $i \in (\delta(T))^2$, joten $1 \in \delta(T)$ tai $-1 \in \delta(T)$. $\square$

Määritelmä 7.8. Olkoon H Hilbert-avaruus. Operaattori $T \in \mathcal{L}(H)$ on *positiivinen*, jos $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ kaikille $x \in H$. Tällöin merkitään $T \geq 0$.

Lause 7.9. Olkoon H Hilbert-avaruus ja $T \in \mathcal{L}(H)$ itseadjungoitu. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen kuvaus $\phi: C(\delta(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ jolla on seuraavat ominaisuudet

a) ϕ on algebrallinen $*$ -homomorfismi, eli

$$\phi(fg) = \phi(f)\phi(g), \quad \phi(\lambda f) = \lambda\phi(f), \quad \phi(1) = I, \quad \phi(\bar{f}) = \phi(f)^*.$$

b) ϕ on jatkuva: $\|\phi(f)\| \leq C\|f\|_\infty$.

c) Jos $f(x) = x$ kaikilla x , on $\phi(f) = T$.

d) Jos $Tv = \lambda v$, niin $\phi(f)v = f(\lambda)v$.

e) $\delta(\phi(f)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \delta(T)\}$.

f) Jos $f \geq 0$, niin $\phi(f) \geq 0$.

g) $\|\phi(f)\| = \|f\|_\infty$ (eli b) on totta vahvemmassakin muodossa).

Todistus. Määritellään kuvaus ϕ ensin polynomeille p asettamalla yksinkertaisesti $\phi(p) = p(T)$. Tällöin ominaisuudet a), b), c) ja g) ovat ilmiselviä polynomeille. Lauseen 7.5 kohdan a) nojalla myös ominaisuus e) pätee polynomeille. Kohdan d) toteamiseksi polynomeille, oletetaan, että $Tv = \lambda v$ jollekin $v \in H$. Tällöin

$$\phi(p)v = p(T)v = \sum_{i=0}^n \alpha_i T^i v = \sum_{i=0}^n \alpha_i \lambda^i v = p(\lambda)v.$$

Koska polynomit ovat tiheässä avaruudessa $C(\delta(T))$, saadaan jatkuuden avulla edellä todetut ominaisuudet mielivaltaiselle $f \in C(\delta(T))$ jatkamalla ϕ .

Jäljellä on vielä ehto f). Jos $f \geq 0$, on olemassa reaaliarvoinen $g \in C(\delta(T))$ jolle $f = g^2$. Siten $\phi(f) = \phi(g)^2$, missä $\phi(g)$ on itseadjungoitu. Siispä $\phi(f) \geq 0$. $\square$

Määritelmä 7.10. Olkoon H separoituva Hilbert-avaruus ja $T \in \mathcal{L}(H)$ itseadjungoitu. Vektorille $x \in H$ on olemassa yksikäsitteinen *spektraalimitta* μ_x (joka saadaan Rieszin esityslauseen avulla), jolle pätee

$$(x | f(T)x) = \int_{\delta(T)} f(\lambda) d\mu_x(\lambda)$$

kaikille $f \in C(\delta(T))$.

Spektraalimitan avulla voidaan $f(T)$ laajentaa jatkuvien funktioiden f luokasta Borel-mitallisten luokkaan. Ei kuitenkaan perehdytä tässä siihen, vaan osoitetaan seuraavaksi spektraalilause, joka yleistää äärellisulotteisten avaruuksien itseadjungoitujen lineaarikuvausten tuloksen jonka mukaan tällaisen lineaarikuvauksen ominaisvektorit antavat kannan jossa kuvaus on diagonaalinen.

Lause 7.11 (Spektraalilause). Olkoon H separoituva Hilbert-avaruus ja $T \in \mathcal{L}(H)$ itseadjungoitu. Tällöin on olemassa mitat $\{\mu_n\}_{n=1}^N$, missä $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, joukolla $\delta(T)$, sekä unitaarinen operaattori

$$U: H \rightarrow \bigoplus_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}, d\mu_n)$$

siten, että kaikille $1 \leq n \leq N$,

$$(UTU^{-1}\psi)_n(\lambda) = \lambda\psi_n(\lambda),$$

missä funktio $\psi \in \bigoplus_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}, d\mu_n)$ on kirjoitettu komponenteittain $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$.

Otetaan Lauseen 7.11 todistuksen avuksi pari aputulosta.

Määritelmä 7.12. Hilbert-avaruuden H vektori x on *syklinen* operaattorille $T \in \mathcal{L}(H)$, jos joukon $\{T^n x\}_{n=0}^\infty$ äärellisten lineaarikombinaatioiden joukko on tiheä avaruudessa H .

Lemma 7.13. Olkoon H separoituva Hilbert-avaruus ja $T \in \mathcal{L}(H)$ itseadjungoitu. Olkoon x syklinen operaattorille T . Tällöin on olemassa unitaarinen operaattori $U: H \rightarrow L^2(\delta(T), d\mu_x)$ jolle

$$(UTU^{-1}f)(\lambda) = \lambda f(\lambda).$$

Todistus. Olkoon ϕ Lauseesta 7.9. Määritellään U osalle H :sta asettamalla kaikille $f \in C(\delta(T))$

$$U\phi(f)x = f.$$

Tulee tarkistaa, että näin asetettuna U on hyvin määritelty joukossa $\{\phi(f)x : f \in C(\delta(T))\}$. Tämä nähdään huomaamalla, että

$$\|\phi(f)x\|^2 = (\phi(f)x | \phi(f)x) = (x | \phi^*(f)\phi(f)x) = (x | \phi(\bar{f}f)x) = \int |f(\lambda)|^2 d\mu_x(\lambda).$$

Siten, jos $f = g$ pätee μ_x -melkein kaikkialla, on $\phi(f)x = \phi(g)x$. Siten U on hyvin määritelty.

Koska x on syklinen, on $\{\phi(f)x : f \in C(\delta(T))\}$ tiheä H :ssa. Siten U laajenee yksikäsitteisesti koko avaruuteen H . Lisäksi, koska $C(\delta(T))$ on tiheä $L^2(\delta(T), d\mu_x)$:ssä, on U :n kuva koko $L^2(\delta(T), d\mu_x)$.

Kaikille $f \in C(\delta(T))$ saadaan

$$(UTU^{-1}f)(\lambda) = (UT\phi(f)x)(\lambda) = (U\phi(\text{id})\phi(f)x)(\lambda) = (U\phi(\text{id} \cdot f)x)(\lambda) = (\text{id} \cdot f)(\lambda) = \lambda f(\lambda).$$

Jatkuvuuden nojalla tämä on totta kaikille $f \in L^2$. $\square$

Lemma 7.14. Olkoon H separoituva Hilbert-avaruus ja $T \in \mathcal{L}(H)$ itseadjungoitu. Tällöin H voidaan kirjoittaa suorana summana

$$H = \bigoplus_{n=1}^N H_n,$$

missä $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ja

- a) $Tx \in H_n$ kaikilla $x \in H_n$,
- b) Jokaisella n on olemassa syklinen x operaattorille $T|_{H_n}$.

Todistus. Todistetaan väite käyttäen Zornin lemmaa. (Zornin lemmän käyttöön palataan tarkemmin Banach-avaruuksien kurssilla.) Merkitään

$$S_x = \left\{ \sum_{n=1}^k a_n T^n x \mid k \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{C} \right\}$$

Olkoon $\prec$ osittainen järjestys $A \prec B$ jos ja vain jos $A \subset B$ kaikkien niiden avaruuden H osajoukkojen A luokassa $\mathcal{A}$ joille pätee

$$\text{jos } x, y \in A, x \neq y, \text{ niin } S_x \perp S_y.$$

Relaatio $\prec$ on selvästi osittainen järjestys, ja jokaisella ketjulla K on pienin yläraja $\bigcup_{A \in K} A$.

Olkoon siis A maksimaalinen joukossa $\mathcal{A}$. Oletetaan, että A ei viritä koko avaruutta H . Tällöin on olemassa $x \in H$ siten, että $x \perp S_y$ kaikilla $y \in A$. Osoitetaan, että tällöin $A \cup \{x\} \in$

$\mathcal{A}$. Pitää siis osoittaa, että kaikilla $y \in A$ on $S_x \perp S_y$. Tämä seuraa T :n itseadjungoituvuudesta, sillä kaikille $n \in \mathbb{N}$ saadaan

$$\langle T^n x, \sum_{i=1}^k a_i T^i y \rangle = \langle x, T^n \sum_{i=1}^k a_i T^i y \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^k a_i T^{i+n} y \rangle = 0,$$

joten sisätulon lineaarisuuden perusteella $S_x \perp S_y$. □

Lauseen 7.11 todistus. Lemma 7.14 antaa vaaditun hajotelman ja Lemma 7.13 halutun kuvauksen jokaiselle komponentille. □