

Ex 7.1: Olkoon H Hilbert-avaruus ja $T \in \mathcal{L}(H)$. Osoita, että

$$\delta(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \delta(T)\}.$$

Ex 7.2: Olkoon H Hilbert-avaruus, $T \in \mathcal{L}(H)$ normaali, ja $\lambda \in \delta(T)$. Osoita, että $T - \lambda I$ on normaali.

Ex 7.3: Olkoon H Hilbert-avaruus, $T \in \mathcal{L}(H)$ normaali, ja $\lambda \in \delta(T)$. Osoita, että on olemassa jono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ siten, että

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{kaikille } n \in \mathbb{N}, \quad \|(T - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0 \quad \text{kun } n \rightarrow \infty.$$

Ex 7.4: Olkoon H Hilbert-avaruus ja $T \in \mathcal{L}(H)$ itseadjungoitu. Osoita, että on olemassa kuvaus $\phi : C(\delta(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ siten, että ominaisuudet

- $\phi(pq) = \phi(p)\phi(q)$, $\phi(\lambda p) = \lambda\phi(p)$, $\phi(1) = I$, $\phi(\bar{p}) = \phi(p)^*$,
- $\phi(f) = T$, missä $f : x \mapsto x$,
- $\|\phi(p)\| = \|p\|_\infty$

ovat voimassa kaikille polynomeille p, q ja kaikille $\lambda \in \mathbb{C}$.