

joten yhtälön ratkaisu saadaan Neumannin sarjana

$$f = (I - T)^{-1}g = \sum_{k=0}^{\infty} (T)^k g.$$

Merkitään

$$\text{Inv}(\mathcal{L}(E)) := \{T \in \mathcal{L}(E) : T \text{ kääntyvä}\}.$$

Jos $S, T \in \text{Inv}(\mathcal{L}(E))$, niin yhdistetty kuvaus $ST \in \text{Inv}(\mathcal{L}(E))$ ja $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$. Lisäksi jos $S \in \text{Inv}(\mathcal{L}(E))$, myös $S^{-1} \in \text{Inv}(\mathcal{L}(E))$. Siten $\text{Inv}(\mathcal{L}(E))$ on ryhmä.

Lause 5.8. *Olko E Banach-avaruus. Tällöin*

- (i) *jos $T \in \text{Inv}(\mathcal{L}(E))$ ja $S \in \mathcal{L}(E)$ toteuttaa $\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$, niin tällöin $T - S \in \text{Inv}(\mathcal{L}(E))$.*
- (ii) *Ryhmä $\text{Inv}(\mathcal{L}(E))$ on avoin avaruudessa $(\mathcal{L}(E), \|\cdot\|)$.*

Todistus. Koska $T \in \text{Inv}(\mathcal{L}(E))$, niin $T - S = T(I - T^{-1}S)$, missä oletuksen nojalla $\|T^{-1}S\| \leq \|T^{-1}\| \|S\| < 1$, joten Neumannin sarjan nojalla $I - T^{-1}S \in \text{Inv}(\mathcal{L}(E))$, ja edelleen $T - S \in \text{Inv}(\mathcal{L}(E))$. Tämän perusteella myös $\text{Inv}(\mathcal{L}(E))$ on avoin. $\square$

6. DUAALIIVARUUDET

Jos E on vektoriavaruus jonka skalaarikunta on $\mathbb{K}$, merkitään

$$E^\dagger = L(E, \mathbb{K})$$

tarkoittaa avaruuden *algebrallista duaalia*. Duaalin $E^\dagger$ alkioit ovat avaruuden E lineaarisia muotoja eli *funktionaaleja*. Jatkossa merkitsemme usein $\langle x, f \rangle = f(x)$. Ehto $(x, f) \mapsto \langle x, f \rangle$ määrittelee *kanonisen bilineaarimuodon* $E \times E^\dagger \rightarrow \mathbb{K}$.

Määritelmä 6.1. Jos E on normiavaruus jonka skalaarikuntana on $\mathbb{K}$, niin $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ on avaruuden E (*topologinen*) *duaali*.

Näin siis $E^* \subset E^\dagger$.

Lause 6.2. Jos E on normiavaruus, niin $(E^*, \|\cdot\|)$ on Banach-avaruus.

Todistus. Koska $\mathbb{K}$ on Banach ja $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, seuraa väite Lauseesta 5.4. □

Perusesimerkkinä duaaliavaruudesta otetaan ℓ^p -avaruuksien duaalit.

Lause 6.3. Olkoon $0 < p, q < \infty$ duaalieksponentit (eli $1/p + 1/q = 1$). Tällöin avaruuden $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ duaali on isometrisesti isomorfinen avaruuden $(\ell^q, \|\cdot\|_q)$ kanssa.

Todistus. Merkitään kaikilla $k \in \mathbb{N}$, $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \ell^p$, missä k :s alkio on nolasta poikkeava. Merkitään lisäksi

$$s_n((x_k)) = \sum_{k=1}^n x_k e_k = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots), \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Tällöin $x = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$ avaruudessa ℓ^p .

Jos $x^* \in (\ell^p)^*$, $x = (x_k) \in \ell^p$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin lineaarisuuden perusteella

$$\langle s_n(x), x^* \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \langle e_k, x^* \rangle =: \sum_{k=1}^n x_k y_k,$$

missä siis $y_k = \langle e_k, x^* \rangle$, kun $k \in \mathbb{N}$. Koska x^* on jatkuva, on

$$\langle x, x^* \rangle = \langle \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x), x^* \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle s_n(x), x^* \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Näytetään seuraavaksi, että $(y_k) \in \ell^q$. Määritellään

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{|y_k|^q}{y_k}, & \text{kun } y_k \neq 0 \\ 0, & \text{kun } y_k = 0, \end{cases}$$

ja asetetaan

$$w_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k.$$

Tällöin

$$\|w_n\|_p^p = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^p = \sum_{k=1}^n |y_k|^{p(q-1)} = \sum_{k=1}^n |y_k|^q$$

ja siten

$$\begin{aligned} A &:= \sum_{k=1}^n |y_k|^q = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k = \langle w_n, x^* \rangle = |\langle w_n, x^* \rangle| \\ &\leq \|w_n\|_p \|x^*\| = \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{p}} \|x^*\| = A^{1/p} \|x^*\|. \end{aligned}$$

Kertomalla tämä epäyhtälö puolittain $A^{-1/p}$:llä saadaan

$$\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q} = A^{1/q} = A^{1-1/p} \leq \|x^*\|$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Määritellään tämän perusteella lineaarinen kuvaus

$$T: (\ell^p)^* \rightarrow \ell^q: x^* \mapsto (\langle e_k, x^* \rangle)_{k \in \mathbb{N}}.$$

Osoitimme siis jo, että $\|T\| \leq 1$.

Kääntäen, jos $x = (x_k) \in \ell^p$ ja $y = (y_k) \in \ell^q$, niin Hölderin epäyhtälön mukaan

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/q}.$$

Siten lineaarikuvaus $\Lambda_y: x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ on jatkuva ja siten avaruuden $(\ell^p)^*$ alkio. Lisäksi

$$\|\Lambda_y\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/q} = \|y\|_q.$$

Määritellään siis

$$S: \ell^q \rightarrow (\ell^p)^*: y \mapsto \Lambda_y,$$

jolloin $\|S\| \leq 1$. Kaikille $y \in \ell^q$ on

$$TSy = (\langle e_k, \Lambda_y \rangle)_{k \in \mathbb{N}} = (y_k)_{k \in \mathbb{N}} = y$$

ja kaikille $x^* \in (\ell^p)^*$ on

$$(STx^*)z = (S(\langle e_k, x^* \rangle)_{k \in \mathbb{N}})z = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \langle e_k, x^* \rangle = \langle z, x^* \rangle$$

kaikilla $z \in \ell^p$. Siten S on operaattorin T käänteiskuvaus ja T on isometrinen isomorfismi. $\square$

Lauseen 6.3 vuoksi $(\ell^p)^*$ usein samaistetaan ℓ^q :n kanssa. Koska duaalieksponenttien p ja q asema on symmetrinen, on

$$((\ell^p)^*)^* \cong (\ell^q)^* \cong \ell^p$$

eli ℓ^p on *refleksiivinen* kun $1 < p < \infty$.

Edellisen lauseen kaltaisella päättelyllä voidaan osoittaa, että $c_0^* \cong \ell^1$ ja $(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$. Kuitenkin $(\ell^\infty)^* \not\cong \ell^1$. (Duaali $(\ell^\infty)^*$ voidaan esittää $\mathbb{N}$:n äärellisesti additiivisten mittojen joukkona.)

6.1. Hilbert-avaruuden duaali. Olkoon E Hilbert-avaruus jonka skalaarikunta on $\mathbb{K}$ ja $x \in E$. Olkoon $f_x: E \rightarrow \mathbb{K}$ kuvaus

$$z \mapsto (z | x), \quad z \in E,$$

missä $(\cdot | \cdot)$ on sisätulo $E \times E \rightarrow \mathbb{K}$. Tällöin f_x on lineaarinen sisätulon ominaisuuksien nojalla. Kuvausta $E \rightarrow E^*: x \mapsto f_x$ sanotaan usein kanoniseksi kuvaukseksi.

Lause 6.4 (Fréchet-Rieszin lause). *Jos E on Hilbert-avaruus ja $f_x(z) = (z | x)$ kaikilla $x, z \in E$, niin kuvaus $\Lambda: E \rightarrow E^*: x \mapsto f_x$ on isometrinen bijektio joka on liittolineaarinen (eli additiivinen ja $\Lambda(cx) = \bar{c}\Lambda(x)$ kaikilla $x \in E$ ja $c \in \mathbb{K}$.)*

Todistus. Liittolinearisuuden jälkimmäinen osa seuraa suoraan sisätulon ominaisuuksista:

$$f_{cx}(z) = (z | cx) = \bar{c}(z | x) = \bar{c}f_x(z).$$

Cauchy-Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$|f_x(z)| = |(z | x)| \leq \|z\| \|x\|,$$

joten $f_x \in E^*$ ja $\|f_x\| \leq \|x\|$. Toisaalta, valitsemalla $z = x$ saadaan

$$\|x\|^2 = (x | x) = f_x(x) = |f_x(x)| \leq \|f_x\| \|x\|,$$

joten myös $\|x\| \leq \|f_x\|$. Siis $\|f_x\| = \|x\|$ kaikilla $x \in E$, eli kuvaus Λ on isometria $E \rightarrow E^*$.

Koska jokainen additiivinen isometria on injektio, on väitteestä enää osoittamatta surjektivisuus. Olkoon siis $f \in E^*$ mielivaltainen. Jos $f = \bar{0}$, niin $f(z) = (z | \bar{0})$ jokaisella $z \in E$, eli $f = f_{\bar{0}}$. Voidaan siis olettaa, että $f \neq \bar{0}$. Merkitään

$$M = \text{Ker}(f) = \{z \in E : f(z) = 0\}.$$

Koska f on jatkuva ja $\{0\}$ on suljettu skalaarikunnassa $\mathbb{K}$, on $M = f^{-1}(\{0\})$ avaruuden E suljettu vektorialiavaruus. Lauseen 3.22 nojalla $E = M \oplus M^\perp$, missä ortokomplementti

$$M^\perp = \{x \in E : x \perp z \text{ kaikilla } z \in M\}.$$

Koska $f \neq \bar{0}$, niin $M \neq E$ ja siten $M^\perp \neq \{\bar{0}\}$. Siispä voidaan valita $y \in M^\perp \setminus \{\bar{0}\}$.

Olkoon $z \in E$ mielivaltainen. Havaitaan, että tällöin lineaarisuuden perusteella

$$f(f(z)y - f(y)z) = f(z)f(y) - f(y)f(z) = 0,$$

joten $f(z)y - f(y)z \in \text{Ker}(f) = M$. Koska $y \in M^\perp$, niin

$$0 = (f(z)y - f(y)z | y) = f(z)(y | y) - f(y)(z | y).$$

Koska edellä $(y | y) = \|y\|^2 > 0$, saadaan esitys

$$f(z) = \frac{f(y)}{\|y\|^2}(z | y) = \left(z \left| \frac{\overline{f(y)}}{\|y\|^2} y \right. \right) =: (z | x), \quad \text{kun } z \in E \text{ ja } x = \frac{\overline{f(y)}}{\|y\|^2} y.$$

Siis $f(z) = (z | x) = f_x(z)$ kaikilla $z \in E$, joten $f = f_x = \Lambda x$. Siispä $\Lambda: E \rightarrow E^*$ on surjektio. $\square$

6.2. Transpoosi. Olkoon E ja F normiavaruuksia, joilla on skalaarikuntana $\mathbb{K}$. Olkoon $T \in \mathcal{L}(E, F)$ ja $y^* \in F^*$. Tällöin yhdistetty kuvaus $y^* \circ T \in E^*$. Merkitään

$$T^*(y^*) := y^* \circ T, \quad y^* \in F^*.$$

Tällöin siis

$$(T^*(y^*))(x) = (y^* \circ T)(x) = y^*(Tx)$$

eli

$$\langle x, T^*y^* \rangle = \langle Tx, y^* \rangle$$

kun $x \in E$ ja $y^* \in F^*$.

Määritelmä 6.5. Edellä määriteltä kuvausta $T^*: F^* \rightarrow E^*$ sanotaan operaattorin T (*topologiseksi*) *transpoosiksi* (tai *adjungaatiksi*).

Lause 6.6. Olkoot E ja F normiavaruuksia ja $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Tällöin transpoosi $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ ja $\|T^*\| = \|T\|$.

Todistus. Osoitetaan ensin, että T^* on lineaarinen. Olkoot siis $y^*, z^* \in F^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ja $x \in E$. Tällöin

$$\begin{aligned} \langle x, T^*(\alpha y^* + \beta z^*) \rangle &= \langle Tx, \alpha y^* + \beta z^* \rangle = \alpha \langle Tx, y^* \rangle + \beta \langle Tx, z^* \rangle \\ &= \alpha \langle x, T^*y^* \rangle + \beta \langle x, T^*z^* \rangle = \langle x, \alpha T^*y^* + \beta T^*z^* \rangle. \end{aligned}$$

Siis $T^*(\alpha y^* + \beta z^*) = \alpha T^*y^* + \beta T^*z^*$ eli T^* on lineaarinen.

Osoitetaan seuraavaksi T^* jatkuvaksi. Olkoot $y^* \in F^*$ ja $x \in E$. Tällöin

$$|\langle x, T^*y^* \rangle| = |\langle Tx, y^* \rangle| \leq \|y^*\| \|Tx\| \leq \|T\| \|y^*\| \|x\|,$$

joten

$$\|T^*y^*\| \leq \|T\| \|y^*\|, \quad y^* \in F^*.$$

Siispä $T^*: F^* \rightarrow E^*$ on jatkuva lineaarinen operaattori ja

$$\|T^*\| \leq \|T\|.$$

Toisaalta normin duaalikaavan (Todistetaan Banach-avaruuksien kurssilla) nojalla

$$\|Tx\| = \sup_{\|y^*\| \leq 1} |\langle Tx, y^* \rangle| = \sup_{\|y^*\| \leq 1} |\langle x, T^*y^* \rangle| \leq \sup_{\|y^*\| \leq 1} \|x\| \|T^*y^*\| = \|T^*\| \|x\|$$

kun $x \in E$. Siis $\|T\| \leq \|T^*\|$, joten $\|T^*\| = \|T\|$. □

Esimerkki 6.7. Olkoon $T: \ell^1 \rightarrow c_0$ kuvaus

$$Tx = \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j, \sum_{j=2}^{\infty} x_j, \dots \right), \quad x = (x_j) \in \ell^1.$$

Kuvaus T on selvästi lineaarinen ja kaikille $x \in \ell^1$ on

$$\|Tx\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=n}^{\infty} x_j \right| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=n}^{\infty} |x_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = \|x\|_1,$$

joten T on jatkuva. Määritetään $T^*: c_0^* \rightarrow (\ell^1)^*$. Koska $c_0^* = \ell^1$ ja $(\ell^1)^* = \ell^{\infty}$, niin $T^*: \ell^1 \rightarrow \ell^{\infty}$. Lisäksi, kun $z^* = (z_n) \in \ell^{\infty}$, niin

$$\langle e_k, z^* \rangle = z_k, \quad \text{kun } e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \ell^1 \text{ ja } k \in \mathbb{N}.$$

Olkoon $y^* = (y_k) \in \ell^1$ mielivaltainen. Tällöin jokaisella $k \in \mathbb{N}$ on

$$\langle e_k, T^* y^* \rangle = \langle T e_k, y^* \rangle = \sum_{j=1}^k y_j,$$

sillä $T e_k = (1, 1, \dots, 1, 0, \dots)$. Siis

$$T^* y^* = \left(\sum_{j=1}^n y_j \right)_{n \in \mathbb{N}},$$

kun $y^* = (y_k) \in \ell^1$.

Annetaan vielä pari määritelmää, joihin ei ehdiä kurssilla sen syvällisemmin tutustumaan.

Määritelmä 6.8. Olkoon H Hilbert-avaruus. Operaattori $T \in \mathcal{L}(H)$ on

- *normaali*, jos $TT^* = T^*T$,
- *hermiittinen* eli *itseadjungoitu*, jos $T = T^*$,
- *unitaarinen*, jos $TT^* = T^*T = I$.

7. OPERAATTORIN SPEKTRI

Kappaleen 7 sisällöstä ei tulla kysymään tentissä.

Olkoon H jatkossa kompleksikertoiminen Hilbert-avaruus.

Määritelmä 7.1. Olkoon $T \in \mathcal{L}(H)$. Tällöin T :n *spektri* on

$$\delta(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ ei ole kääntyvä}\}.$$

Joukon $\delta(T)$ alkiot ovat T :n *spektraaliarvoja*, ja $\mathbb{C} \setminus \delta(T)$:n alkiot ovat *säännöllisiä arvoja*.

Operaattorin T *ominaisarvojen* joukko eli *pistespektri* on

$$\delta_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{on olemassa } x \in H \setminus \{\bar{0}\} \text{ s.e. } Tx = \lambda x\}.$$

Vastaavia *ominaisvektoreita* ovat ne $x \in H \setminus \{\bar{0}\}$, joille $Tx = \lambda x$.

Huomautus 1. (i) Operaattorin T ominaisarvot ovat myös spektraaliarvoja. (Harjoitustehtävä)
(ii) $\lambda \in \mathbb{C}$ on spektraaliarvo täsmälleen silloin, kun $T - \lambda I$ ei ole bijektio. (Harjoitustehtävä)

Lause 7.2. Olkoon H Hilbert-avaruus ja $T \in \mathcal{L}(H)$.

- Jos $|\lambda| > \|T\|$, niin $\lambda \notin \delta(T)$
- $\delta(T)$ on kompakti epätyhjä joukko.

Todistus. a) Jos $|\lambda| > \|T\|$, niin $\|\lambda^{-1}T\| < 1$, joten $I - \lambda^{-1}T$ on kääntyvä Lauseen 5.6 nojalla.

b) (Epätyhyyys harjoitustehtävä.) Kohdan a) nojalla riittää osoittaa $\delta(T)$ suljetuksi. Määritellään

$$F: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{L}(H): \lambda \mapsto T - \lambda I.$$

Nyt

$$\|F(\mu) - F(\lambda)\| = \|T - \mu I - (T - \lambda I)\| = |\mu - \lambda|,$$

joten F on jatkuva. Lauseen 5.8 nojalla kääntyvien operaattoreiden joukko $\text{Inv}(\mathcal{L}(H))$ on avoin. Siispä

$$\delta(T) = F^{-1}(\mathcal{L}(H) \setminus \text{Inv}(\mathcal{L}(H)))$$

on suljettu. □

Lemma 7.3. Olkoon H Hilbert-avaruus ja $T \in \mathcal{L}(H)$. Tällöin

$$\delta(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \delta(T)\}.$$

Todistus. (Harjoitustehtävä) □

Esimerkki 7.4. Olkoon $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ siten, että $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$. Tavoitteena on selvittää mitä ovat $\|T\|$, T^* , $\delta_p(T)$ ja $\delta(T)$.

Ensinnäkin

$$\|Tx\| = \|x\|$$

kaikilla $x \in \ell^2$, joten $\|T\| = 1$.

$T^*(y_1, y_2, \dots) = (y_2, y_3, \dots)$. Tämän osoittamiseksi otetaan $y^* = (y_k) \in (\ell^2)^* = \ell^2$, $x = (x_k) \in \ell^2$ ja merkitään $z = (z_k) = T^*y^*$. Adjungaatin määritelmän nojalla

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_i \bar{z}_i = \langle x, T^*y^* \rangle = \langle Tx, y^* \rangle = \sum_{k=2}^{\infty} x_{i-1} \bar{y}_i$$

eli $z_i = y_{i+1}$ kaikilla i .

Tutkitaan seuraavaksi ominaisarvojen joukkoa $\delta_p(T)$. Olkoon siis $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ siten, että $Tx = \lambda x$. Tällöin siis

$$(0, x_1, x_2, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots),$$

joten $x_1 = \frac{0}{\lambda} = 0$, $x_2 = \frac{x_1}{\lambda} = 0$, ja niin edelleen. Siten T :llä ei ole ominaisarvoja, eli $\delta_p(T) = \emptyset$.

Tutkitaan lopuksi spektriä $\delta(T)$. Osoitetaan, että

$$\delta(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}.$$

Osoitetaan tämä Lemman 7.3 avulla. Olkoon siis $|\lambda| < 1$. Etsitään $y \in \ell^2$ siten, että $T^*y = \lambda y$, eli

$$(y_2, y_3, \dots) = (\lambda y_1, \lambda y_2, \dots).$$

Tälle yhtälölle eräs ratkaisu on

$$y = (1, \lambda, \lambda^2, \dots),$$

jolloin $y \in \ell^2$ sillä

$$\|y\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda^{i-1}|^2 < \infty.$$

Siispä $\lambda \in \delta_p(T^*) \subset \delta(T^*)$. Koska

$$\{\bar{\lambda} \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\},$$

on Lemman 7.3 nojalla

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \subset \delta(T).$$

Koska Lauseen 7.2 nojalla $\delta(T)$ on suljettu, on

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\} = \overline{\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}} \subset \delta(T).$$

Toisaalta $\|S\| = 1$, joten Lauseen 7.2 nojalla $\lambda \notin \delta(T)$ jos $\lambda > 1$.

Lause 7.5. Olkoon H Hilbert-avaruus ja $T \in \mathcal{L}(H)$. Tällöin

- a) Jos p on polynomi, niin $\delta(p(T)) = \{p(\mu) : \mu \in \delta(T)\}$.
- b) Jos T on kääntyvä, niin $\delta(T^{-1}) = \{\mu^{-1} : \mu \in \delta(T)\}$.