

#### 4. FOURIER-SARJAT

Tutkitaan seuraavaksi tarkemmin Esimerkissä 3.24 (2) esiteltyä avaruuden  $L^2([0, 2\pi])$  ortonormaalia jonoa  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , missä

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\cos(nt) + i \sin(nt)), \quad n \in \mathbb{Z}, t \in [0, 2\pi].$$

Määritellään  $f$ :n  $n$ :s Fourier-kerroin kaavalla

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f | e_n).$$

(Huomaa, että tässä määritelty Fourier-kerroin  $\widehat{f}(n)$  poikkeaa Määritelmän 3.26 Fourier kertoimesta vakiokertoimen  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  verran.)

**Esimerkki 4.1.** Olkoon  $f$  trigonometrinen polynomi eli muotoa

$$f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-N}^N c_n e_n(x),$$

missä  $c_n \in \mathbb{C}$  ja  $N \in \mathbb{N}$ . Tällöin funktion  $f$  Fourier-kertoimet ovat

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f | e_n) = \sum_{k=-N}^N c_n (e_n | e_k) = \begin{cases} c_n, & \text{jos } -N \leq n \leq N \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Määritellään funktiolle  $f \in L^2([0, 2\pi])$  sen  $n$ :s Fourier-osasumma

$$s_n(f; x) := \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Huomaa, että Fourier-osasumma  $s_n(f; x)$  on jatkuva  $x$ :n trigonometrinen polynomi ja siten jatkuva  $x$ :n suhteen.

**Lemma 4.2.** *Fourier-osasummilla  $s_n(f; \cdot)$  on integraaliesitys*

$$s_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} f(t) D_n(x - t) dt,$$

missä

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}$$

on  $n$ :s Dirichlet'n ydin.

*Todistus.* Suoraan Fourier-kertoimen  $\widehat{f}(n)$  määritelmästä saadaan

$$\begin{aligned} s_n(f; x) &= \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n \left( \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} f(t) \left( \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} dt \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} f(t) D_n(x - t) dt. \end{aligned}$$

Väitteen esitys summalle sini-funktioiden avulla saadaan geometrisen sarjan summakaavan ja Eulerin kaavan  $e^{iu} - e^{-iu} = 2i \sin u$  avulla

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} = e^{-inx} \frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{-inx} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{e^{-ix/2} e^{-inx} - e^{i(n+1)x}}{e^{-ix/2} (1 - e^{ix})} = \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})x} - e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}. \end{aligned}$$

□

Dirichlet'n ytimien aritmeettista keskiarvoa

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x), \quad x \in [0, 2\pi]$$

kutsutaan *Fejérin ytimeksi*. Tämä käyttäytyy paremmin kuin Dirichlet'n ydin.

**Lemma 4.3.** (i) Kaikilla  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  on voimassa

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_n(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(x) dx = 1,$$

(ii)  $K_n(x) \geq 0$  kaikilla  $x \in [0, 2\pi]$ , ja lisäksi kaikilla  $0 < \delta \leq x \leq 2\pi - \delta$  on

$$K_n(x) \leq \frac{2}{(n+1)(1 - \cos \delta)}.$$

*Todistus.* (i) Koska

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} dt = \begin{cases} 1, & \text{kun } n = 0 \\ 0, & \text{kun } n \neq 0, \end{cases}$$

on

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(x) dx = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = 1$$

kaikilla  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Sama pätee myös näiden aritmeettisille keskiarvoille  $K_n$ .

(ii) Lemman 4.2 todistuksessa huomasimme, että

$$D_n(x) = \frac{e^{-inx} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}.$$

Siten

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{e^{-ikx} - e^{i(k+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{\sum_{k=0}^n e^{-ikx} - \sum_{k=0}^n e^{i(k+1)x}}{(n+1)(1 - e^{ix})} \\ &= \frac{\frac{1 - e^{-i(n+1)x}}{1 - e^{-ix}} - \frac{e^{ix} - e^{i(n+2)x}}{1 - e^{ix}}}{(n+1)(1 - e^{ix})} = \frac{(1 - e^{-i(n+1)x}) - (e^{ix} - e^{i(n+2)x})}{(n+1)(1 - e^{-ix})(1 - e^{ix})} = \frac{1 - \cos((n+1)x)}{(n+1)(1 - \cos x)}. \end{aligned}$$

Erityisesti  $K_n(x) \geq 0$  kaikilla  $x \in [0, 2\pi]$  ja kaikilla  $0 < \delta \leq x \leq 2\pi - \delta$  on

$$K_n(x) \leq \frac{2}{(n+1)(1 - \cos \delta)}.$$

□

Tutkitaan seuraavaksi Fejérin ytimen käyttäytymistä konvoluutiossa. Määritellään (tässä) konvoluutio

$$(g * f)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t) dt$$

kaikille jatkuville  $2\pi$ -periodisille kuvauksille  $f, g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ . Muuttujanvaihdoilla nähdään, että

$$g * f = f * g.$$

**Lause 4.4** (Fejérin lause). *Olko  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  jatkuva,  $f(0) = f(2\pi)$ . Tällöin*

$$\|K_n * f - f\|_\infty \rightarrow 0, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty.$$

*Todistus.* Oletuksen  $f(0) = f(2\pi)$  nojalla  $f$  voidaan jatkaa  $2\pi$ -periodisena funktiona koko reaalityökalujen joukkoon. Lisäksi funktiot  $K_n$  ovat  $2\pi$ -periodisia.

Olko  $\epsilon > 0$ . Koska  $f$  on tasaisesti jatkuva, on olemassa  $\delta > 0$  siten, että

$$|u| < \delta \implies |f(x+u) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \text{ kaikilla } x \in [0, 2\pi].$$

Merkitään  $M = \|f\|_\infty$ . Lemman 4.3 (ii) nojalla on olemassa  $n_0 \in \mathbb{N}$  siten, että

$$0 \leq K_n(u) < \frac{\epsilon}{4M}$$

kaikilla  $\delta \leq u \leq 2\pi - \delta$  ja  $n \geq n_0$ . Nyt Lemman 4.3 (i) ja  $2\pi$ -periodisuuden nojalla

$$\begin{aligned} |(K_n * f)(x) - f(x)| &= |(f * K_n)(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x+u) - f(x))K_n(u) du \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+u) - f(x)|K_n(u) du \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\epsilon}{2} K_n(u) du + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} 2M K_n(u) du \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_n(u) du + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} 2M \frac{\epsilon}{4M} du \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

ja siten väite on todistettu.  $\square$

**Seuraus 4.5.** *Jos  $f \in C([0, 2\pi])$  on  $2\pi$ -periodinen ja jos  $\hat{f}(k) = 0$  kaikilla  $k \in \mathbb{Z}$ , niin  $f \equiv 0$ .*

*Todistus.* Lemmojen 4.2 ja 4.3, sekä integraalin lineaarisuuden nojalla

$$(K_n * f)(x) = \left( \left( \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k \right) * f \right)(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (D_k * f)(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k(f; x)$$

kun  $x \in [0, 2\pi]$  ja  $n \in \mathbb{N}$ . Koska oletuksen nojalla  $\hat{f}(k) = 0$  kaikilla  $k \in \mathbb{Z}$ , on  $K_n * f \equiv 0$  kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ . Siten Lauseen 4.4 nojalla  $f \equiv 0$ .  $\square$

Olemme siis osoittaneet, että jatkuvien kuvausten tapauksessa Fourier-kertoimet määräävät yksikäsitteisesti kuvauksen. Toisin sanoen Fourier-kertoimien määritelmässä käytetyt trigonometriset funktiot virittävät ainakin jatkuvien  $2\pi$ -periodisten kuvausten joukon. Osoitetaan seuraavaksi, että jatkuvat  $2\pi$ -periodiset kuvaukset ovat tiheässä avaruudessa  $L^p([0, 2\pi])$ , jonka seurauksena ne virittävät myös kyseisen avaruuden.

**Lause 4.6.** *Olko  $f \in L^p([0, 2\pi])$ , missä  $1 \leq p < \infty$ , ja  $\epsilon > 0$ . Tällöin on olemassa  $2\pi$ -periodinen  $C^\infty$ -funktio  $g$ , jolle  $\|f - g\|_p < \epsilon$ .*

*Todistus.* Jos  $g \in C([0, 2\pi])$  on  $2\pi$ -periodinen, niin Lauseen 4.4 nojalla  $\|K_n * g - g\|_\infty \rightarrow 0$  kun  $n \rightarrow \infty$ . Siten myös  $\|K_n * g - g\|_p \rightarrow 0$  kun  $n \rightarrow \infty$ . Toisaalta  $K_n * g$  on  $2\pi$ -periodinen  $C^\infty$ -funktio. Siten riittää löytää  $f$ :ää approksimoiva  $2\pi$ -periodinen  $g \in C([0, 2\pi])$ .

(Hyvin samanlainen todistus oli Harjoituksissa 2, Tehtävässä 3.)

Olkoon ensin  $f = \chi_F$  suljetun joukon  $F \subset [0, 2\pi]$  karakteristinen funktio. Asetetaan

$$g_n(x) = \frac{1 - n \operatorname{dist}(x, [\frac{1}{n}, 2\pi - \frac{1}{n}])}{1 + n \operatorname{dist}(x, F)}, \quad \text{kun } x \in [0, 2\pi] \text{ ja } n \in \mathbb{N}.$$

Tällöin  $g_n$  on jatkuva ja  $2\pi$ -periodinen. Lisäksi  $g_n \rightarrow \chi_{F \cap (0, 2\pi)}$  pisteittäin. Siten Lebesguen dominoidun suppenemisen perusteella

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - \chi_F\|_p^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |g_n(x) - \chi_F(x)|^p = \int_0^{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} |g_n(x) - \chi_F(x)|^p = 0.$$

Jos  $A \subset [0, 2\pi]$  on avoin, on  $A^c$  suljettu ja approksimoiva funktio saadaan edellisen kohdan avulla.

Olkoon seuraavaksi  $E \subset [0, 2\pi]$  Lebesgue-mitallinen ja  $\epsilon > 0$ . Tällöin on olemassa avoin joukko  $A \subset [0, 2\pi]$  siten, että  $E \subset A$  ja  $\mu(A \setminus E) < (\frac{\epsilon}{2})^p$ . Olkoon  $g \in C([0, 2\pi])$  sellainen  $2\pi$ -periodinen funktio, jolle  $\|g - \chi_A\|_p < \frac{\epsilon}{2}$ . Siten

$$\|g - \chi_E\|_p \leq \|g - \chi_A\|_p + \|\chi_A - \chi_E\|_p \leq \frac{\epsilon}{2} + \mu(A \setminus E)^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Olkoon lopulta  $f \in L^p([0, 2\pi])$  mielivaltainen. Tällöin on yksinkertainen mitallinen funktio

$$g = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j},$$

jolle  $\|f - g\|_p < \epsilon$ , missä  $E_1, \dots, E_n \subset [0, 2\pi]$  ovat mitallisia ja  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ . Merkitään  $M = \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$ . Jokaiselle  $i$  on olemassa  $2\pi$ -periodinen  $g_i \in C([0, 2\pi])$  siten, että

$$\|\chi_{E_i} - g_i\|_p < \frac{\epsilon}{nM}.$$

Nyt kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{j=1}^n a_j g_j \right\|_p &\leq \|f - g\|_p + \left\| \sum_{j=1}^n a_j (\chi_{E_j} - g_j) \right\|_p \\ &\leq \epsilon + \sum_{j=1}^n |a_j| \|\chi_{E_j} - g_j\|_p \leq \epsilon + \sum_{j=1}^n M \frac{\epsilon}{nM} = 2\epsilon. \end{aligned}$$

□

**Seuraus 4.7.** Jono  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  on Hilbertin kanta avaruudessa  $L^2([0, 2\pi])$ , missä

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad x \in [0, 2\pi], n \in \mathbb{Z}.$$

*Todistus.* Olkoot  $f \in L^2([0, 2\pi])$  ja  $\epsilon > 0$ . Olkoon  $2\pi$ -periodinen  $g \in C([0, 2\pi])$  siten, että  $\|f - g\|_2 < \epsilon$ . Fejérin lauseen nojalla  $\|g - K_n * g\|_2 < \epsilon$ , kun  $n \in \mathbb{N}$  on tarpeeksi iso. Toisaalta

$$K_n * g = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k(g; \cdot) = \sum_{k=-n}^n a_k e_k$$

joillakin  $a_k \in \mathbb{C}$ . Siten Lauseen 3.19 nojalla

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^n (f | e_k) e_k \right\|_2 \leq \left\| f - \sum_{k=-n}^n a_k e_k \right\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - K_n * g\|_2 < 2\epsilon$$

Siten Lauseen 3.32 kohdan c) perusteella  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  on Hilbertin kanta.  $\square$

Koska nyt tiedämme  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  olevan kanta Hilbert-avaruudessa  $L^2([0, 2\pi])$ , saadaan Lauseen 3.32 perusteella esimerkiksi

- Parsevalin identiteetistä kaikille  $f \in L^2([0, 2\pi])$

$$\frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2,$$

koska  $\widehat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f | e_n)$ .

- Plancherelin kaavasta kaikille  $f, g \in L^2([0, 2\pi])$

$$\frac{1}{2\pi} (f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \overline{g(s)} ds = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)}.$$

Fejérin lauseen nojalla Fejérin ytimillä siloittamalla lähestymme tasaisesti jatkuvia  $2\pi$ -periodisia kuvauksia. Avoimeksi jäi vielä kuinka hyvin itse Fourier-osasummat approksimoivat jatkuvia funktioita. Seuraava lause antaa hieman lisätietoa tästä.

**Lause 4.8.** Jos  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on  $2\pi$ -periodinen ja on olemassa  $L \in \mathbb{R}$  siten, että

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{kaikilla } x, y \in \mathbb{R}$$

(eli jos  $f$  on Lipschitz-kuvaus), niin funktion  $f$  Fourier-osasummille

$$s_n(f; x) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx} \rightarrow f(x), \quad \text{kun } n \rightarrow \infty,$$

kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ .

*Todistus.* (Ei vaikea, muttei todisteta tässä.)  $\square$

## 5. LINEAARISET OPERAATTORIT

Palataan nyt takaisin lineaaristen operaattoreiden ja erityisesti niiden muodostamien vektoriavaruuksien tutkimiseen. Muistutuksena kuvausta  $T: E \rightarrow F$  sanotaan lineaariseksi, jos

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty \quad \text{kaikilla } x, y \in E \text{ ja } \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Aikaisemmin huomasimme, että lineaarikuvauksia on jatkuva jos ja vain jos sen operaattorinormi  $\|T\|$  on äärellinen, missä

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F.$$

Merkitään nyt

$$L(E, F) = \{T: E \rightarrow F \mid T \text{ on lineaarikuvauksia}\},$$

$$\mathcal{L}(E, F) = \{T: E \rightarrow F \mid T \text{ on jatkuva lineaarikuvauksia}\},$$

ja tapauksessa  $E = F$  merkitsemme  $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ . Ensimmäinen huomio on, että jatkuvat lineaarikuvaukset varustettuna operaattorinormilla muodostavat normiavaruuden.

**Lause 5.1.** *Olko  $E$  ja  $F$  normiavaruuksia joiden kerroinkunta on  $\mathbb{K}$ . Tällöin  $\mathcal{L}(E, F)$  on  $\mathbb{K}$ -kertoiminen normiavaruus, jossa normina on operaattorinormi.*

*Todistus.* Summaoperaattori määritellään pisteittäin

$$(S + T)(x) = Sx + Tx, \quad \text{kaikilla } x \in E, S, T \in L(E, F)$$

kuten myös skalaarilla kertominen

$$(\lambda T)x = \lambda(Tx) \quad \text{kaikilla } x \in E, T \in L(E, F), \lambda \in \mathbb{K}.$$

Kumpikin operaatio on suljettu  $L(E, F)$ :ssä (harjoitustehtävä).

Osoitetaan seuraavaksi, että  $\|\cdot\|$  on normi  $\mathcal{L}(E, F)$ :ssä. Tästä seuraa erityisesti, että  $\mathcal{L}(E, F)$  on myös suljettu yhteenlaskun ja skalaarilla kertomisen suhteen. Olkoon siis  $S, T \in \mathcal{L}(E, F)$  ja  $x \in E$  siten, että  $\|x\|_E \leq 1$ . Tällöin

$$\|(S + T)x\|_F = \|Tx + Sx\|_F \leq \|Sx\|_F + \|Tx\|_F \leq \|S\| + \|T\|,$$

ja kolmioepäyhtälö on siten voimassa. Olkoon lisäksi  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Tällöin

$$\|(\lambda T)x\|_F = \|\lambda Tx\|_F = |\lambda| \|Tx\|_F,$$

joten normin ehto (N2) on myös voimassa. Ehdon (N3) osoittamiseksi oletetaan, että  $\|T\| = 0$ . Tällöin  $\|Tx\|_F = 0$  kaikilla  $x \in E$ , joten  $T = \bar{0}$ . Siispä  $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$  on normiavaruus.  $\square$

Seuraavana tavoitteena on selvittää milloin  $\mathcal{L}(E, F)$  on Banach-avaruus. Avaruuden  $\mathcal{L}(E, F)$  jonon  $(T_n)$  suppenemista tutkitaan luonnollisesti operaattorinormin  $\|\cdot\|$  mielessä eli  $T_n \rightarrow T \in \mathcal{L}(E, F)$ , jos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0.$$

Heikompiin suppeneminen riittää lineaarisuuden säilymiseen. Sanomme, että  $f_n \rightarrow f$  pisteittäin, jos  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ . (Operaattorinormissa suppenemisestä selvästi seuraa pisteittäinen suppeneminen, mutta käänteinen ei ole totta.)

**Lause 5.2.** *Olko  $E$  ja  $F$  normiavaruuksia ja  $(T_n)$  jono lineaarikuvauksia  $L(E, F)$ :ssä joka suppenee pisteittäin kohti kuvausta  $T: E \rightarrow F$ . Tällöin  $T$  on lineaarinen.*

*Todistus.* Suoraan kuvausten  $T_n$  lineaarisuudesta

$$T(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha T_n x + \beta T_n y) = \alpha T x + \beta T y.$$

□

Pisteittäinen suppeneminen ei kuitenkaan riitä aina jatkuvuuden säilymiseen.

**Esimerkki 5.3.** Olkoon avaruutena

$$\mathcal{P} = \{p : p \text{ on } \mathbb{R}\text{-kertoiminen polynomi}\}$$

ja normina  $\|p\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |p(t)|$ . Määritellään jokaisella  $n \in \mathbb{N}$  lineaarinen kuvaus

$$T_n : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto n(p(1) - p(1 - 1/n)).$$

Tällöin  $T_n \in \mathcal{L}(\mathcal{P}, \mathbb{R})$ , koska

$$\|T_n p\| \leq |np(1)| + n|p(1 - 1/n)| \leq 2n\|p\|_\infty.$$

Toisaalta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(1) - p(1 - 1/n)}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(1 - 1/n) - p(1)}{-1/n} = p'(1),$$

joten jono  $(T_n)$  suppenee pisteittäin kohti kuvausta  $T : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto p'(1)$ . Kuvaus  $T$  ei kuitenkaan ole jatkuva: jos  $p_n(t) = t^n$ , on

$$\|p_n\|_\infty = 1 \text{ ja } |T p_n| = |p'_n(1)| = n, \text{ joten } \|T\| \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} |T p_n| = \infty.$$

**Lause 5.4.** Jos  $E$  on normiavaruus ja  $F$  Banach-avaruus, niin  $\mathcal{L}(E, F)$  varustettuna operaattorinormilla  $\|\cdot\|$  on Banach-avaruus.

*Todistus.* Olkoon  $(T_n)$  Cauchy-jono avaruudessa  $\mathcal{L}(E, F)$  ja  $x \in E$ . Tällöin

$$\|T_n x - T_m x\|_F = \|(T_n - T_m)x\|_F \leq \|T_n - T_m\| \|x\|_E,$$

joten  $(T_n x)$  on Cauchy-jono avaruudessa  $F$ . Koska  $F$  on täydellinen, suppenee jono  $(T_n x)$ . Merkitään tätä rajaa  $T x$ . Lauseen 5.2 nojalla  $T : E \rightarrow F$  on lineaarinen kuvaus.

Vielä tulee osoittaa, että  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  ja  $\|T - T_n\| \rightarrow 0$ , kun  $n \rightarrow \infty$ . Olkoon  $\epsilon > 0$ . Koska  $(T_n)$  on Cauchy-jono avaruudessa  $\mathcal{L}(E, F)$ , on olemassa sellainen  $n_0 \in \mathbb{N}$ , että aina kun  $n, m \geq n_0$ , niin  $\|T_n - T_m\| \leq \epsilon$ . Jos  $x \in E$  ja  $\|x\| \leq 1$ , on

$$\|T_n x - T_m x\|_F \leq \epsilon \quad \text{kun } n, m \geq n_0.$$

Siten

$$\|(T_n - T)x\|_F = \|T_n x - T x\|_F = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_n x - T_m x\|_F \leq \epsilon,$$

eli  $T_n - T$  on jatkuva. Edelleen  $T = T_n - (T_n - T)$  on siten jatkuva. Edellisen arvion mukaan myös  $\|T_n - T\| \leq \epsilon$ , joten  $(T_n)$  suppenee kohti  $T$ :tä avaruudessa  $\mathcal{L}(E, F)$ , ja  $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$  on täydellinen. □

Operaattorien avaruudessa on myös algebrallista rakennetta, sillä voimme määritellä sinne operaattoritulon yhdistettynä kuvauksena: Olkoon  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  ja  $S \in \mathcal{L}(F, G)$ . Tällöin määritellään  $ST := S \circ T$ .

**Lause 5.5.** Olkoot  $E, F$  ja  $G$  normiavaruuksia sekä  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  ja  $S \in \mathcal{L}(F, G)$ . Tällöin  $ST \in \mathcal{L}(E, G)$  ja

$$\|ST\| \leq \|S\| \|T\|.$$

*Todistus.* Olkoot  $x, y \in E$  ja  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ . Tällöin

$$ST(\alpha x + \beta y) = S(\alpha Tx + \beta Ty) = \alpha STx + \beta STy,$$

joten  $ST \in L(E, G)$ . Jos  $x \in E$  siten, että  $\|x\| \leq 1$ , on

$$\|STx\|_G = \|S(Tx)\|_G \leq \|S\| \|Tx\|_F \leq \|S\| \|T\|.$$

□

**5.1. Neumannin sarja.** Jos  $E$  on Banach-avaruus,  $T \in \mathcal{L}(E)$  ja on olemassa jatkuva käänteiskuvaus  $T^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ , sanomme kuvausta  $T$  *kääntyväksi*. Merkitään jatkossa identtistä kuvausta

$$I = \text{id}_E: E \rightarrow E: x \mapsto x$$

ja operaattorin  $T$  iteraatteja  $T^0 = I$ ,  $T^2 = T \circ T$ ,  $T^k = T \circ T \circ \cdots \circ T$  ( $k$  kappaletta).

**Lause 5.6** (Neumannin sarja). *Olkoon  $E$  Banach-avaruus ja  $T \in \mathcal{L}(E)$ . Jos  $\|T\| < 1$ , niin operaattori  $I - T$  on kääntyvä ja*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k,$$

*missä kyseinen sarja suppenee itseisesti.*

*Todistus.* Lauseen 5.5 nojalla  $\|T^k\| \leq \|T\|^k$  kaikilla  $k \in \mathbb{N}$ , joten

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k < \infty,$$

sillä  $\|T\| < 1$ . Koska  $\mathcal{L}(E)$  on Banach-avaruus Lauseen 5.4 nojalla, suppenee sarja

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n T^k \in \mathcal{L}(E)$$

Lauseen 2.18 nojalla. Tarkastellaan seuraavaksi osasummia  $S_n$ . Koska

$$(I - T)S_n = I + T + \cdots + T^n - (T + T^2 + \cdots + T^{n+1}) = I - T^{n+1} = S_n(I - T),$$

niin

$$\|(I - T)S_n - I\| \leq \|T^{n+1}\| \rightarrow 0, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty$$

eli  $(I - T)S = I$  ja vastaavasti  $S(I - T) = I$ . Siten  $I - T$  on bijektio ja  $S$  on operaattorin  $I - T$  käänteisoperaattori. □

**Esimerkki 5.7.** Palataan jälleen johdannossa esitettyyn integraaliyhtälöön

$$f(x) - \int_0^1 K(x, t)f(t) dt = g(x), \quad x \in [0, 1],$$

missä  $g \in C([0, 1])$ ,  $K \in C([0, 1]^2)$  ja  $\|K\|_{\infty} < 1$ . Banachin kiintopistelausetta käyttäen tälle löydettiin jo yksikäsitteinen ratkaisu Esimerkissä 2.33. Osoitetaan nyt sama käyttäen Neumannin sarjaa. Asetetaan

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x, t)f(t) dt, \quad x \in [0, 1], f \in C([0, 1]).$$

Aikaisemmin jo osoitettiin, että  $T \in \mathcal{L}(C([0, 1]))$  ja  $\|T\| \leq \|K\|_{\infty} < 1$ . Sovelletaan nyt Neumannin sarjaa operaattoriin  $T$ . Integraaliyhtälö on nyt muotoa

$$(I - T)f = g,$$