

**Harjoitus 5****deadline: 16.2.2026, klo 14:00**

**Ex 5.1:** Määritellään kaikille jatkuville  $2\pi$ -periodisille kuvauksille  $f, g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  konvoluutio

$$(g \star f)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt.$$

Osoita, että yhtälö  $g \star f = f \star g$  on voimassa.

**Ex 5.2:** Olkoon  $D_n(x)$   $n$ :s Dirichletin ydin. Osoita, että

$$D_n(x) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}.$$

**Ex 5.3:** Olkoot  $f, g \in C([0, 2\pi])$   $2\pi$ -periodisia. Osoita, että kaikille  $k \in \mathbb{Z}$  on

$$\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k).$$

**Ex 5.4:** Olkoon  $E$  Banach-avaruus. Merkitään

$$\text{Inv}(\mathcal{L}(E)) := \{T \in \mathcal{L}(E) : T \text{ on kääntyvä}\}.$$

Osoita, että

- $\text{Inv}(\mathcal{L}(E))$  on ryhmä, ja
- $\text{Inv}(\mathcal{L}(E))$  on avoin avaruudessa  $(\mathcal{L}(E), \|\cdot\|)$ .

[vihje: osoita ensin, että jos  $T \in \text{Inv}(\mathcal{L}(E))$  ja  $S \in \mathcal{L}(E)$  toteuttaa  $\|S\| < \frac{1}{\|T\|}$ , niin tällöin  $T - S \in \text{Inv}(\mathcal{L}(E))$  Neumannin sarjan nojalla]