

Ex 4.1: Osoita, että

$$(x|y) := \int_0^{2\pi} x(t)\overline{y(t)}d\mu(t)$$

on sisätulo avaruudessa $L^2([0, 2\pi])$. Lisäksi osoita, että jono $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, missä

$$x_n(t) := \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

on ortonormaali jono avaruudessa $L^2([0, 2\pi])$.

Ex 4.2: Olkoot E Hilbert-avaruus ja $A \subset E$ sen osajoukko. Osoita, että $(\overline{A})^\perp = A^\perp$.

Ex 4.3: Olkoon E Hilbert-avaruus jossa on numeroituva Hilbertin kanta. Osoita, että E on separoituva.

Ex 4.4: Olkoon M Hilbert-avaruuden E suljettu vektorialiavaruus. Osoita, että orto-projektio $P_M: E \rightarrow E$ on lineaarinen kuvaus.