

Määritelmä 3.16. Vektoriavaruuden osajoukko $A \subset E$ on *konvekksi*, jos kaikilla $x, y \in A$ ja $t \in [0, 1]$ on $(1-t)x + ty \in A$, eli jos kaikkien joukon A pisteparien välinen jana kuuluu joukkoon A .

Lause 3.17. Jos E on Hilbert -avaruus ja $A \subset E$ konvekksi ja suljettu, on olemassa täsmälleen yksi $x_0 \in A$ joka minimoi normin A :ssa eli

$$\|x_0\| \leq \|x\| \quad \text{kaikilla } x \in A.$$

Todistus. Olkoon $\delta = \inf\{\|x\| : x \in A\}$. Jos $x, y \in A$ siten, että $\|x\| = \|y\| = \delta$, on suunnikasyhtälön nojalla

$$\|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 = 4\delta^2 - 4\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \leq 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0,$$

sillä A :n konveksisuuden nojalla myös $\frac{x+y}{2} \in A$. Siten $x = y$ eli jos minimoija on, se on yksikäsitteinen.

Olemassaolon todistamiseksi otetaan jono $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A$ siten, että $\|x_n\| \rightarrow \delta$ kun $n \rightarrow \infty$. Kuten edellä, on A :n konveksisuuden ja suunnikasyhtälön nojalla

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4\delta^2 \rightarrow 0, \quad \text{kun } n, m \rightarrow \infty.$$

Siispä (x_n) on Cauchy-jono täydellisessä metrisessä avaruudessa A . Siten on olemassa $x_0 \in A$ siten, että $x_n \rightarrow x_0$. Koska normi on jatkuva, on

$$\|x_0\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \delta.$$

□

Lause 3.18. Olkoot E Hilbert-avaruus, $A \subset E$ suljettu, konvekksi ja epätyhjä, $x \in E$ ja $y \in A$. Tällöin

$$\|x - y\| = \text{dist}(x, A) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Re}(x - y | z - y) \leq 0 \quad \text{kaikilla } z \in A.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $\|x - y\| = \text{dist}(x, A)$. Jos $z \in A$ ja $0 < t < 1$, niin konveksisuuden nojalla

$$y + t(z - y) = (1 - t)y + tz \in A.$$

Siispä

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &\leq \|x - y - t(z - y)\|^2 = (x - y - t(z - y) | x - y - t(z - y)) \\ &= \|x - y\|^2 - t(x - y | z - y) - t(z - y | x - y) + t^2\|z - y\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 - 2t\text{Re}(x - y | z - y) + t^2\|z - y\|^2. \end{aligned}$$

Siten

$$\text{Re}(x - y | z - y) \leq \frac{t}{2}\|z - y\|^2 \rightarrow 0, \quad \text{kun } t \rightarrow 0.$$

Kääntäen, oletetaan, että $\text{Re}(x - y | z - y) \leq 0$ kaikilla $z \in A$. Tällöin

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 &= \|x - y - (z - y)\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 - 2\text{Re}(x - y | z - y) + \|z - y\|^2 \geq \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

kaikilla $z \in A$, eli $\|x - y\| = \text{dist}(x, A)$.

□

3.1. Ortogonaaliset projektiot. Käytetään seuraavaksi edellistä minimointilausetta 3.18 erikoistapaukseen, jossa A on suljettu vektorialiavaruus.

Lause 3.19. *Olkoon E Hilbert-avaruus ja M sen suljettu vektorialiavaruus. Jos $x \in E$ ja $y \in M$, niin*

$$\|x - y\| = \text{dist}(x, M) \iff (x - y) \perp M.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $\|x - y\| = \text{dist}(x, M)$. Jos $z \in M$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, on myös $y + \lambda z \in M$, koska M on vektorialiavaruus. Siten Lauseen 3.18 nojalla

$$0 \geq \text{Re}((x - y | (y + \lambda z) - y)) = \text{Re}(\bar{\lambda}(x - y | z))$$

kaikilla $\lambda \in \mathbb{K}$. Valitsemalla $\lambda = (x - y | z)$ saadaan

$$0 \geq |(x - y | z)|^2$$

eli $(x - y | z) = 0$ kaikilla $z \in M$. Toisin sanoen $(x - y) \perp M$.

Kääntäen, oletetaan, että $(x - y) \perp M$. Jos $z \in M$, niin $z - y \in M$ ja siten

$$0 = (x - y | z - y) = \text{Re}(x - y | z - y) \quad \text{kaikilla } z \in M.$$

Lauseen 3.18 nojalla on siten $\|x - y\| = \text{dist}(x, M)$. □

Määritelmä 3.20. *Olkoon M Hilbert-avaruuden E suljettu vektorialiavaruus. Tällöin kuvausta $P_M: E \rightarrow M$,*

$$P_M x = y \quad \text{jos ja vain jos } \|x - y\| = \text{dist}(x, M),$$

kutsutaan avaruuden E *ortoprojektiksi* vektorialiavaruudelle M .

Lauseen 3.17 nojalla ortoprojektio on hyvin määritelty. Lauseen 3.19 nojalla ortoprojektion määrittelee myös yksikäsitteisesti

$$P_M x \in M \quad \text{ja} \quad x - P_M x \perp M.$$

Siten jokaisella vektorilla $x \in E$ on yksikäsitteinen esitys muodossa

$$x = y + z, \quad \text{missä } y \in M \text{ ja } z \in M^\perp.$$

Lause 3.21. *Olkoon M Hilbert-avaruuden E suljettu vektorialiavaruus. Tällöin ortoprojektio $P_M: E \rightarrow E$ on lineaarinen kuvaus.*

Todistus. (Harjoitustehtävä) □

Ortoprojektiota yleisempi käsite on *projektiio*, joka on vektoriavaruuden E lineaarikuvauksena $P: E \rightarrow E$, jolle $P^2 = P$. Jos merkitsemme $U = P(E)$ ja $V = \ker P = \{x \in E : Px = 0\}$, sanotaan P :tä projektioksi avaruudelle U suuntaan V .

Projektiot ovat yksi-yhteen suhteessa suorien summien kanssa. Sanomme, että E on aliavaruuksien U ja V *suora summa*, merkintänä $E = U \oplus V$, jos

$$E = U + V = \{u + v : u \in U, v \in V\} \quad \text{ja} \quad U \cap V = \{0\}.$$

Jos P on projektiio, on $E = P(E) \oplus \ker P$. Jos taas $E = U \oplus V$, on kaikilla $x \in E$ yksikäsitteinen esitys $x = u + v$, missä $u \in U$ ja $v \in V$. Tällöin asettamalla $Px = u$ saadaan vaadittu projektiio.

Lause 3.22. *Jos M on Hilbert-avaruuden E suljettu vektorialiavaruus, niin $E = M \oplus M^\perp$ ja P_M on avaruuden E projektiio aliavaruudelle M suuntaan $M^\perp$. Lisäksi*

$$\|P_M x\| \leq \|x\| \quad \text{kaikilla } x \in E.$$

Erityisesti P_M on jatkuva lineaarioperaattori.

Todistus. Lauseen 3.13 perusteella $M^\perp$ on avaruuden E vektorialiavaruus. Aikaisemmin huomattiin, että jokainen $x \in E$ voidaan kirjoittaa yksikäsitteisesti muodossa $x = P_M x + x - P_M x$, missä $P_M x \in M$ ja $x - P_M x \perp M$. Siten $E = M + M^\perp$. Lisäksi, jos $x \in M \cap M^\perp$, on määritelmän nojalla

$$\|x\|^2 = (x | x) = 0,$$

joten $x = \bar{0}$. Siten $M \cap M^\perp = \{\bar{0}\}$, joten $E = M \oplus M^\perp$.

Edelleen $P_M^2 x = P_M x$, sillä $P_M x \in M$ ja $P_M x - P_M x = \bar{0} \perp M$. Siten P_M on projektio. Koska $P_M x = x$ kaikille $x \in M$, on $P_M(E) = M$. Olkoon $x \in M^\perp$. Tällöin $P_M x = \bar{0}$, sillä $\bar{0} \in M$ ja $x \perp M$. Siten $M^\perp \subset \ker P_M$. Toiseen suuntaan, jos $x \in E$ siten, että $P_M x = \bar{0}$ on $x \perp M$, joten $x \in M^\perp$. Siten $M^\perp = \ker P_M$.

Lopuksi, Pythagoraan lauseen perusteella

$$\|P_M x\|^2 \leq \|P_M x\|^2 + \|x - P_M x\|^2 = \|P_M x + (x - P_M x)\|^2 = \|x\|^2,$$

josta normiarvio seuraa. □

3.2. Ortonormaalit kannat.

Määritelmä 3.23. Sisätuloavaruuden jono (e_n) on *ortonormaali*, jos

$$(e_j | e_k) = \begin{cases} 0, & \text{jos } j \neq k \\ 1, & \text{jos } j = k. \end{cases}$$

Esimerkkejä 3.24. (1) Kanoniset kantavektorit $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \ell^2$, missä n :s termi eroaa nollasta, muodostavat ortonormaalijonon $(e_n)_{n=1}^\infty$ avaruudessa ℓ^2 .

(2) $L^2([0, 2\pi])$ varustettuna sisätulolla

$$(x | y) = \int_{[0, 2\pi]} x(t) \overline{y(t)} d\mu(t)$$

on Hilbert-avaruus. Jono $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, missä

$$x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\cos(nt) + i \sin(nt)), \quad n \in \mathbb{Z}, t \in [0, 2\pi],$$

on ortonormaali jono avaruudessa $L^2([0, 2\pi])$, sillä kaikilla $n \neq m$ on

$$\begin{aligned} (x_n | x_m) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} \overline{e^{imt}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt \\ &= \frac{1}{i2\pi(n-m)} (e^{i(n-m)2\pi} - e^{i(n-m)0}) = 0 \end{aligned}$$

ja

$$(x_n | x_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} \overline{e^{int}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dt = 1.$$

Lause 3.25 (Besselin epäyhtälö). Jos (e_n) on ortonormaali jono Hilbert-avaruudessa E , niin

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x | e_k)|^2 \leq \|x\|^2$$

kaikilla $x \in E$. Erityisesti

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x | e_k) = 0.$$

Todistus. Jos (e_n) on ortonormaali jono avaruudessa E ja $x \in E$, niin

$$x - \sum_{k=1}^n (x | e_k) e_k \perp \sum_{k=1}^n (x | e_k) e_k \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N},$$

sillä kaikilla $j = 1, \dots, n$ on

$$\left(x - \sum_{k=1}^n (x | e_k) e_k \mid e_j \right) = (x | e_j) - \sum_{k=1}^n (x | e_k) (e_k | e_j) = (x | e_j) - (x | e_j) = 0.$$

Siten Pythagoraan lauseen mukaan

$$\|x\|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^n (x | e_k) e_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^n (x | e_k) e_k \right\|^2 \geq \left\| \sum_{k=1}^n (x | e_k) e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n |(x | e_k)|^2.$$

Väite seuraa nyt antamalla $n \rightarrow \infty$. □

Määritelmä 3.26. Jos (e_n) on ortonormaali jono Hilbert-avaruudessa E ja $x \in E$, niin lukuja $(x | e_k)$ sanotaan vektorin x *Fourier-kertoimiksi* jonon (e_n) suhteen.

Palautetaan mieliin lineaarialgebrasta tuttu virittämisen käsite. Olkoon E vektoriavaruus ja $A \subset E$. Tällöin joukon A virittämää aliavaruutta merkitään

$$\text{span}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i : n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{K}, a_i \in A \right\}.$$

Tämän joukon sulkeumaa E :ssä merkitään yleensä $\overline{\text{span}}(A)$.

Lause 3.27. Olkoon E Hilbert-avaruus, $(e_j)_{j=1}^n \subset E$ äärellinen ortonormaali jono sekä $M = \text{span}(\{e_1, \dots, e_n\})$. Tällöin

- a) M on suljettu E :n vektoriavaruus, eli $M = \overline{\text{span}}(\{e_1, \dots, e_n\})$.
- b) jos P_M on ortoprojektio M :lle, niin

$$P_M x = \sum_{k=1}^n (x | e_k) e_k, \quad x \in E.$$

Todistus. Merkitään kaikilla $x \in E$

$$Px = \sum_{k=1}^n (x | e_k) e_k.$$

Kuvaus P on selvästi lineaarinen, sillä $x \mapsto (x | e_j)$ on lineaarinen kaikilla j . Lisäksi Pythagoraan lauseen ja Besselin epäyhtälön nojalla on

$$\|Px\|^2 = \sum_{k=1}^n |(x | e_k)|^2 \leq \|x\|^2, \quad x \in E,$$

joten P on jatkuva. (Huomaa, että Besselin epäyhtälö toimii myös äärelliselle ortonormaalille jonolle.)

Jos $x \in M$, niin $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$ joillakin skalaareilla $\lambda_k \in \mathbb{K}$. Nyt

$$(x | e_j) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (e_k | e_j) = \lambda_j \quad \text{kaikilla } j = 1, \dots, n,$$

joten $Px = x$ kaikilla $x \in M$. Siten

$$M = \{x \in E : Px = x\} = \ker(I - P),$$

missä I on identtinen kuvaus. Siten $M = (I - P)^{-1}(\{0\})$ on jatkuvan lineaarikuvauksen ytimenä suljettu vektorialiavaruus.

Kuten Besselin lauseen todistuksessa huomasimme,

$$e_j \perp \left(x - \sum_{k=1}^n (x | e_k) e_k \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

eli $x - Px \in M^\perp$ kaikilla $x \in E$. Siten Px on haluttu ortoprojektio. $\square$

Osoitetaan seuraavaksi, että ortonormaaleista vektoreista muodostetun sarjan normi saadaan ilmaistua vektoreiden kertoimien avulla.

Lause 3.28. *Olko $(e_n)_{n=1}^\infty$ ortonormaali jono Hilbert-avaruudessa E . Jos $\lambda_n \in \mathbb{K}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin sarja*

$$\sum_{k=1}^\infty \lambda_k e_k \text{ suppenee jos ja vain jos } \sum_{k=1}^\infty |\lambda_k|^2 < \infty.$$

Tällöin pätee

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty \lambda_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^\infty |\lambda_k|^2.$$

Todistus. Olkoon

$$s_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tällöin sarja suppenee jos ja vain jos (s_n) on Cauchy-jono.

Olkoon siis $p, q \in \mathbb{N}$ ja $p < q$. Tällöin Pythagoraan lauseen nojalla

$$\|s_q - s_p\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^q \lambda_k e_k - \sum_{k=1}^p \lambda_k e_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=p+1}^q \lambda_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=p+1}^q |\lambda_k|^2.$$

Siistä osasummien s_n muodostama jono suppenee jos ja vain jos sarja $\sum_k |\lambda_k|^2$ suppenee, eli olemme todistaneet ensimmäisen väitteen.

Jos taas merkitään

$$x = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k e_k,$$

saadaan sisätulon jatkuvuuden ja (e_n) vektoreiden ortogonaalisuuden nojalla

$$(x | e_j) = \left(\sum_{k=1}^\infty \lambda_k e_k \mid e_j \right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \mid e_j \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \mid e_j \right) = \lambda_j$$

kaikille $j \in \mathbb{N}$. Samanlaisella päättelyllä

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= (x | x) = \left(x \mid \sum_{k=1}^\infty \lambda_k e_k \right) = \left(x \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x \mid \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \bar{\lambda}_k (x | e_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \bar{\lambda}_k \lambda_k = \sum_{k=1}^\infty |\lambda_k|^2. \end{aligned}$$

□

Seuraus 3.29 (Riesz-Fisherin lause). *Olkoon E Hilbert-avaruus ja $(e_k)_{k=1}^\infty$ sen ortonormaali jono. Jos $(\lambda_k)_{k=1}^\infty \in l^2$, niin löytyy sellainen $x \in E$, että*

$$(x | e_k) = \lambda_k, \quad \text{kaikilla } k \in \mathbb{N},$$

toisin sanoen, kuvaus $x \mapsto ((x | e_k))_{k=1}^\infty$ on surjektio $E \rightarrow l^2$.

Todistus. Lauseen 3.28 nojalla $x = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k e_k$ suppenee E :ssä, ja Fourier kertoimet $(x | e_k) = \lambda_k$ kaikille $k \in \mathbb{N}$ saadaan Lauseen 3.28 todistuksesta. □

Määritelmä 3.30. Hilbert-avaruuden E ortonormaali jono $(e_n)_{n=1}^\infty$ on *Hilbertin kanta* (tai *ortonormaali kanta*) avaruudessa E , jos

$$\overline{\text{span}}(\{e_n : n \in \mathbb{N}\}) = E.$$

Lause 3.31. *Olkoon E Hilbert-avaruus. Tällöin $(e_n)_{n=1}^\infty \subset E$ on Hilbertin kanta avaruudessa E jos ja vain jos se on maksimaalinen ortonormaali joukko avaruudessa E .*

Todistus. Merkitään $M = \overline{\text{span}}(\{e_n : n \in \mathbb{N}\})$. Nyt $M \neq E$ on yhtäpitävää sen kanssa, että $M^\perp \neq \{\bar{0}\}$. Tämä taas on yhtäpitävää sen kanssa, että on olemassa jokin $x \in M^\perp$ jolle $\|x\| = 1$. Tämä taas on yhtäpitävää sen kanssa, että on olemassa $x \in E$ siten, että $\{x\} \cup \{e_n\}_{n=1}^\infty$ on ortonormaali, joka taas on sama kuin, että $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ ei ole maksimaalinen ortonormaali joukko E :ssä. □

Lause 3.32. *Olkoon $(e_n)_{n=1}^\infty$ ortonormaali jono Hilbert-avaruudessa E . Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

- a) *jono $(e_n)_{n=1}^\infty$ on Hilbertin kanta avaruudessa E ,*
- b) *sisätulot $(x | e_n) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ jos ja vain jos $x = \bar{0}$,*
- c) *jokaisella $x \in E$ on voimassa*

$$\left\| x - \sum_{n=1}^N (x | e_n) e_n \right\| \rightarrow 0, \quad \text{kun } N \rightarrow \infty,$$

- d) *jokaisella $x \in E$ on voimassa Parsevalin yhtälö:*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |(x | e_n)|^2,$$

- e) *jokaisella $x, y \in E$ on voimassa Plancherelin kaava:*

$$(x | y) = \sum_{n=1}^\infty (x | e_n) \overline{(y | e_n)}.$$

Todistus. Koska $E = \bar{M} \oplus \bar{M}^\perp$, missä $M = \text{span}(\{e_n : n \in \mathbb{N}\})$, on a) eli $\bar{M} = E$ yhtäpitävää ehdon $\bar{M}^\perp = \{\bar{0}\}$ kanssa, joka taas on sama kuin ehto b) eli $M^\perp = \{\bar{0}\}$, sillä jokaisella joukolla $A \subset E$ pätee

$$(\bar{A})^\perp = A^\perp.$$

(Harjoitustehtävä). Siispä $a) \iff b)$.

Selvästi implikaatiot

$$e) \implies d) \implies b)$$

ovat totta. Osoitetaan vielä puuttuvat implikaatiot

$$b) \implies c) \implies e).$$

Oletetaan siis, että b) on totta. Jos $x \in E$, merkitään

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} (x | e_n) e_n,$$

missä sarja suppenee Besselin epäyhtälön ja Lauseen 3.28 nojalla. Kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$(y | e_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N (x | e_n) e_n \mid e_k \right) = (x | e_k)$$

eli $(y - x | e_k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Ehdon b) nojalla siis $y = x$, joten olemme osoittaneet, että c) on totta.

Osoitetaan lopuksi implikaatio $c) \implies e)$. Koska oletuksen mukaan

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x | e_n) e_n$$

kaikilla $x \in E$, on sisätulon jatkuvuuden ja lineaarisuuden perusteella jälleen

$$\begin{aligned} (x | y) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N (x | e_n) e_n \mid y \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (x | e_n) (e_n | y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (x | e_n) (e_n | y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x | e_n) \overline{(y | e_n)}. \end{aligned}$$

Tässä oikeanpuoleinen sarja suppenee Hölderin epäyhtälön perusteella. □

Selvästi jokainen Hilbert-avaruus jossa on numeroituva Hilbertin kanta on separoituva. (Jos (e_n) on E :n Hilbertin kanta, ja $K \subset \mathbb{K}$ numeroituva ja tiheä $\mathbb{K}$:ssa, on $\{\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i : \lambda_i \in K, n \in \mathbb{N}\}$ numeroituva ja tiheä E :ssä.) Väite on totta toiseenkin suuntaan:

Lause 3.33. *Jokaisessa separoituvassa Hilbert-avaruudessa E on Hilbertin kanta.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $\dim E = n < \infty$. Olkoon $x_1 \in E \setminus \{\bar{0}\}$. Tällöin määrittelemällä $e_1 = \|x_1\|^{-1} x_1$ saadaan ortonormaali joukko $\{e_1\}$. Oletetaan, että $\{e_1, \dots, e_q\} \subset E$ on ortonormaali joukko ja $x_{q+1} \in E \setminus \text{span}(\{e_1, \dots, e_q\})$. Määritellään

$$y_{q+1} = x_{q+1} - P_q x_{q+1},$$

missä P_q on ortogonaaliprojektio avaruudelle $\text{span}(\{e_1, \dots, e_q\})$. Tällöin $y_{q+1} \neq \bar{0}$ ja $y_{q+1} \perp e_i$ kaikilla $i = 1, \dots, q$ ja siten määrittelemällä $e_{q+1} = \|y_{q+1}\|^{-1} y_{q+1}$ saadaan ortonormaali joukko $\{e_1, \dots, e_{q+1}\}$. Kun $q + 1 = n$, on ulottuvuuden määritelmän nojalla $E = \text{span}(\{e_1, \dots, e_{q+1}\})$ ja etsitty kanta on löydetty.

Jos $\dim E = \infty$, tehdään yllä esitelty ortonormeeraus äärettömälle määrälle vektoreita. Ensin tulee kuitenkin löytää sopiva joukko $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jolle ortonormeeraus tehdään. Tätä varten otetaan avaruuden E separoituvuuden antama tiheä numeroituva joukko $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ ja heitetään tästä pois vektorit joille pätee

$$z_n \in \text{span}(\{z_1, \dots, z_{n-1}\}),$$

eli määritellään $\{x_n\} \subset \{z_n\}$ asettamalla $x_1 = z_1$ ja $x_n = z_{m_n}$ kaikille $n > 1$, missä

$$m_n = \min\{k : z_k \notin \text{span}(\{x_1, \dots, x_{n-1}\})\}.$$

Näin saadaan ortonormaali jono $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jolle pätee kaikilla $N \in \mathbb{N}$

$$\text{span}(\{e_n\}_{n=1}^N) = \text{span}(\{x_n\}_{n=1}^N) = \text{span}(\{z_n\}_{n=1}^{m_N}).$$

Siten joukon $\{z_n\}$ tiheyden perusteella

$$\overline{\text{span}}(\{e_n\}_{n=1}^\infty) = E$$

ja $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on siten avaruuden E Hilbertin kanta. $\square$

Edellisen tuloksen perusteella nähdään, että kaikki ääretönulotteiset separoituvat Hilbert-avaruuksia ovat itse asiassa isometrisia Hilbert-avaruuden $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ kanssa: Olkoot E separoituva Hilbert-avaruus ja (e_n) sen Lauseen 3.33 antama Hilbertin kanta. Tällöin jokaisella $x \in E$ on olemassa yksikäsitteinen esitys

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x | e_n) e_n.$$

ja siten kuvaus

$$T: \ell^2 \rightarrow E: (\lambda_n)_{n=1}^\infty \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$$

on haluttu isometria (eli etäisyydet säilyttävä kuvaus):

$$\|Tx - Ty\|_E = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n) e_n \right\|_E = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|x - y\|_2.$$

Esimerkki 3.34. Otetaan esimerkiksi reaalikertoiminen $L^2([0, 1])$. Sille erään Hilbertin kannan antaa Haarin systeemi $(h_n)_{n=0}^\infty$, joka määritellään seuraavasti: $h_0 = \chi_{[0,1]}$, $h_1 = \chi_{[0,1/2]} - \chi_{[1/2,1]}$, $h_2 = \sqrt{2}(\chi_{[0,1/4]} - \chi_{[1/4,1/2]})$, $h_3 = \sqrt{2}(\chi_{[1/2,3/4]} - \chi_{[3/4,1]})$, $\dots$ Yleisesti kaikille $k \geq 0$ ja $0 \leq j < 2^k$ määritellään

$$h_n = 2^{\frac{k}{2}} (\chi_{\Delta_n^+} - \chi_{\Delta_n^-}),$$

missä $n = 2^k + j$,

$$\Delta_n^+ = \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j + \frac{1}{2}}{2^k} \right] \quad \text{ja} \quad \Delta_n^- = \left[\frac{j + \frac{1}{2}}{2^k}, \frac{j + 1}{2^k} \right].$$

Haarin kannan Fourier kertoimet funktiolle $f \in L^2([0, 1])$ saadaan kaavoista

$$(f | h_0) = \int_{[0,1]} f(t) dt, \quad (f | h_n) = 2^{\frac{k}{2}} \left(\int_{\Delta_n^+} f(t) dt - \int_{\Delta_n^-} f(t) dt \right),$$

missä jälleen $n = 2^k + j$. Edelleen kaikille $f \in L^2([0, 1])$ voidaan siis kirjoittaa

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f | h_n) h_n.$$