

Harjoitus 3**deadline: 2.2.2026, klo 14:00**

Osoitetaan kahdessa ensimmäisessä harjoituksessa Banachin kiintopistelause (Lause 2.32):

Olkoot (X, d) täydellinen epätyhjä metrinen avaruus ja $T : X \rightarrow X$ aito kontraktio, eli olkoon $q \in [0, 1)$ siten, että

$$d(T(x), T(y)) \leq q d(x, y), \quad \text{kaikilla } x, y \in X.$$

Tällöin T :llä on yksikäsitteinen kiintopiste $x^ \in X$, eli x^* on X :n ainoa piste, jolle $x^* = T(x^*)$.*

Ex 3.1: Olkoot $x_0 \in X$ ja $x_{k+1} := T(x_k)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Osoita, että

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0),$$

aina kun $m > n$.

Ex 3.2: Osoita, että (x_k) jono suppenee X :ssä, ja että piste $x^* := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ toteuttaa $T(x^*) = x^*$. Lisäksi osoita, että $x^* \in X$ on kuvauksen T yksikäsitteinen kiintopiste.

[vihje: osoita ensin, että T on jatkuva.]

Ex 3.3: Osoita, että avaruudessa $\mathbb{C}^n$ kuvaus

$$(x|y) := \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}, \quad \text{kaikilla } x, y \in \mathbb{C}^n,$$

on sisätulo. Mitä sen määrittelemä normi on?

Ex 3.4: Olkoon $(E, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Luennossa osoitettiin, että suunnikasyhtälö

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

pätee, aina kun on olemassa sisätulo $(\cdot|\cdot)$ joka indusoi normin $\|\cdot\|$ (Lause 3.9). Osoita, että käänteinen lause on myös voimassa, eli että sisätulo $(\cdot|\cdot)$ joka indusoi normin $\|\cdot\|$ on olemassa, aina kun normi $\|\cdot\|$ toteuttaa suunnikasyhtälön.