

suppenee avaruudessa $\mathbb{K}$. Niille x joille $g(x) = \infty$, voidaan asettaa $f(x) = 0$. Tällöin $|f(x)| \leq g(x)$ kaikilla $x \in \Omega$ ja siten $f \in L^p$. Nyt Fatoun lemmän avulla nähdään että

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| f - \sum_{n=1}^k f_n \right|^p d\mu &= \int_{\Omega} \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=1}^j f_n - \sum_{n=1}^k f_n \right|^p d\mu \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| \sum_{n=1}^j f_n - \sum_{n=1}^k f_n \right|^p d\mu \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $k \rightarrow \infty$.

Siispä jokainen avaruuden L^p itseisesti suppeneva sarja suppenee, joten L^p on täydellinen Lauseen 2.18 nojalla. $\square$

Olemme jo aikaisemmin määritelleet avaruuden $B(\Omega, \mathbb{K})$ supremum-normilla. Ollakseen yhteensopiva muiden L^p -avaruuksien kanssa L^∞ -määritellään oleellisen supremumin avulla:

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| := \inf \{M : \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > M\}) = 0\}$$

ja

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ mitallinen ja } \|f\|_\infty < \infty\} / \sim,$$

kuten muillekin L^p -avaruuksille eli $f \sim g$ jos ja vain jos $f = g$ melkein kaikkialla.

Lause 2.30. $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ on Banach-avaruus.

Todistus. Ensinnäkin $L^\infty(\Omega)$ on vektoriavaruus ja $\|\cdot\|_\infty$ normi. (Miksi?)

Olkoon $(f_n)_{n=1}^\infty \subset L^\infty(\Omega)$ Cauchy-jono avaruudessa $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$. Tällöin on olemassa $M < \infty$ siten, että $\|f_n\| \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. (Miksi?)

Joukko

$$E = \{x \in \Omega : |f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty \text{ ja } |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \text{ kaikilla } n, m \in \mathbb{N}\}$$

on täysimittainen. (Miksi?)

Tällöin kaikilla $x \in E$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| \rightarrow 0, \quad \text{kun } n, m \rightarrow \infty$$

eli $(f_n(x))$ on Cauchy-jono $\mathbb{K}$:ssa. Koska $\mathbb{K}$ on täydellinen, on olemassa raja-arvo $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Koska

$$\|f\|_\infty \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_\infty \leq M,$$

on $f \in L^\infty(\Omega)$. Lisäksi

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_\infty &\leq \sup_{x \in E} |f(x) - f_n(x)| = \sup_{x \in E} \lim_{m \rightarrow \infty} |f_m(x) - f_n(x)| \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\| \rightarrow 0, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Siten $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ on Banach-avaruus. $\square$

2.3. Banachin kiintopistelause. Muotoillaan ja todistetaan seuraavaksi Banachin kiintopistelause metrisissä avaruuksissa. (Kuratowskin upotuslauseen avulla mikä tahansa metrinen avaruus voidaan nähdä jonkin Banach-avaruuden osajoukkona, joten versio Banach-avaruuksille toki riittäisi.)

Määritelmä 2.31. Olkoot (X, d) metrinen avaruus ja $Y \subset X$ epätyhjä osajoukko. Kuvaus $f: Y \rightarrow X$ on *kontraktio* Y :ssä, jos

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y) \quad \text{kaikilla } x, y \in Y.$$

Kuvaus $f: Y \rightarrow X$ on *aito kontraktio* Y :ssä, jos on olemassa $k \in [0, 1)$ siten, että

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \quad \text{kaikilla } x, y \in Y.$$

Pistettä $x \in Y$ sanotaan kuvauksen $f: Y \rightarrow X$ *kiintopisteeksi*, jos $f(x) = x$.

Lause 2.32 (Banachin kiintopistelause). *Olkoot (X, d) täydellinen (epätyhjä) metrinen avaruus ja $f: X \rightarrow X$ aito kontraktio. Tällöin kuvauksella f on yksikäsitteinen kiintopiste $x \in X$.*

Todistus. (Harjoitustehtävä.) □

Esimerkki 2.33. Palataan jälleen Esimerkkiin 0.3. Osoitetaan Banachin kiintopistelauseen avulla, että integraaliyhtälöllä

$$f(x) - \lambda \int_0^1 K(x, s)f(s) ds = g(x), \quad x \in [0, 1]$$

on olemassa ratkaisu ainakin kun λ on tarpeeksi pieni. Banachin kiintopistelauseen soveltamiseksi halutaan nähdä funktio f jonkin kontraktiokuvauksen kiintopisteenä. Sopiva kuvaus saadaan järjestelemällä integraaliyhtälö muotoon

$$T: C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1]), \quad (Tf)(x) = g(x) + \lambda \int_0^1 K(x, s)f(s) ds.$$

Esimerkissä 2.25 huomattiin, että kuvaus

$$(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty): f(x) \mapsto \int_0^1 K(x, s)f(s) ds$$

on jatkuva lineaarioperaattori. Näin ollen myös T on jatkuva $\|\cdot\|_\infty$ -normissa. (Huomaa, että T ei ole lineaarinen ellei $g \equiv 0$.)

Huomataan, että

$$\begin{aligned} \|T(f) - T(h)\|_\infty &= \sup_{x \in [0, 1]} \left| g(x) + \lambda \int_0^1 K(x, s)f(s) ds - g(x) - \lambda \int_0^1 K(x, s)h(s) ds \right| \\ &= \sup_{x \in [0, 1]} \left| \lambda \int_0^1 K(x, s)(f(s) - h(s)) ds \right| \leq |\lambda| \|K\|_\infty \|f - h\|_\infty. \end{aligned}$$

Siten T on aito kontraktio jos $|\lambda| \|K\|_\infty < 1$. Tässä tapauksessa integraaliyhtälöllä on siis yksikäsitteinen ratkaisu $f \in C([0, 1])$. Kuten Banachin kiintopistelauseen todistuksessa huomasimme, yksi tapa löytää tämä ratkaisu numeerisesti on iteroida $f_n = T(f_{n-1})$ lähtien jostain f_0 .

3. HILBERT-AVARUUDET

Määritelmä 3.1. Olkoon E vektoriavaruus, jonka skalaarikunta on $\mathbb{K}$, missä $\mathbb{K}$ on joko $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$. Kuvaus $f: E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ on *Hermiten muoto*, jos

- (S1) $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$ kaikilla $x_1, x_2, y \in E$
- (S2) $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$ kaikilla $x, y \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$
- (S3) $f(y, x) = \overline{f(x, y)}$ kaikilla $x, y \in E$. (Tässä $\bar{z} = a - ib$ on kompleksiluvun $z = a + ib$ konjugaattiluku. Tapauksessa $z \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ on $\bar{z} = z$.)

Huomaa, että Hermiten muodolle f ehtojen (S1) ja (S3) nojalla myös

$$f(x, y_1 + y_2) = \overline{f(y_1 + y_2, x)} = \overline{f(y_1, x) + f(y_2, x)} = \overline{f(y_1, x)} + \overline{f(y_2, x)} = f(x, y_1) + f(x, y_2)$$

ja ehtojen (S2) ja (S3) nojalla

$$f(x, \lambda y) = \overline{f(\lambda y, x)} = \overline{\lambda \overline{f(y, x)}} = \bar{\lambda} \overline{f(y, x)} = \bar{\lambda} f(x, y)$$

kaikilla $x, y, y_1, y_2 \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$. Hermiten muoto f on siis konjugaattilineaarinen toisen muuttujansa suhteen.

Ehdosta (S2) seuraa myös, että

$$f(\bar{0}, y) = 0f(\bar{0}, y) = 0 = f(x, \bar{0}) \quad \text{kaikilla } x, y \in E.$$

Määritelmä 3.2. Hermiten muoto $f: E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ on *sisätulo* avaruudessa E jos se on aidosti positiivinen eli

$$f(x, x) \geq 0 \text{ kaikilla } x \in E, \quad \text{ja } f(x, x) = 0 \text{ jos ja vain jos } x = \bar{0}.$$

Sisätuloa $f: E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ merkitään usein

$$(x | y) := f(x, y), \quad x, y \in E.$$

Vektoriavaruuden sisätulo määrittelee luonnollisen normin

$$||x|| = \sqrt{(x | x)}.$$

Tämä nähdään Cauchy-Schwarzin epäyhtälön avulla.

Lause 3.3 (Cauchy-Schwarzin epäyhtälö). *Olkoon E sisätuloavaruus. Tällöin*

$$|(x | y)| \leq ||x|| ||y|| \quad \text{kaikilla } x, y \in E.$$

Todistus. Jos $x = \bar{0}$, on väite selvästi totta. Oletetaan siis, että $x \neq \bar{0}$ ja vastaavasti $y \neq \bar{0}$. Merkitään $\lambda = -\frac{(x | y)}{||y||^2}$ ja arvioidaan

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x + \lambda y | x + \lambda y) = (x | x) + \lambda(y | x) + \bar{\lambda}(x | y) + \lambda\bar{\lambda}(y | y) \\ &= ||x||^2 - \frac{(x | y)}{||y||^2}(y | x) - \frac{\overline{(x | y)}}{||y||^2}(x | y) + \frac{|(x | y)|^2}{||y||^4}||y||^2 \\ &= ||x||^2 - \frac{|(x | y)|^2}{||y||^2}, \end{aligned}$$

josta väite seuraa. □

Lause 3.4. *Olkoon $(E, (\cdot | \cdot))$ sisätuloavaruus. Tällöin $||x|| = \sqrt{(x | x)}$ on E :n normi.*

Todistus. Olkoon $x, y \in E$. Nyt kompleksilukujen perusominaisuuksien, sisätulon määritelmän ja Cauchy-Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x + y\|^2 = (x + y | x + y) = \|x\|^2 + (x | y) + (y | x) + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + (x | y) + \overline{(x | y)} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x | y) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|(x | y)| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

eli kolmioepäyhtälö on voimassa.

Ehto (N2) on voimassa, sillä kaikille $x \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ on

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x | \lambda x)} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} (x | x)} = \sqrt{|\lambda|^2 (x | x)} = |\lambda| \|x\|.$$

Ehto (N3) seuraa sisätulon ehdosta $(x | x) = 0 \Rightarrow x = \bar{0}$. □

Määritelmä 3.5. Täydellistä sisätuloavaruutta sanotaan Hilbert-avaruudeksi.

Esimerkkejä 3.6. (1) Avaruudessa $\mathbb{K}^n$ kuvaus

$$(x | y) = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j, \quad x = (x_j)_{j=1}^n \text{ ja } y = (y_j)_{j=1}^n,$$

on sisätulo. Sen määrittelemä normi on

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x | x)} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

on avaruuden $\mathbb{K}^n$ euklidinen normi.

(2) Kuten edellisessä esimerkissä, avaruudessa ℓ^2 määritellään sisätulo

$$(x | y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \bar{y}_j, \quad x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell^2 \text{ ja } y = (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell^2,$$

Koska Hölderin epäyhtälön nojalla

$$\|x \bar{y}\|_1 \leq \|x\|_2 \|\bar{y}\|_2 = \|x\|_2 \|y\|_2 < \infty, \quad \text{kun } x, y \in \ell^2,$$

suppenee summa $\sum_{j=1}^{\infty} x_j \bar{y}_j$ (jopa itseisesti) $\mathbb{K}$:ssa. Jälleen sisätulon määrittelemä normi on tässä ℓ^2 :n normi $\|\cdot\|_2$. Koska ℓ^2 on Banach-avaruus, on ℓ^2 varustettuna tällä sisätulolla siten Hilbert-avaruus.

(3) Vastaava sisätulo avaruuteen $L^2(\Omega)$ on

$$(f | g) = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} d\mu(x), \quad f, g \in L^2(\Omega).$$

Tämän antama normi on $L^2(\Omega)$:n $\|\cdot\|_2$ -normi. Koska $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_2)$ on täydellinen, on $(L^2(\Omega), (\cdot | \cdot))$ Hilbert-avaruus.

Tutkitaan seuraavaksi sisätuloavaruuksien ominaisuuksia.

Määritelmä 3.7. Sisätuloavaruuden E vektorit $x, y \in E$ ovat *kohtisuorat* eli *ortogonaaliset*, jos $(x | y) = 0$. Ortogonaalisuutta merkitään $x \perp y$. Joukot $A, B \subset E$ ovat *kohtisuorat* (*ortogonaaliset*) jos $x \perp y$ kaikilla $x \in A$ ja $y \in B$. Tällöin merkitään $A \perp B$.

Lause 3.8 (Pythagoras). *Olko E sisätuloavaruus ja $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset E$ siten, että $x_i \perp x_j$ kun $j \neq i$. Tällöin*

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

Todistus. Todistetaan väite induktiolla n :n suhteen. Väite on selvästi totta, kun $n = 1$. Oletetaan, että väite on totta luvulla $n \geq 1$ ja osoitetaan, että se pätee myös luvulla $n + 1$. Sisätulon lineaarisuuden ja induktio-oletuksen nojalla

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{n+1} x_i \right\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i + x_{n+1} \right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i + x_{n+1} \mid \sum_{i=1}^n x_i + x_{n+1} \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \mid \sum_{i=1}^n x_i \right) + \sum_{i=1}^n (x_{n+1} \mid x_i) + \sum_{i=1}^n (x_i \mid x_{n+1}) + (x_{n+1} \mid x_{n+1}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \mid \sum_{i=1}^n x_i \right) + (x_{n+1} \mid x_{n+1}) = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \|x_i\|^2. \end{aligned}$$

□

Lause 3.9. *Olko $(E, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Tällöin on olemassa sisätulo $(\cdot \mid \cdot)$ joka indusoi normin $\|\cdot\|$ jos ja vain jos $\|\cdot\|$ toteuttaa suunnikasyhtälön:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Todistus. Tarkistetaan ensin, että sisätulon antama normi toteuttaa suunnikasyhtälön:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (x + y \mid x + y) + (x - y \mid x - y) \\ &= (x \mid x) + (x \mid y) + (y \mid x) + (y \mid y) + (x \mid x) - (x \mid y) - (y \mid x) + (y \mid y) \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

Toinen suunta (tapauksessa $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) todistetaan harjoituksissa.

□

Esimerkkejä 3.10. (1) Osoitetaan, että $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ ei ole sisätuloavaruus. Käytetään Lausetta 3.9. Olkoon $x = (1, 0, 0, \dots), y = (0, 1, 0, 0, \dots) \in \ell^1$. Näille on

$$\begin{aligned} \|x + y\|_1 &= \|(1, 1, 0, 0, \dots)\|_1 = 2, \\ \|x - y\|_1 &= \|(1, -1, 0, 0, \dots)\|_1 = 2, \\ \|x\|_1 &= \|y\|_1 = 1, \end{aligned}$$

ja siten

$$\|x + y\|_1^2 + \|x - y\|_1^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \neq 4 = 2(\|x\|_1^2 + \|y\|_1^2).$$

Siten $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ ei ole sisätuloavaruus.

(2) Osoitetaan seuraavaksi, että $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ ei ole sisätuloavaruus. Käytetään jälleen Lausetta 3.9. Olkoon $f, g \in C([0, 1])$ kuvaukset $f(t) = t$ ja $g(t) = 1 - t$, kun $t \in [0, 1]$. Tällöin

$$\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$$

ja koska $(f + g)(t) = 1$ ja $(f - g)(t) = 2t - 1$, on myös

$$\|f + g\|_\infty = \|f - g\|_\infty = 1.$$

Koska

$$\|f + g\|_\infty^2 + \|f - g\|_\infty^2 = 2 \neq 4 = 2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2),$$

ei $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ ole sisätuloavaruus.

Lause 3.11. *Sisätulo $E \times E \rightarrow \mathbb{K}: (x, y) \mapsto (x | y)$ on jatkuva kuvaus.*

Todistus. Olkoon $(x_0, y_0) \in E \times E$. Tällöin Cauchy-Schwarzin epäyhtälön ja kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} |(x | y) - (x_0 | y_0)| &= |(x - x_0 | y - y_0) + (x - x_0 | y) + (x_0 | y - y_0)| \\ &\leq \|x - x_0\| \|y - y_0\| + \|x_0 - x\| \|y_0\| + \|x_0\| \|y - y_0\|. \end{aligned}$$

□

Määritelmä 3.12. Jos $A \subset E$, niin joukon A *ortokomplementti* $A^\perp$ on joukko

$$A^\perp := \{y \in E : (x | y) = 0 \text{ kaikilla } x \in A\}.$$

Lause 3.13. *Jos $A \subset E$, on sen ortokomplementti $A^\perp$ avaruuden E suljettu aliavaruus.*

Todistus. Olkoon $x, y \in A^\perp$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Tällöin

$$(z | \alpha x + \beta y) = \bar{\alpha}(z | x) + \bar{\beta}(z | y) = 0 + 0 = 0$$

kaikilla $z \in A$, joten $\alpha x + \beta y \in A^\perp$, ja siten $A^\perp$ on avaruuden E aliavaruus.

Osoitetaan seuraavaksi, että $A^\perp$ on suljettu. Jos $x \in E$, on

$$x^\perp := \{x\}^\perp = \{y \in E : (x | y) = 0\}$$

suljettu jatkuvan kuvauksen $y \mapsto (x | y)$ alkukuvana suljetusta joukosta $\{0\}$. Näin ollen mieltäiselle $A \subset E$ on joukko

$$A^\perp = \bigcap_{x \in A} x^\perp$$

suljettu.

□

Lause 3.14. *Jos $y_1, y_2 \in E$ ja $(x | y_1) = (x | y_2)$ kaikilla $x \in E$, niin $y_1 = y_2$.*

Todistus. Koska $y_1 - y_2 \in E$, on oletuksen nojalla $0 = (y_1 - y_2 | y_1 - y_2) = \|y_1 - y_2\|^2$, joten $y_1 - y_2 = \bar{0}$. □

Tarkastellaan seuraavaksi normin minimointia Hilbert-avaruuksissa. Äärellisulotteisessa avaruudessa suljetut ja rajoitetut joukot ovat kompakteja, joten niistä löytyy joukossa normin minimoiva alkio. Ääretönulotteisessa avaruudessa suljetut ja rajoitetut joukot eivät ole aina kompakteja, eikä minimin olemassaolo ei ole aina taattu.

Esimerkki 3.15. Olkoon $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \ell^2$, missä jonon n :s termi on 1. Määritellään

$$A = \{x_n = \frac{n+2}{n+1} e_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Tällöin A on rajoitettu ja suljettu, mutta $\|x_n\|_2 = \frac{n+2}{n+1} > 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $\|x_n\|_2 \rightarrow 1$, kun $n \rightarrow \infty$, joten normin minimoivaa alkioita ei ole joukossa A .

Normin minimoivan alkion olemassaolo seuraa esimerkiksi joukon konveksisuudesta. Harjoituksissa 3 huomasimme jo, että vektoriavaruuden pallot ovat konvekseja. Palautetaan konveksisuuden määritelmä mieleen.