

Ex 2.1: Olkoon $k \in \mathbb{N}$. Osoita, että normit

$$\|f\|_\infty := \sum_{0 \leq j \leq k} \|f^{(j)}\|_\infty, \quad \|f\|_1 := \sum_{j=0}^k \|f^{(j)}\|_\infty$$

ovat ekvivalentteja avaruudessa $C^k([0, 1])$, missä $f^{(j)}$ on f funktion j :s derivaatta.

Ex 2.2: Olkoon $(E, \|\cdot\|)$ normiavaruus, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-jono E :ssä, ja $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jokin (x_n) :n suppeneva osajono. Osoita, että myös (x_n) suppenee E :ssä.

Ex 2.3: Olkoon $T : \ell^2 \rightarrow \ell^1 : (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto (\frac{x_k}{k})_{k \in \mathbb{N}}$. Osoita, että T on rajoitettu lineaarinen operaattori avaruudesta ℓ^2 avaruuteen ℓ^1 , ja että $\|T\| \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}}$.

Ex 2.4: Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mitallinen joukko, $p \in [1, \infty)$ ja $f, g \in L^p(\Omega)$. Osoita Lauseen 2.28 viimeinen osa, eli että

$$\int_{\Omega} |f + g|^p d\mu \leq 2^p (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p).$$

Ex 2.5: Täydennä Lauseen 1.2 todistus, eli osoita että X on tiheä $(\tilde{X}, \tilde{d})$:ssä ja että $\tilde{X}$ on täydellinen.