

Esimerkki 2.8. Normiavaruus $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ei ole separoituva. Tämä nähdään ottamalla ylinumeroituva joukko (muista, että joukon potenssijoukko on aina mahtavampi kuin joukko itse)

$$F = \{\chi_A : A \subset \mathbb{N}\} \subset \ell^\infty,$$

missä

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in A \\ 0, & \text{jos } x \notin A \end{cases}.$$

Jokaiselle $A, B \subset \mathbb{N}$ on $\|\chi_A - \chi_B\|_\infty = 1$ jos $A \neq B$. Siispä $\{B(f, 1/2)\}_{f \in F}$ on ylinumeroituva kokoelma pistevieraita avoimia joukkoja ℓ^∞ :ssä ja siten ℓ^∞ ei ole separoituva Lauseen 1.3 nojalla.

Lisäksi ääretönulotteisissa normiavaruuksissa avoimet ja suljetut joukot voivat olla joskus ensinäkemältä yllättäviä verrattuna Euklidisiin avaruuksiin.

Esimerkki 2.9. Olkoon

$$A = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in c_0 : |x_n| < \frac{1}{n} \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}\}.$$

Tällöin A ei ole avoin avaruudessa $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.

Esimerkiksi $\bar{0} = (0, 0, \dots) \in A$, mutta kaikilla $r > 0$ on olemassa $m \in \mathbb{N}$ siten, että $\frac{1}{m} < r$, ja tällöin jolle $(x_n)_{n=1}^\infty$, jossa $x_n = \frac{1}{n}$, jos $n = m$ ja $x_n = 0$ muuten, pätee $(x_n)_{n=1}^\infty \in B(\bar{0}, r) \setminus A$. Siten $\bar{0}$ ei ole A :n sisäpiste eikä A ole avoin.

Normiavaruus $(E, \|\cdot\|)$ on *täydellinen*, jos $(E, \|\cdot\|)$ on täydellinen metrinen avaruus. Täydellistä normiavaruutta kutsutaan *Banach-avaruudeksi*.

Lause 2.10. Jokainen normiavaruus $(E, \|\cdot\|_1)$ voidaan täydellistää, eli on olemassa Banach-avaruus $(\bar{E}, \|\cdot\|_2)$ siten, että E on tiheä avaruudessa $(\bar{E}, \|\cdot\|_2)$ ja $\|x\|_1 = \|x\|_2$ kaikilla $x \in E$.

Todistus. (Harjoitustehtävä, vertaa Lauseeseen 1.2.) □

Lause 2.11. Avaruus $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ on Banach-avaruus kaikilla $p \in [1, \infty]$.

Todistus. Todistus p :n äärellisille arvoille nähdään myöhemmin L^p -avaruuksien tapauksessa. Seuraavassa lauseessa nähdään tapaus $p = \infty$ yleisemmässä kontekstissa. □

Lause 2.12. $(B(A, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ on Banach-avaruus.

Todistus. Olkoot (x_n) Cauchy-jono avaruudessa $(B(A, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$, $\epsilon > 0$ ja $t \in A$. Koska on olemassa $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|x_k(t) - x_m(t)| \leq \|x_k - x_m\|_\infty < \epsilon \quad \text{kaikilla } k, m \geq n_\epsilon$$

on $(x_k(t))_{k=1}^\infty$ Cauchy-jono avaruudessa $\mathbb{K}$. Koska $\mathbb{K}$ on täydellinen, on olemassa $x(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) \in \mathbb{K}$.

Todistaaksemme lauseen väite, tulee nyt osoittaa, että

- (1) $x \in (B(A, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ ja
- (2) $x_n \rightarrow x$ kun $n \rightarrow \infty$ avaruudessa $(B(A, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$.

Olkoot $\epsilon > 0$ ja $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ kuten yllä. Kun $m \geq n_\epsilon$, saadaan

$$\|x_m - x\|_\infty = \sup_{t \in A} |x_m(t) - x(t)| \leq \sup_{t \in A} \lim_{k \rightarrow \infty} |x_m(t) - x_k(t)| \leq \epsilon,$$

joten $\|x_m - x\|_\infty \rightarrow 0$ kun $m \rightarrow \infty$ eli kohta (2) on todistettu. Toisaalta tästä seuraa myös kohta (1):

$$\|x\|_\infty \leq \|x_{n_\epsilon}\|_\infty + \|x_{n_\epsilon} - x\|_\infty \leq \|x_{n_\epsilon}\|_\infty + \epsilon < \infty.$$

□

Lause 2.13. Olkoon E Banach-avaruus. Tällöin aliavaruus $F \subset E$ on täydellinen E :n indusoimassa normissa jos ja vain jos F on suljettu E :ssä.

Todistus. (Harjoitustehtävä)

□

Määritelmä 2.14. Vektoriavaruuden E normit $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ovat *ekvivalentteja*, jos on olemassa vakio $C > 0$, jolle

$$\frac{1}{C} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \|x\|_1 \quad \text{kaikille } x \in E.$$

Lause 2.15. Olkoot $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ekvivalentteja normeja avaruudessa E . Tällöin ne määrittelevät saman topologian avaruuteen E .

Todistus. (Harjoitustehtävä)

□

Esimerkkejä 2.16. (1) Avaruuden $\mathbb{C}^n$ normit

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} \quad \text{ja} \quad \|x\|_\infty = \max_j |x_j|,$$

missä $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, ovat ekvivalentit:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty.$$

Myöhemmin huomataan, että kaikki äärellisulotteisen vektoriavaruuden normit ovat ekvivalentteja.

(2) Olkoon

$$\mathcal{P} = \left\{ p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Tällöin esimerkiksi

$$\|p\|_1 = \sum_{k=0}^n |a_k| \quad \text{ja} \quad \|p\|_\infty = \max_k |a_k|,$$

missä $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, ovat normeja avaruudessa $\mathcal{P}$. Ne eivät kuitenkaan ole ekvivalentit: jos $p_n(z) = \sum_{k=0}^n z^k$, on $\|p_n\|_1 = n+1$ ja $\|p_n\|_\infty = 1$.

(3) Olkoon

$$C^k([0, 1]) = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{K} : f, f', \dots, f^{(k)} \text{ ovat jatkuvia välillä } [0, 1]\},$$

kun $k \in \mathbb{N}$. Normit

$$\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq j \leq k} \|f^{(j)}\|_\infty \quad \text{ja} \quad \|f\|_1 = \sum_{j=0}^k \|f^{(j)}\|_\infty$$

ovat ekvivalentteja avaruudessa $C^k([0, 1])$.

Olkoon (x_n) normiavaruuden E jono. Jonosta (x_n) voidaan muodostaa sarja

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Sanomme, että sarja S suppenee alkioon $x \in E$, jos

$$x = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m x_n \quad E\text{:ssä}.$$

Sanomme, että S suppenee itseisesti, jos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty.$$

Esimerkki 2.17. Olkoon $e_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n\text{:s}}, 0, \dots) \in \ell^2$ kaikille $n \in \mathbb{N}$. Suppeneeko sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}?$$

Entä suppeneeko se itseisesti?

Merkitään

$$x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right).$$

Koska

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} (= \frac{\pi}{\sqrt{6}}) < \infty,$$

on $x \in \ell^2$.

Tarkastellaan osasummia

$$s_m = \sum_{n=1}^m \frac{e_n}{n} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{m}, 0, 0, \dots\right).$$

Nyt

$$\|x - s_m\|_2 = \sqrt{\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \rightarrow 0, \quad \text{kun } m \rightarrow \infty,$$

joten sarja suppenee. Kuitenkin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{e_n}{n} \right\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

joten sarja ei suppene itseisesti.

Lause 2.18. Normiavaruus E on Banach-avaruus jos ja vain jos sen jokainen itseisesti suppeneva sarja suppenee.

Todistus. Oletetaan ensin, että E on täydellinen, ja (x_n) on jono jonka muodostama sarja suppenee itseisesti E :ssä. Merkitään $S_m = \sum_{n=1}^m x_n$. Nyt, kun $k \geq m \geq 1$, on kolmioepäyhtälön ja itseisen suppenemisen nojalla

$$\|S_k - S_m\| \leq \sum_{n=m}^k \|x_n\| \leq \sum_{n=m}^{\infty} \|x_n\| \rightarrow 0, \quad \text{kun } m \rightarrow \infty.$$

Siis S_m on Cauchy-jono, joka suppenee täydellisyyden nojalla.

Oletetaan sitten, että jokainen E :n itseisesti suppeneva sarja suppenee. Olkoon (x_n) Cauchy-jono E :ssä. Valitaan jokaiselle $k \in \mathbb{N}$ indeksi $n_k \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\|x_n - x_m\| < 2^{-k} \quad \text{kaikille } n, m \geq n_k.$$

Merkitään $y_k := x_{n_k}$. Koska

$$y_k = y_1 + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \cdots + (y_k - y_{k-1}),$$

ja koska

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|y_{k+1} - y_k\| < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty,$$

jono

$$(y_n - y_1) = \sum_{k=1}^{n-1} (y_{k+1} - y_k)$$

suppenee oletuksen nojalla. Koska löysimme Cauchy-jonolle (x_n) suppenevan osajonon (y_n) , suppenee alkuperäinen jono (x_n) (Harjoitustehtävä) ja siten E on täydellinen. $\square$

2.1. Lineaariset operaattorit. Olkoot E ja F $\mathbb{K}$ -kertoimisia vektoriavaruuksia. Kuvaus $T: E \rightarrow F$ on *lineaarinen* jos

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \quad \text{kaikilla } x, y \in E \text{ ja } \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Kuvausta T sanotaan tällöin usein *lineaariseksi operaattoriksi* ja merkitään lyhyesti $Tx := T(x)$.

Jo Esimerkissä 0.1 huomasimme, että lineaariset operaattorit eivät aina ole jatkuvia. Tulemme kohta liittämään jatkuvuuden rajoitettuihin lineaarisiin operaattoreihin.

Määritelmä 2.19. Olkoot E ja F normiavaruuksia ja $T: E \rightarrow F$ lineaarinen. Sanomme, että T on *rajoitettu*, jos on olemassa vakio $C < \infty$ jolle

$$\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E \quad \text{kaikilla } x \in E.$$

Esimerkki 2.20. Olkoon $T: \ell^2 \rightarrow \ell^2: (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (3x_{k+1})_{k=1}^{\infty}$. Tällöin T on lineaarinen ja rajoitettu:

$$\|Tx\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |3x_{k+1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 3\|x\|_2.$$

Määritelmä 2.21. Olkoot E ja F normiavaruuksia ja $T: E \rightarrow F$ lineaarinen operaattori. Operaattorin T *normi* on

$$\|T\| := \|T\|_{E \rightarrow F} := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} \in [0, \infty].$$

Kyseessä on todella lineaarisen operaattorin normi mikäli $\|T\| < \infty$.

Lemma 2.22. Lineaarinen operaattori $T: E \rightarrow F$ on rajoitettu jos ja vain jos sen normi on äärellinen.

Todistus. Jos T on rajoitettu, on olemassa vakio $C < \infty$ siten, että

$$\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E \quad \text{kaikilla } x \in E.$$

Erityisesti $\|T\| \leq C$ eli T :n normi on äärellinen.

Oletetaan kääntäen, että $\|T\| < \infty$. Koska $\left\| \frac{x}{\|x\|_E} \right\|_E = 1$ jokaisella $x \in E$, $x \neq 0$, on lineaarisuuden nojalla

$$\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \left\| T \frac{x}{\|x\|_E} \right\|_F \leq \|T\| \quad \text{kaikilla } x \in E.$$

Tästä saamme arvion

$$\|Tx\|_F \leq \|T\| \|x\|_E$$

jokaisella $x \in E$, eli T on rajoitettu. □

Esimerkki 2.23. Olkoon $T: \ell^2 \rightarrow \ell^1: (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (\frac{1}{k}x_k)_{k=1}^\infty$. Onko T rajoitettu? Hölderin epäyhtälöllä nähdään, että

$$\|Tx\|_1 = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} |x_k| \leq \left(\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\pi^2/6} \|x\|_2.$$

Siten T on rajoitettu lineaarinen operaattori avaruudesta ℓ^2 avaruuteen ℓ^1 ja $\|T\| \leq \sqrt{\pi^2/6}$.

Lause 2.24. Olkoot E ja F normiavaruuksia ja $T: E \rightarrow F$ lineaarikuvaus. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- (i) T on rajoitettu operaattori.
- (ii) T on jatkuva E :ssä.
- (iii) T on jatkuva yhdessä pisteessä $x_0 \in E$.

Todistus. Osoitetaan, että (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii): jos $x, y \in E$ ja $\epsilon > 0$, niin

$$\|Tx - Ty\|_F = \|T(x - y)\|_F \leq \|T\| \cdot \|x - y\|_E < \epsilon \quad \text{kun } \|x - y\|_E < \frac{\epsilon}{\|T\|}$$

eli T on jatkuva E :ssä.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): triviaalisti.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Olkoon T jatkuva pisteessä x_0 ja $\epsilon > 0$. Jatkuvuuden nojalla on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\|x - x_0\|_E \leq \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\|_F < \epsilon.$$

Olkoon nyt $x \in E$ jolle $\|x\|_E \leq \delta$. Tällöin lineaarisuuden nojalla

$$\|Tx\|_F = \|T(x + x_0) - Tx_0\|_F < \epsilon.$$

Toisaalta, jos $x \in E$ ja $\|x\|_E \leq 1$, on $\|\delta x\|_E = \delta \|x\|_E \leq \delta$ ja siten

$$\delta \|Tx\|_F = \|T(\delta x)\|_F < \epsilon, \quad \text{eli } \|Tx\|_F < \frac{\epsilon}{\delta}.$$

Niinpä $\|T\| \leq \frac{\epsilon}{\delta}$ ja T on rajoitettu. □

Esimerkki 2.25. Palataan Esimerkkiin 0.3. Olkoon siis $K: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva. Väite: jos määritellään jokaiselle $f \in C([0, 1])$

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x, s)f(s) \, ds, \quad x \in [0, 1]$$

saadaan jatkuva lineaarinen operaattori $T: (C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Tulee siis tarkistaa, että T :n arvot ovat $C([0, 1])$:ssä, että T on lineaarinen ja että T on rajoitettu.

Koska K on jatkuva, on se tasaisesti jatkuva kompaktissa joukossa $[0, 1]^2$. Olkoon $\epsilon > 0$. On siis olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|x - y| = \|(x, s) - (y, s)\|_2 < \delta \Rightarrow |K(x, s) - K(y, s)| < \epsilon \quad \text{kaikilla } x, y, s \in [0, 1].$$

Siten jos $|x - y| < \delta$ ja $f \in C([0, 1])$ on myös

$$\begin{aligned} |(Tf)(x) - (Tf)(y)| &= \left| \int_0^1 K(x, s)f(s) \, ds - \int_0^1 K(y, s)f(s) \, ds \right| \\ &\leq \int_0^1 |K(x, s) - K(y, s)||f(s)| \, ds \leq \epsilon \int_0^1 |f(s)| \, ds \leq \epsilon \|f\|_\infty \end{aligned}$$

eli $Tf \in C([0, 1])$.

Integraalin lineaarisuuden nojalla T on selvästikin lineaarinen.

Tarkistetaan vielä, että T on rajoitettu. Koska K on jatkuva kuvaus kompaktilla joukolla, on se rajoitettu eli on olemassa $M < \infty$ siten, että $|K(x, s)| \leq M$ kaikilla $(x, s) \in [0, 1]^2$. Olkoon nyt $f \in C([0, 1])$. Tällöin

$$\|Tf\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |(Tf)(x)| \leq \sup_{x \in [0, 1]} \int_0^1 |K(x, s)||f(s)| \, ds \leq M\|f\|_\infty,$$

joten $\|T\| \leq M$ ja T on rajoitettu.

2.2. L^p -avaruudet. Olkoon $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mitallinen joukko ja μ Lebesguen mitta $\mathbb{R}^n$:ssä. Määritellään kaikille mitallisille $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ kuvaus

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Tätä käyttäen määritellään normiavaruus $(L^p, \|\cdot\|_p)$. Mitallisten funktioiden joukossa, missä $\|\cdot\|$ on äärellistä, on kuvaus $\|\cdot\|_p$ kuitenkin vain seminormi, sillä integraalin arvo ei muutu muutettaessa funktiota nollamittaisessa joukossa. siksi määrittelemme

$$L^p(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ mitallinen ja } \|f\|_p < \infty\} / \sim,$$

missä $f \sim g$ jos ja vain jos $f(x) = g(x)$ melkein kaikilla $x \in \Omega$. Usein merkitsemme $f \in L^p$ emmekä $[f] \in L^p$, jolloin ymmärretään että otamme $[f]$:n jonkin edustajan.

Jotta näin määritelty avaruus $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ olisi normiavaruus, tulee todistaa, että $\|\cdot\|_p$ on seminormi ennen tekijäavaruuteen siirtymistä. Kolmioepäyhtälö on ehdoista ainoa joka vaatii pidemmän todistuksen.

Luvut $p, q \in \mathbb{R}$ ovat *duaalieksponentit* jos $p > 1$, $q > 1$ ja ne toteuttavat yhtälön

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Todistetaan ensin Hölderin epäyhtälö, joka perinteisesti todistetaan seuraavaa lemmaa käyttäen.

Lemma 2.26. Olkoot p ja q duaalieksponentit, $a \geq 0$ ja $b \geq 0$. Tällöin

$$(2.1) \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Todistus. Jos $a = 0$ tai $b = 0$ on (2.1) selvästi totta. Oletetaan siis, että $a, b > 0$. Määritellään

$$\varphi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}, \quad t > 0.$$

Tällöin

$$\varphi'(t) = t^{p-1} - t^{-q-1} = \frac{t^{p+q} - 1}{t^{q+1}},$$

joten $\varphi'(t) < 0$, kun $0 < t < 1$ ja $\varphi'(t) > 0$, kun $t > 1$. Funktion φ minimi on siis pisteessä $t = 1$ ja siten

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \varphi(1) \leq \varphi(a^{1/q}b^{-1/p}) = \frac{a^{p/q}b^{-1}}{p} + \frac{a^{-1}b^{q/p}}{q}$$

eli

$$ab \leq \frac{a^{p/q+1}}{p} + \frac{b^{q/p+1}}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

Lause 2.27 (Hölderin epäyhtälö). Olkoon p ja q duaalieksponentit ja $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ mitalliset funktiot joille $\|f\|_p < \infty$ ja $\|g\|_q < \infty$. Tällöin

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Todistus. Jos $\|f\|_p = 0$, on $f(x) = 0$ m.k. $x \in \Omega$ ja tällöin myös $fg(x) = 0$ m.k. $x \in \Omega$ ja epäyhtälö on triviaalisti totta. Samoin jos $\|g\|_q = 0$. Voimme siis olettaa, että $\|f\|_p, \|g\|_q > 0$.

Käytetään Lemmaa 2.26 kaikille $x \in \Omega$ valitsemalla

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \quad \text{ja} \quad b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q},$$

jolloin saadaan epäyhtälö

$$\frac{|f(x)||g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p \|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q \|g\|_q^q}, \quad \text{kaikilla } x \in \Omega.$$

Tästä saadaan integroimalla

$$\|f\|_p^{-1} \|g\|_q^{-1} \int_{\Omega} |fg| \, d\mu \leq \frac{1}{p} \|f\|_p^{-p} \int_{\Omega} |f|^p \, d\mu + \frac{1}{q} \|g\|_q^{-q} \int_{\Omega} |g|^q \, d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

□

Hölderin epäyhtälöllä saadaan todistettua Minkowskin epäyhtälö.

Lause 2.28 (Minkowskin epäyhtälö). Olkoot $1 \leq p < \infty$ ja $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ mitallisia funktioita. Tällöin

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Todistus. Tapaus $p = 1$ on helppo, joten oletetaan, että $p > 1$. Voidaan olettaa, että $\|f + g\|_p > 0$. Olkoon $1 < q < \infty$ siten, että p ja q ovat duaaliekspONENTIT. Hölderin epäyhtälön ja $\mathbb{R}$:n kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f + g|^p d\mu &= \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} |f + g| d\mu \leq \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} |f| d\mu + \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} |g| d\mu \\ &\leq \|f\|_p \left(\int_{\Omega} |f + g|^{q(p-1)} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} + \|g\|_p \left(\int_{\Omega} |f + g|^{q(p-1)} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_q) \left(\int_{\Omega} |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Tästä seuraa haluttu epäyhtälö jakamalla puolittain luvulla $\left(\int_{\Omega} |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} > 0$. Tämä on mahdollista, sillä

$$\left(\int_{\Omega} |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{\frac{p}{q}} (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

□

Lause 2.29. Olkoon $1 \leq p < \infty$ ja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen. Tällöin $(L^p, \|\cdot\|_p)$ on Banach-avaruus.

Todistus. Integraalin lineaarisuuden ja Minkowskin epäyhtälön avulla helposti nähdään, että $(L^p, \|\cdot\|_p)$ on normiavaruus. Todistettavana siis lähinnä täydellisyys.

Olkoon $\sum_n f_n$ itseisesti suppeneva sarja avaruudessa L^p , eli $M = \sum_n \|f_n\|_p < \infty$. Tavoitteena on löytää $f \in L^p$ siten, että

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^k f_n - f \right\|_p = 0.$$

Merkitään

$$g_k(x) = \sum_{n=1}^k |f_n(x)|, \quad \text{kaikilla } x \in \Omega,$$

jolloin Minkowskin epäyhtälön nojalla

$$\|g_k\|_p \leq \sum_{n=1}^k \|f_n\|_p \leq M, \quad \text{kaikilla } k \in \mathbb{N}.$$

Monotonisen konvergenssin nojalla

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right)^p d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left(\sum_{n=1}^k |f_n| \right)^p d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\|_p^p \leq M^p < \infty,$$

joten

$$g := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \in L^p.$$

Siten $g(x) < \infty$ melkein kaikilla $x \in \Omega$ ja näillä x sarja

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$