

0. JOHDANTO

Katsotaan kolmen esimerkin avulla millaisiin ongelmiin ääretönulotteisissa vektoriavaruuksissa törmätään ja millaisiin kysymyksiin funktionaalianalyysin avulla pyritään vastaamaan.

Jokainen lineaarikuvaus $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ voidaan esittää muodossa $Lx = Ax$, missä A on matriisi. Erityisesti L on aina jatkuva. Jos $\mathbb{R}^n$ korvataan ääretönulotteisella avaruudella, ei näin aina ole.

Esimerkki 0.1. Asetetaan avaruuteen

$$C_0^\infty(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ on äärettömän monta kertaa derivoituva ja kompaktikantajainen eli } \exists r > 0 \text{ s.e. } f|_{\mathbb{R} \setminus B(0,r)} \equiv 0\}$$

normi

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Näin saadaan *normiavaruus* $(C_0^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Tarkastellaan derivaattakuvausta

$$D: (C_0^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C_0^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty): f \mapsto f'.$$

Kuvaus D on selvästikin lineaarinen. Se ei kuitenkaan ole jatkuva, sillä on olemassa jono $(f_j) \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ siten, että $\|f_j\|_\infty \rightarrow 0$, mutta $\|Df_j\|_\infty \rightarrow \infty$. (Harjoitustehtävä)

Esimerkki 0.2. Etsitään ratkaisua minimointiongelmalle

$$\min_{f \in \Lambda} \int_{-1}^1 |f'(t)|^2 dt,$$

missä

$$\Lambda = \{f \in C^1(\mathbb{R}) : f(-1) = f(1) = 1, f(0) = 0\}$$

Tarkastellaan ensin funktiota $f_k \in \Lambda$, $f_k(t) = |t|^k$, $k > 1$. Nyt

$$\int_{-1}^1 |f'_k(t)|^2 dt = 2 \int_0^1 k^2 t^{2(k-1)} dt = \frac{2k^2}{2k-1} \rightarrow 2, \quad \text{kun } k \rightarrow 1.$$

Siten, jos minimoija $f \in \Lambda$ on olemassa, on sille voimassa

$$(0.1) \quad \int_{-1}^1 |f'(t)|^2 dt \leq 2.$$

Oletetaan nyt, että minimoija f on olemassa. Tällöin

$$(0.2) \quad \begin{aligned} 2 &= (f(1) - f(0)) + (f(-1) - f(0)) = \int_0^1 f'(t) dt - \int_{-1}^0 f'(t) dt \\ &\leq \int_{-1}^1 |f'(t)| dt \leq \sqrt{2} \left(\int_{-1}^1 |f'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Hölderin epäyhtälön nojalla. Yhdistämällä tämä epäyhtälön (0.1) kanssa huomataan, että yllä kaikki epäyhtälöt ovat yhtälöitä. Erityisesti

$$f'(t) \geq 0 \text{ kun } t > 0 \quad \text{ja} \quad f'(t) \leq 0 \text{ kun } t < 0.$$

Siten $f'(0) = 0$ ja tarpeeksi pienelle $\epsilon > 0$ on

$$|f(\epsilon)| < \frac{\epsilon}{10} \quad \text{ja} \quad |f(-\epsilon)| < \frac{\epsilon}{10}.$$

Jälleen Hölderin epäyhtälöllä nähdään, että

$$1 - \frac{\epsilon}{10} \leq f(1) - f(\epsilon) \leq \int_{\epsilon}^1 |f'(t)| \leq \sqrt{1 - \epsilon} \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

eli

$$\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \geq \frac{(1 - \frac{\epsilon}{10})^2}{1 - \epsilon} > 1.$$

Vastaavasti

$$\int_{-1}^0 |f'(t)|^2 dt > 1,$$

joten

$$\int_{-1}^1 |f'(t)|^2 dt > 2,$$

mikä on ristiriidassa f :n minimaalisuuden kanssa. Siten minimoijaa ei ole.

Toisaalta funktio f_1 , $f_1(t) = |t|$, vaikkakaan ei ole C^1 -funktio, on hyvä minimoija siinä mielessä, että kaikki epäyhtälöt (0.2) ovat yhtälöitä. Tulisi siis määritellä ongelmaan sopivampi funktioavaruus Λ . Funktioavaruuden alkuperäisen määritelmän ongelma on se ettei se ole sopivassa mielessä täydellinen.

Esimerkki 0.3. Tarkastellaan integraaliyhtälöä

$$(0.3) \quad f(x) - \lambda \int_0^1 K(x, s) f(s) ds = g(x), \quad x \in [0, 1],$$

missä $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ja $K: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ovat annettuja jatkuvia kuvauksia, sekä $\lambda \in \mathbb{R}$ on parametri. Tehtävänä on löytää funktio, jolle yhtälö (0.3) pätee.

Jotta tehtävää voidaan lähestyä funktionaalianalyysin näkökulmasta, tulee ensin löytää sopiva funktioavaruus ja sille normi. Hyvä ehdokas on $C([0, 1])$ eli välin $[0, 1]$ jatkuvien funktioiden avaruus varustettuna jo Esimerkissä 0.1 käytetyllä $\|\cdot\|_{\infty}$ normilla. Funktioavaruus $(C([0, 1]), \|\cdot\|_{\infty})$ on täydellinen, toisin kuin edellisessä Esimerkissä 0.2 ollut funktioavaruus C^1 varustettuna jollain esimerkin minimointiongelmaan liittyvällä normilla.

Integraaliyhtälöön (0.3) liittyy operaattori (kuvaus)

$$T: C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1]), \quad (Tf)(x) = \int_0^1 K(x, s) f(s) ds, \quad x \in [0, 1].$$

Huomataan, että tämä kuvaus on avaruuden $C([0, 1])$ yhteenlaskun suhteen lineaarinen. Integraaliyhtälö (0.3) voidaan kirjoittaa operaattoriyhtälömuotoon

$$(I - \lambda T)(f) = f - \lambda T(f) = g,$$

missä I on avaruuden $C([0, 1])$ identtinen kuvaus. Kysymys siis on onko lineaarinen operaattori $I - \lambda T$ kääntövä. Myöhemmin tulemme huomaamaan, että pienillä $|\lambda|$:n arvoilla operaattori on kääntövä, mutta toisaalta ei ole sitä kaikilla K , g ja λ .

1. METRISET AVARUUDET

Määritelmä 1.1. Olkoon $X \neq \emptyset$ joukko. Kuvaus $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ on *etäisyys* eli *metriikka* X :ssä, jos se toteuttaa

- (M1) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ kaikilla $x, y, z \in X$,
- (M2) $d(x, y) = d(y, x)$ kaikilla $x, y \in X$ ja
- (M3) $d(x, y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$.

Paria (X, d) eli joukkoa X varustettuna metriikalla d sanotaan *metriseksi avaruudeksi*.

Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $x \in X$ ja $r > 0$. Merkitään

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \quad (\text{avoin pallo})$$

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\} \quad (\text{suljettu pallo})$$

Muistutukseksi metrinen avaruuden käsitteistöä: Joukko $A \subset X$ on *avoin* jos jokaisella $x \in A$ on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x, r) \subset A$. Joukko $A \subset X$ on *suljettu*, jos sen komplementti $A^c = \{x \in X : x \notin A\}$ on avoin. Kuvaus $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ on *jatkuva* pisteessä $x \in X$, jos kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$ aina kun $d(x, y) < \delta$. Kuvaus f on jatkuva X :ssä, jos f on jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in X$.

Perusesimerkki metrisestä avaruudesta on $\mathbb{R}^n$ varustettuna euklidisella metriikalla

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}.$$

Avaruuden (X, d) jono (x_n) *suppenee* alkioon $x \in X$, $x_n \rightarrow x$, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_n, x) < \epsilon$ aina kun $n \geq n_\epsilon$. (X, d) :n osajoukko K on *kompakti*, jos jokaisella K :n jonolla (x_n) on osajono joka suppenee johonkin $x \in K$.

Avaruuden (X, d) jono (x_n) on *Cauchy-jono*, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_m, x_n) < \epsilon$ aina kun $n, m \geq n_\epsilon$. Avaruus (X, d) on *täydellinen*, jos sen jokainen Cauchy-jono suppenee.

Metrinen avaruus (X, d) on *separoituva*, jos on olemassa numeroituva osajoukko $A \subset X$ jolle $\bar{A} = X$. Joukkoa A sanotaan tällöin *tiheäksi* X :ssä.

Esimerkki separoituvasta metrisestä avaruudesta on $\mathbb{R}^n$ euklidisella metriikalla, jossa tiheänä numeroituvana joukkona on $\mathbb{Q}^n$.

Lause 1.2. Jokainen metrinen avaruus (X, d) voidaan täydellistää, eli on olemassa täydellinen $(\bar{X}, \bar{d})$ siten, että X on tiheä $(\bar{X}, \bar{d})$:ssä ja $d(x, y) = \bar{d}(x, y)$ kaikilla $x, y \in X$.

Todistus. (Todistus on ollut metrinen avaruuden kurssilla, joten luennoilla se ohitettiin. Tässä kuitenkin muistutukseksi.)

Asetetaan $\bar{X} = \Phi / \sim$, missä

$$\Phi = \{(x_n) : (x_n) \text{ on Cauchy-jono avaruudessa } X\}$$

ja $(x_n) \sim (y_n)$ jos ja vain jos $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$. Määritellään $\bar{d}([(x_n)], [(y_n)]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$.

Osoitetaan, että funktio $\bar{d}$ on hyvin määritelty. Olkoon $[(x_n)] = [(x'_n)]$ ja $[(y_n)] = [(y'_n)]$. Tällöin

$$\begin{aligned} |\bar{d}([(x_n)], [(y_n)]) - \bar{d}([(x'_n)], [(y'_n)])| &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} d(x'_n, y'_n) \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |d(x_n, x'_n) + d(y'_n, y_n)| = 0. \end{aligned}$$

Siten $\bar{d}$ on hyvin määritelty. Kaikilla $(x_n), (y_n), (z_n) \in \Phi$ on

$$\begin{aligned}\bar{d}([(x_n)], [(z_n)]) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, z_n) \\ &= \bar{d}([(x_n)], [(y_n)]) + \bar{d}([(y_n)], [(z_n)]), \\ \bar{d}([(x_n)], [(y_n)]) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, x_n) = \bar{d}([(y_n)], [(x_n)])\end{aligned}$$

ja

$$\bar{d}([(x_n)], [(x_n)]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_n) = 0.$$

Jos

$$\bar{d}([(x_n)], [(y_n)]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0,$$

on $(x_n) \sim (y_n)$ ja siten $[(x_n)] = [(y_n)]$. On siis osoitettu, että $\bar{d}$ on etäisyysfunktio.

Samaistaen x ja $[(x_n)]$, missä $x_n = x$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, saadaan $X \subset \bar{X}$ ja $\bar{d}(x, y) = d(x, y)$ kaikilla $x, y \in X$. Olkoon $[(x_n)] \in \bar{X}$ ja $\epsilon > 0$. Koska (x_n) on Cauchy, on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $\bar{d}(x_N, [(x_n)]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_N, x_n) < \epsilon$. Siis X on tiheä $\bar{X}$:ssä.

Olkoon $(a_i)_{i=1}^\infty = ((x_n^i))_{i=1}^\infty$ Cauchy-jono $\bar{X}$:ssä. Tiheyden nojalla kaikilla $i \in \mathbb{N}$ on olemassa j_i siten, että $\bar{d}(a_i, x_{j_i}^i) < 1/i$. Koska (a_i) on Cauchy-jono $\bar{X}$:ssä, on $(x_{j_i}^i)_{i=1}^\infty$ Cauchy-jono X :ssä. Siten $a_\infty = [(x_{j_i}^i)] \in \bar{X}$. Nyt

$$\bar{d}(a_i, a_\infty) \leq \bar{d}(a_i, x_{j_i}^i) + d(x_{j_i}^i, a_\infty) < \frac{1}{i} + \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{j_i}^i, x_{j_k}^k) \rightarrow 0,$$

kun $i \rightarrow \infty$. Siis $(\bar{X}, \bar{d})$ on täydellinen. □

Lause 1.3. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus jossa on olemassa ylinumeroituva kokoelma $\mathcal{U}$ avaruuden X avoimia pistevieraita epätyhjiä joukkoja. Tällöin (X, d) ei ole separoituva.*

Todistus. Oletetaan, että (X, d) on separoituva. Tällöin on olemassa numeroituva $A \subset X$ siten, että $\bar{A} = X$. Jokainen $U \in \mathcal{U}$ on epätyhjä ja avoin, joten on olemassa $x_U \in U$ ja $r_U > 0$ siten, että $B(x_U, r_U) \subset U$. Koska A on tiheä X :ssä, on olemassa $a_U \in A \cap B(x_U, r_U)$. Niinpä jokaiseen $U \in \mathcal{U}$ voidaan liittää $\alpha(U) := a_U \in A$. Koska joukot U ovat pistevieraita, on kuvus $\alpha: \mathcal{U} \rightarrow A$ injektio. Siten $\mathcal{U}$ on numeroituva, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. □

2. BANACH-AVARUUDET

Olkoon E vektoriavaruus skalaarikuntana $\mathbb{K}$ (tällä kurssilla aina joko $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$), eli

Määritelmä 2.1. Olkoon $\mathbb{K}$ kunta. Tällöin joukko E varustettuna yhteenlaskulla $E \times E \rightarrow E: (x, y) \mapsto x + y$ ja skalaarikertomisella $\mathbb{K} \times E \rightarrow E: (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ on *vektoriavaruus* ja kuntaa $\mathbb{K}$ sanotaan sen *skalaarikunnaksi*, jos seuraavat ehdot toteutuvat

- (1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ kaikilla $x, y, z \in E$,
- (2) $x + y = y + x$ kaikilla $x, y \in E$,
- (3) On olemassa nollavektori $\bar{0} \in E$ jolle $x + \bar{0} = x$ kaikilla $x \in E$,
- (4) Jokaiselle $x \in E$ on olemassa vastavektori $-x \in E$ jolle $x + (-x) = \bar{0}$,
- (5) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ja $x \in E$,
- (6) $1x = x$ kaikilla $x \in E$, missä 1 on kunnan $\mathbb{K}$ neutraalialkio,
- (7) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ kaikilla $\alpha \in \mathbb{K}$ ja $x, y \in E$, ja
- (8) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ja $x \in E$.

Vektoriavaruuden E dimensio $\dim(E)$ on E :n kannan (vapaan virittäjäjoukon) vektoreiden lukumäärä. Joukko $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset E$ on E :n kanta jos ja vain jos jokaisella $x \in E$ on olemassa yksikäsitteinen esitys

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$

vektoreiden $x_1, x_2, \dots, x_n$ lineaarikombinaationa.

Esimerkkejä 2.2. (1) $\mathbb{C}^n$ on $\mathbb{C}$ -kertoiminen vektoriavaruus, jonka ulottuvuus on n . (Joukko $\{(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$ on eräs avaruuden $\mathbb{C}^n$ kanta).

(2) Kompleksikertoimisten polynomien avaruuden

$$\mathcal{P} = \left\{ p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\},$$

missä yhteenlasku ja skalaarilla kertominen määritellään pisteittäin, on ääretönulotteinen. Eräs kanta on $\{p_n(z) = z^n\}_{n=0}^\infty$.

Määritelmä 2.3. Olkoon E $\mathbb{K}$ -kertoiminen vektoriavaruus. Kuvaus $p: E \rightarrow [0, \infty)$ on *normi* E :ssä, jos

- (N1) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ kaikilla $x, y \in E$,
- (N2) $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ kaikilla $x \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, ja
- (N3) $p(x) = 0$ jos ja vain jos $x = \bar{0}$.

Tavallisesti merkitään $\|x\| = p(x)$. Paria $(E, \|\cdot\|)$ sanotaan *normiavaruudeksi*.

Kuvaus $p: E \rightarrow [0, \infty)$ on *seminormi* E :ssä jos se toteuttaa edellisen määritelmän muut ehdot paitsi ei välttämättä ehtoa (N3). Seminormi p määrittää normin tekijäavaruuteen $E/\sim$, missä $x \sim y$ joss $p(x - y) = 0$. (Semi)normia $p(\cdot)$ merkitään usein $\|\cdot\|$.

Esimerkkejä 2.4. (1) Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ käytetään yleensä euklidista normia

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

Hieman myöhemmin korvataan potenssi 2 yleisemmällä luvulla p ja annetaan ulottuvuuden n mennä äärettömään. Näin saadaan avaruus ℓ^p :

(2) Olkoon $p \in [1, \infty)$. Tällöin ℓ^p -**avaruus** määritellään normiavaruutena

$$\ell^p := \left\{ x = (x_n)_{n=1}^\infty : \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

missä $x_n \in \mathbb{K}$ ja yhteenlasku ja skalaarilla kertominen on määritelty koordinaateittain:

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n) \quad \text{ja} \quad \lambda(x_n) = (\lambda x_n).$$

(3) Olkoon A joukko ja

$$B(A, \mathbb{K}) := \left\{ f: A \rightarrow \mathbb{K} : \|f\|_\infty := \sup_{t \in A} |f(t)| < \infty \right\}.$$

Tämä on rajoitettujen kuvausten $A \rightarrow \mathbb{K}$ vektoriavaruus, jos asetetaan

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \quad (\lambda f)(t) = \lambda f(t) \quad \text{kun } f, g \in B(A, \mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}.$$

Kuvaus $\|\cdot\|_\infty$ on normi $B(A, \mathbb{K})$:ssa. (Harjoitustehtävä)

(4) Edellisen kohdan erikoistapauksena valitsemalla $A = \{1, \dots, n\}$ saadaan normi

$$\|x\|_\infty := \max(|x_1|, \dots, |x_n|),$$

missä $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

(5) Toinen kohdan (2) erikoistapaus saadaan asettamalla $A = \mathbb{N}$. Tällöin merkitään

$$\ell^\infty := B(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \left\{ x = (x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in \mathbb{K}, \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}.$$

Yksinkertainen tapa tuottaa lisää normiavaruuksia on ottaa normiavaruuksien vektoriavaruuksia.

Lause 2.5. Jokainen normiavaruuden $(E, \|\cdot\|)$ vektoriavaruus F on normiavaruus E :n indusoimalla normilla.

Esimerkkejä 2.6. (1) Välin $[0, 1]$ jatkuvien kuvausten avaruutta $C([0, 1])$ voidaan tutkia vaikkapa normiavaruuden $(B([0, 1], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ aliavaruutena.

(2) Avaruuden ℓ^∞ eräitä jonoaliavaruuksia:

$$c := \{(x_n)_n^\infty \in \ell^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ on olemassa}\},$$

$$c_0 := \{(x_n)_n^\infty \in \ell^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}.$$

Lause 2.7. Olkoon $(E, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Tällöin

(1) kaikilla $x, y \in E$ on voimassa

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

Erityisesti, kuvauksen normi $x \mapsto \|x\|$ on tasaisesti jatkuva E :ssä.

(2) kuvaus $\mathbf{d}: E \times E \rightarrow [0, \infty)$, $\mathbf{d}(x, y) = \|x - y\|$ on metriikka avaruudessa E .

Todistus. (Helppo)

□

Normiavaruudet ovat siis metrisiä avaruuksia ja voidaan puhua normiavaruuden avoimista joukoista, jatkuvuudesta jne. Normiavaruudet ovat kuitenkin usein hyvin suuria:

Esimerkki 2.8. Normiavaruus $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ei ole separoituva. Tämä nähdään ottamalla ylinumeroituva joukko (muista, että joukon potenssijoukko on aina mahtavampi kuin joukko itse)

$$F = \{\chi_A : A \subset \mathbb{N}\} \subset \ell^\infty,$$

missä

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in A \\ 0, & \text{jos } x \notin A \end{cases}.$$

Jokaiselle $A, B \subset \mathbb{N}$ on $\|\chi_A - \chi_B\|_\infty = 1$ jos $A \neq B$. Siispä $\{B(f, 1/2)\}_{f \in F}$ on ylinumeroituva kokoelma pistevieraita avoimia joukkoja ℓ^∞ :ssä ja siten ℓ^∞ ei ole separoituva Lauseen 1.3 nojalla.

Lisäksi ääretönulotteisissa normiavaruuksissa avoimet ja suljetut joukot voivat olla joskus ensinäkemältä yllättäviä verrattuna Euklidisiin avaruuksiin.

Esimerkki 2.9. Olkoon

$$A = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in c_0 : |x_n| < \frac{1}{n} \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}\}.$$

Tällöin A ei ole avoin avaruudessa $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.

Esimerkiksi $\bar{0} = (0, 0, \dots) \in A$, mutta kaikilla $r > 0$ on olemassa $m \in \mathbb{N}$ siten, että $\frac{1}{m} < r$, ja tällöin jolle $(x_n)_{n=1}^\infty$, jossa $x_n = \frac{1}{n}$, jos $n = m$ ja $x_n = 0$ muuten, pätee $(x_n)_{n=1}^\infty \in B(\bar{0}, r) \setminus A$. Siten $\bar{0}$ ei ole A :n sisäpiste eikä A ole avoin.

Normiavaruus $(E, \|\cdot\|)$ on *täydellinen*, jos $(E, \|\cdot\|)$ on täydellinen metrinen avaruus. Täydellistä normiavaruutta kutsutaan *Banach-avaruudeksi*.

Lause 2.10. Jokainen normiavaruus $(E, \|\cdot\|_1)$ voidaan täydellistää, eli on olemassa Banach-avaruus $(\bar{E}, \|\cdot\|_2)$ siten, että E on tiheä avaruudessa $(\bar{E}, \|\cdot\|_2)$ ja $\|x\|_1 = \|x\|_2$ kaikilla $x \in E$.

Todistus. (Harjoitustehtävä, vertaa Lauseeseen 1.2.) □

Lause 2.11. Avaruus $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ on Banach-avaruus kaikilla $p \in [1, \infty]$.

Todistus. Todistus p :n äärellisille arvoille nähdään myöhemmin L^p -avaruuksien tapauksessa. Seuraavassa lauseessa nähdään tapaus $p = \infty$ yleisemmässä kontekstissa. □

Lause 2.12. $(B(A, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ on Banach-avaruus.

Todistus. Olkoot (x_n) Cauchy-jono avaruudessa $(B(A, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$, $\epsilon > 0$ ja $t \in A$. Koska on olemassa $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|x_k(t) - x_m(t)| \leq \|x_k - x_m\|_\infty < \epsilon \quad \text{kaikilla } k, m \geq n_\epsilon$$

on $(x_k(t))_{k=1}^\infty$ Cauchy-jono avaruudessa $\mathbb{K}$. Koska $\mathbb{K}$ on täydellinen, on olemassa $x(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) \in \mathbb{K}$.

Todistaaksemme lauseen väite, tulee nyt osoittaa, että

- (1) $x \in (B(A, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ ja
- (2) $x_n \rightarrow x$ kun $n \rightarrow \infty$ avaruudessa $(B(A, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$.

Olkoot $\epsilon > 0$ ja $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ kuten yllä. Kun $m \geq n_\epsilon$, saadaan

$$\|x_m - x\|_\infty = \sup_{t \in A} |x_m(t) - x(t)| \leq \sup_{t \in A} \lim_{k \rightarrow \infty} |x_m(t) - x_k(t)| \leq \epsilon,$$