

Ex 1.1: Asetetaan kaikille $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|.$$

Osoita, että $(C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ on normiavaruus.

Ex 1.2: Olkoon D derivaattikuvaus:

$$D : (C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty) \ni f \mapsto f' \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty).$$

Osoita, että D ei ole jatkuva.

[vihje: löydä jono $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ siten, että $\|f_j\|_\infty \rightarrow 0$ ja $\|Df_j\|_\infty \rightarrow \infty$].

Ex 1.3: Olkoon $(E, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Osoita, että kuvaus

$$d : E \times E \ni (x, y) \mapsto \|x - y\| \in [0, \infty)$$

on metriikka avaruudessa E .

Ex 1.4: Olkoon $(E, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Osoita, että kaikilla $x, y \in E$ on voimassa

$$|||x| - |y||| \leq \|x - y\|.$$