Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka

Johdatus matemaattiseen analyysiin 3 (MATA173)
Kurssitentti 29.3.2023

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 4h. Vastaa kaikkiin viiteen tehtävään ja perustele ratkaisusi huolella. Tehtävien alakohdat ovat keskenään samanarvoisia ellei muuta mainita.

1. Ovatko seuraavat väitteet totta vai tarua? Todista tai anna vastaesimerkki.

(a) Jos funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä 1, niin se on derivoituva pisteessä 1.

(b) Jos funktio $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on derivoituva ja aidosti kasvava, niin $g'(0) > 0$.

(c) Jos funktiolla $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on toispuoleiset derivaatat pisteessä 0, niin se on jatkuva pisteessä 0.

Ratkaisu.

(a) **Väittämä on tarua:** Vastaesimerkiksi käy jatkuva funktio

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x-1|.$$

Tälle funktiolle on voimassa

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|1+h-1|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} \overset{h\geq 0}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

ja

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|1+h-1|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} \overset{h\leq 0}{=} \lim_{h\to 0^-} -\frac{h}{h} = -1,$$

joten toispuoleisille derivaatoille pätee

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \neq \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}.$$

Näin ollen raja-arvoa

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

ei ole olemassa, eli toisin sanoen f ei ole derivoituva pisteessä 1.

(b) **Väittämä on tarua:** Vastaesimerkiksi käy funktio

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^3.$$

Tämä funktio on polynomifunktiona kaikkialla derivoituva ja lisäksi aikaisempien JMA-kurssien tietojen valossa se on myös aidosti kasvava. Kuitenkin funktion derivaattafunktiolle

$$g'(x) = 3x^2$$

pätee $g'(0) = 0$.

(c) **Väittämä on totta:**

Tapa 1: Oletetaan, että $\varepsilon > 0$. Koska toisenpuoleiset derivaatat ovat olemassa origossa, niin voidaan merkitä

$$L_1 := \lim_{t\to 0^+} \frac{h(t)-h(0)}{t} \quad \text{ja} \quad L_2 := \lim_{t\to 0^-} \frac{h(t)-h(0)}{t}.$$

Tällöin raja-arvon määritelmän nojalla löytyy $\delta_1 > 0$ siten, että

$$\frac{|h(t)-h(0)|}{|t|} - |L_1| \leq \left|\frac{h(t)-h(0)}{t} - L_2\right| < 1 \quad \text{aina, kun } 0 < t < \delta_1,$$

eli

$$|h(t)-h(0)| < |t|(1+|L_1|) \quad \text{aina, kun } 0 < t < \delta_1.$$

Vastaavaan tapaan löytyy $\delta_2 > 0$ siten, että

$$|h(t)-h(0)| < |t|(1+|L_2|) \quad \text{aina, kun } -\delta_2 < t < 0.$$

Valitsemalla

$$\delta = \min\left\{\delta_1, \delta_2, \frac{\varepsilon}{2+|L_1|+|L_2|}\right\}$$

havaitaan, että

$$|h(t)-h(0)| < |t|(1+|L_1|) + |t|(1+|L_2|) = |t|(2+|L_1|+|L_2|) < \varepsilon$$

aina, kun $|t-0| < \delta$. Siispä h on jatkuva.

Tapa 2: Funktion h jatkuvuuden osoittamiseksi origossa riittää näyttää, että

$$\lim_{t\to 0} h(t) = h(0).$$

Merkitemällä

$$L_1 := \lim_{t\to 0^+} \frac{h(t)-h(0)}{t} \quad \text{ja} \quad L_2 := \lim_{t\to 0^-} \frac{h(t)-h(0)}{t}$$

havaitaan, että

$$\lim_{t\to 0^+} [h(t)-h(0)] = \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{h(t)-h(0)}{t}\right) t = \left[\lim_{t\to 0^+} \frac{h(t)-h(0)}{t}\right]\left(\lim_{t\to 0^+} t\right) = L_1 \cdot 0 = 0$$

ja

$$\lim_{t\to 0^-} [h(t)-h(0)] = \lim_{t\to 0^-} \left(\frac{h(t)-h(0)}{t}\right) t = \left[\lim_{t\to 0^-} \frac{h(t)-h(0)}{t}\right]\left(\lim_{t\to 0^-} t\right) = L_2 \cdot 0 = 0\,.$$

Näistä kahdesta rajatarkastelusta seuraa yhdessä, että

$$\lim_{t\to 0} h(t) = h(0),$$

joten h on jatkuva origossa.

Arvioinnista:

(a) Sopivan vastaesimerkin esittämisestä tässä tehtävässä on saanut vähillä perusteluilla jo täydet pisteet. Ainoastaan osittain oikeiden vastauksien arvioinnissa on kuitenkin käytetty seuraavia lisäkriteereitä:

• Jos on annettu esimerkki funktiosta, jossa tarkastelupiste ei ole pyydetty piste $x_0 = 1$ (-0.5p)

• On päädytty oikeaan johtopäätökseen ja osattu pohjustaa omaa johtopäätöstä hyvin, mutta vastaesimerkkiä ei ole osattu antaa (max 1p)

(b) Sopivan vastaesimerkin esittämisestä tässä tehtävässä on saanut vähillä perusteluilla jo täydet pisteet. Ainoastaan osittain oikeiden vastauksien arvioinnissa on kuitenkin käytetty seuraavia lisäkriteereitä:

• Jos johtopäätös on väärin, mutta perustelut ovat sen verran perusteelliset, että niistä pystyy helposti näkemään, missä virhepäätelmä on syntynyt (max 0.5p)

(c) Tässä tehtävässä haettiin positiivisen väitteen todistusta ja arvioinnissa keskityttiin perustelujen laatuun:

• Virheetön tai lähes virheetön todistus (1.5p–2p)

• Jos johtopäätös on oikea ja todistusta on lähdetty viemään oikeaan suuntaan, mutta todistuksessa on isoja puutteita (1p)

• Jos johtopäätös oikein ja perustelujakin on yritetty tehdä, mutta ne ovat todella pahasti virheelliset (0.5p)

---

2. (a) Osoita, että funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} - 1\,, & \text{jos} \quad x \geq 1, \\ x^2 + |x-1|\,, & \text{jos} \quad x < 1, \end{cases}$$

on derivoituva, ja määrää sen derivaattafunktio. Kurssin lauseita voi hyödyntää.

(b) Osoita Differentiaalilaskennan väliarvolausetta hyödyntäen, että

$$|\cos x - \cos y| \leq |x - y| \qquad \text{kaikilla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Ratkaisu.

(a) Aluksi havaitaan itseisarvon määritelmää käyttäen, että itse asiassa

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} - 1\,, & \text{jos} \quad x \geq 1, \\ x^2 - x + 1\,, & \text{jos} \quad x < 1. \end{cases}$$

Tarkastellaan funktion f derivoituvuutta seuraavaksi tarkemmin joukoissa $x > 1$, $x < 1$ ja $x = 1$:

Derivoituvuus joukossa $x > 1$**:** Kurssin tietojen valossa funktiot

$$x \mapsto 2, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{ja} \quad x \mapsto -1$$

ovat derivoituvia joukossa $x > 1$. Koska tässä joukossa funktio

$$f(x) = 2\sqrt{x} - 1$$

saadaan muodostettua summaamalla ja kertomalla edellä mainittuja derivoituvia funktioita keskenään, niin myös f on derivoituva joukossa $x > 1$. Lisäksi kurssin derivointisääntöjen nojalla

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

jokaiselle $x > 1$.

Derivoituvuus joukossa $x > 1$: Joukossa $x < 1$ funktio

$$f(x) = x^2 - x + 1$$

on polynomifunktiona derivoituva ja sen derivaatta on

$$f'(x) = 2x - 1$$

jokaiselle $x < 1$.

Derivoituvuus pisteessä $x = 1$: Koska toispuoleisille derivaatoille

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - x + 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} x = 1$$

ja

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2\sqrt{x} - 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{\sqrt{x} + 1} = 1$$

pätee

$$f'_-(1) = 1 = f'_+(1),$$

niinfunktio f on derivoituva pisteessä $x = 1$ ja seen derivaatta tässä pisteessä on $f'(1) = 1$.

Funktion f derivaattafunktio: Edellisten kohtien nojalla f on siis derivoituva ja sen derivaatta on

$$f' \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{jos } \ x \geq 1, \\ 2x - 1, & \text{jos } \ x < 1. \end{cases}$$

(b) Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$. Jos $x = y$, niin silloin

$$|\cos x - \sin y| = 0 = |x - y|,$$

joten väite on selvästi totta tässä tapauksessa. Siispä voidaan olettaa, että $x \neq y$. Määritellään nyt funktio

$$f \colon [x, y] \to \mathbb{R}, \quad f(z) = \cos z.$$

Tämä funktio on jatkuva määrittelyvälillään $[x, y]$ ja lisäksi se on derivoituva määrittelyvälinsä sisuksessa $]x, y[$, joten differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c) \quad \text{jollekin } c \in]x, y[.$$

Yhdistämällä tämän arvioon

$$|f'(c)| = |-\sin c| \leq 1 \quad \text{kaikilla } c \in]x, y[$$

saadaan, että

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| \leq |x - y|,$$

mistä väite seuraa.

Arvioinnista:

(a)

• Derivoituvuuden määrääminen pisteen 1 ulkopuolella, sisältäen pisteen $x = 0$ erityisaseman huomioimisen tarkastelussa (+1p)

• Derivoituvuuden tarkastaminen erikoispisteessä $x_0 = 1$ (+1p)

• Derivaattafunktion määrääminen koko funktiolle (+1p)

(b)

• Väliarvolauseen oikeanlainen soveltaminen (+1p)

• Väliarvolauseen oletuksien tarkastaminen. Tämä kohta on saanut jäädä väliin, jos tehtävä on muuten tehty virheettömästi (+0.5p)

• Funktion derivaatan määrääminen (+0.5p)

• Funktion derivaatan sopiva arvioiminen (+0.5p)

• Varsinaisen arvion johtaminen (+0.5p)

---

3. (a) Määrittele Riemann-integraaliin liittyvät käsitteet "välin jako", "alasumma" ja "alaintegraali".

(b) Olkoon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{jos } \ x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \cap \mathbb{Q}, \\ 0\,, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Käyttäen ainoastaan Riemann-integraalin määritelmää, osoita että funktio f ei ole integroituva.

Ratkaisu. (a)
- *Välin* $[a,b]$ *jaoksi* sanotaan sellaista äärellistä joukkoa $P \subset [a,b]$, johon kuuluu välin päätepisteet.
- Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio ja $P = \{x_0, ..., x_n\}$ jokin välin $[a,b]$ jako, missä $n \in \mathbb{N}$ ja $x_{i-1} < x_i$ kaikilla $i \in \{1, ..., n\}$. Merkitään $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ kaikilla $i \in \{1, ..., n\}$. Jakoon P liittyvä funktion f *alasumma* on

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in I_i} f(x)(x_i - x_{i-1}).$$

- Edellä mainitun funktion f *alaintegraali* on

$$\text{ala} \int_a^b f = \sup \{L(f, P) \ : \ P \text{ on välin } [a,b] \text{ jako}\}.$$

(b) Olkoon $P = \{x_0, ..., x_n\}$ jokin välin $[0,1]$ jako, ja merkitään osavälejä I_i kuten a-kohdassa. Tutkitaan ensin jakoon P liittyvää funktion f alasummaa. Huomataan, että funktio kuvaa kaikki välin $[0,1]$ irrationaaliluvut luvuksi 0. Koska irrationaalilukujen joukko $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ on reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ tiheä osajoukko, on $I_i \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$ kaikilla $i \in \{1, ..., n\}$. Siten

$$\inf_{x \in I_i} f(x) = 0 \quad \text{kaikilla} \quad i \in \{1, ..., n\}, \quad \text{joten} \quad L(f, P) = 0.$$

Koska P on mielivaltainen, tästä seuraa että

$$\text{ala} \int_a^b f = 0.$$

Tutkitaan seuraavaksi alussa kiinnitettyyn välin jakoon P liittyvää funktion f yläsummaa. Koska $a = x_0 \in P$, on sellainen indeksi $i_1 \in \{0, ..., n-1\}$ että

$$x_{i_1} \leq \frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad x_{i_1+1} > \frac{1}{2}.$$

Toisaalta, koska $b = x_n \in P$, on sellainen indeksi $i_2 \in \{1, ..., n\}$ että

$$x_{i_2} \geq \frac{3}{4} \quad \text{ja} \quad x_{i_2-1} < \frac{3}{4}.$$

Koska rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on tiheä, saadaan

$$\begin{aligned} U(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in I_i} f(x)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=i_1+1}^{i_2} \sup_{x \in I_i} f(x)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=i_1+1}^{i_2} (x_i - x_{i-1}) = x_{i_2} - x_{i_1} \geq \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

ja koska jako P on mielivaltainen, tästä seuraa että

$$\text{ylä} \int_a^b f \geq \frac{1}{4}.$$

Siis on

$$\text{ala} \int_a^b f \neq \text{ylä} \int_a^b f,$$

joten funktio f ei ole integroituva.

Arvioinnista: a-kohdassa jokaisesta täysin oikeasta määritelmästä piste, vajavaisista mutta oikeita elementtejä sisältävistä puoli pistettä. B-kohdassa jos ymmärsi mitä integroituvuus tarkoittaa +0.5 p, jos ratkaisusta kävi selvästi ilmi rationaali- ja irrationaalilukujen tiheys + 0,5 p, alaintegraalin päättely +0,5 p, yläintegraalin päättely +1,5 p.

---

4. (a) Muotoile lause, jonka nimi on Riemannin ehto. (Lausetta ei pidä todistaa.) (2 p.)

(b) Käyttäen ainoastaan Riemannin ehtoa, osoita että jos funktiot $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ovat integroituvia, niin summafunktio $(f+g) : [0,1] \to \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, on integroituva. (4 p.)

Ratkaisu. (a) Lause (Riemannin ehto). Rajoitettu funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva, jos ja vain jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on välin jako P_ε siten, että $U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$.

(b) Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska funktiot f ja g ovat integroituvia, on sellaiset välin $[a, b]$ jaot P_1 ja P_2 että

$$U(f, P_1) - L(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ja} \quad U(g, P_2) - L(g, P_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Olkoon $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$. Merkitään $P_\varepsilon = \{x_0, ..., x_n\}$ ja $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ kaikilla $i \in \{1, ..., n\}$. Koska kaikilla $i \in \{1, ..., n\}$ pätee

$$\sup_{x \in I_i}(f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in I_i} f(x) + \sup_{x \in I_i} g(x)$$

ja

$$\inf_{x \in I_i}(f(x) + g(x)) \geq \inf_{x \in I_i} f(x) + \inf_{x \in I_i} g(x),$$

saadaan arviot

$$\begin{aligned}
U(f + g, P_\varepsilon) &= \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in I_i}(f(x) + g(x))(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in I_i} f(x)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in I_i} g(x)(x_i - x_{i-1}) \\
&= U(f, P_\varepsilon) + U(g, P_\varepsilon) \leq U(f, P_1) + U(g, P_2)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
L(f + g, P_\varepsilon) &= \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in I_i}(f(x) + g(x))(x_i - x_{i-1}) \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in I_i} f(x)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in I_i} g(x)(x_i - x_{i-1}) \\
&= L(f, P_\varepsilon) + L(g, P_\varepsilon) \geq L(f, P_1) + L(g, P_2).
\end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned}
U(f + g, P_\varepsilon) - L(f + g, P_\varepsilon) &\leq U(f, P_1) + U(g, P_2) - (L(f, P_1) + L(g, P_2)) \\
&= (U(f, P_1) - L(f, P_1)) - (U(g, P_2) - L(g, P_2)) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Siis Riemannin ehdon nojalla funktio $(f + g)$ on integroituva.

Arvioinnista: a-kohdassa oikeita elementtejä +1p, kaikki kunnossa +1p. B-kohta: Jos ymmärsi mitä on tarkoitus todistaa +1p, jos osasi muotoilla funktioista f ja g Riemannin ehdon pohjalta saatavat tiedot ja muodostaa yhteisen hienonnuksen +1p, jos sai kytkettyä summafunktion ylä- ja alasummien erotuksen funktioiden f ja g ylä- ja alasummiin +1p, loppupäätelmät +1p.)

---

5. (a) Osoita arvio

$$\int_2^{-1} \frac{x^3 \sin^2 x}{e^x}\, dx \leq \frac{3}{4}.$$

(b) Osoita, että funktio $f\colon]0,2[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_1^{x^3+1} 5t^2 - 2\,dt,$$

on derivoituva, ja laske $f'(1)$.

Ratkaisu.

(a) Funktio

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^3 \sin^2 x}{e^x}$$

on suljetun ja rajoitetun välin jatkuvana funktio integroituva. Suoraan arvioimalla saadaan

$$\begin{aligned}
\int_2^{-1} \frac{x^3 \sin^2 x}{e^x}\,dx &= -\int_{-1}^{2} \frac{x^3 \sin^2 x}{e^x}\,dx \\
&= \int_{-1}^{0} \overbrace{\frac{-x^3 \sin^2 x}{e^x}}^{\geq 0 \text{ kaikilla } x}\,dx + \int_0^2 \overbrace{\frac{-x^3 \sin^2 x}{e^x}}^{\leq 0 \text{ kaikilla } x}\,dx \\
&\leq \int_{-1}^{0} \frac{-x^3 \sin^2 x}{e^x}\,dx \\
&\leq e \int_{-1}^{0} -x^3\,dx \\
&= \frac{e}{4} \\
&\leq \frac{3}{4},
\end{aligned}$$

mistä haluttu arvio seuraa.

(b) Määritellään aluksi funktiot $H, g\colon]0,2[\to \mathbb{R}$ asettamalla

$$H(x) = \int_1^x 5t^2 - 2\,dt \quad \text{ja} \quad g(x) = x^3 + 1.$$

Tällöin analyysin peruslauseen nojalla H on jatkuvan funktion $h(x) = 5x^2 - 2$ integraalifunktiona derivoituva ja lisäksi

$$H'(x) = h(x) = 5x^2 - 2.$$

Vastaavasti funktio g on polynomina derivoituva ja sen derivaatta on

$$g'(x) = 3x^2.$$

Siispä ketjusäännön nojalla myös funktio $f = H \circ g$ on derivoituva ja sen derivaatalle pisteessä $x_0 = 1$ pätee

$$f'(1) = H'(g(1))g'(1) = h(g(1))g'(1) = 3h(2) = 3 \cdot 18 = 54.$$

Arvioinnista:

(a)

- Funktion integroituvuuden todentaminen (+0.5p)
- Neperin luvun sopiva arvioiminen (+0.5p)
- Integrointivälin jakaminen sopiviin osaväleihin (+0.5p)

• Integrointijärjestyksen muuttaminen (+0.5p)

• Negatiivisen integrointipalasen arvioiminen nollalla ylhäältä (+0.5p)

• Funktioiden $\sin^2(x)$ ja e^{-x} sopiva arvioiminen (+0.5p)

(b)

• Oikea arvo derivaatalle $f'(1)$ (+0.5p)

• Derivoituvuuden perusteleminen (+1p)

• Derivaattafunktio f' laskeminen tavalla tai toisella sellaiseen muotoon, että sen avulla on mahdollista laskea $f'(1)$ (+1p)

• Analyysin peruslauseen soveltaminen (+0.5p)
