Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka

Johdatus matemaattiseen analyysiin 3 (MATA173)
Kurssitentti 8.3.2023

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 4h. Vastaa kaikkiin tehtäviin ja perustele huolella. Tehtävien alakohdat ovat keskenään samanarvoisia ellei muuta mainita.

1. (a) Olkoon $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ funktio, joka on derivoituva pisteessä 1. Osoita derivaatan määritelmää hyödyntäen, että funktio f on jatkuva pisteessä 1.

(b) Osoita, että funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{jos} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{jos} \quad x = 0, \end{cases}$$

on derivoituva, ja määrää sen derivaattafunktio f'. Kurssin lauseita voi hyödyntää.

Ratkaisu. (a) Olkoon $x \in]0, 2[\setminus \{1\}$. Oletuksen nojalla pätee

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1),$$

ja koska

$$\lim_{x \to 1} (x - 1) = 0,$$

raja-arvon algebrallisten ominaisuuksien nojalla funktiolla

$$f(x) - f(1) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot (x - 1)$$

on raja-arvo kun $x \to 1$, ja

$$\lim_{x \to 1} (f(x) - f(1)) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \lim_{x \to 1} (x - 1) = f'(1) \cdot 0 = 0.$$

Siis funktio f on jatkuva pisteessä 1.

Arvioinnista: Derivaatan määritelmä +1p, sai kytkettyä jatkuvuuden analysointiin erotusosamäärää mutta perustelut ontuivat +1p, perustelut kunnossa +1p.

(b) Olkoon ensin $x_0 \neq 0$. Derivaatan osamäärää koskevan lauseen nojalla funktio $\frac{1}{x}$ on derivoituva tässä pisteessä, ja koska sinifunktio on kaikkialla derivoituva, myös yhdistetty funktio $\sin(\frac{1}{x})$ on derivoituva pisteessä x_0. Tulon derivointia koskevan lauseen nojalla funktio x^4 ja edelleen $x^4 \sin(\frac{1}{x})$ on derivoituva pisteessä x_0, ja näiden lauseiden pohjalta kaikilla $x \neq 0$ on

$$D\left(x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 4x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^4 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 4x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Osoitetaan derivoituvuus nollassa erotusosamäärän avulla. Olkoon $h \neq 0$. Tällöin

$$\left|\frac{f(0+h) - f(0)}{h}\right| = \left|\frac{h^4 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h}\right| = |h|^3 |\sin\left(\frac{1}{h}\right)| \leq |h|^3.$$

Koska $|h|^3 \to 0$ kun $h \to 0$, suppiloperiaatteen nojalla

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0 = f'(0).$$

Siis funktio f on derivoituva ja

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{jos} \quad x \neq 0, \\ 0\,, & \text{jos} \quad x = 0. \end{cases}$$

Arvioinnista: Derivoituvuuden perustelu nollan ulkopuolella +1p, derivaatan laskeminen nollan ulkopuolella +1p, derivoituvuuden perustelu ja määritys nollassa +1p.

---

2. (a) Muotoile Differentiaalilaskennan väliarvolause. (2 p.)

(b) Osoita luonnolliselle logaritmille arvio

$$\frac{1}{21} < \log 2023 - \log 1923 < \frac{1}{19}\,. \quad \text{(4 p.)}$$

Ratkaisu. (a) Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio, joka on derivoituva avoimella välillä $]a,b[$. Tällöin on olemassa sellainen piste $c \in]a,b[$, että

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Arvioinnista: Lauseen henkeä näkyvissä +1p, täysin oikea muotoilu +1p.

(b) Olkoon $f : [1923, 2023] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log x$. Tällöin funktio f toteuttaa Differentiaalilaskennan väliarvolauseen oletukset, joten on sellainen $c \in]1923, 2023[$, että

$$\log 2023 - \log 1923 = f(2023) - f(1923) = \frac{f(2023)-f(1923)}{2023-1923} \cdot 100 = f'(c) \cdot 100 = \frac{100}{c}.$$

Saadaan siis arviot

$$\log 2023 - \log 1923 = \frac{100}{c} > \frac{100}{2023} > \frac{100}{2100} = \frac{1}{21},$$

ja

$$\log 2023 - \log 1923 = \frac{100}{c} < \frac{100}{1923} < \frac{100}{1900} = \frac{1}{19}.$$

Arvioinnista: (Nämä periaatteet siis sellaisiin ratkaisuihin joissa pyrittiin käyttämään a-kohdan "vinkiksi"tarkoitettua DVAL:ia; jos käytti jotain muuta menetelmää, arviointi samantyyppisesti.) Jos tarkasteli logaritmifunktiota ja osasi derivoida sen +1p, jos osasi kertoa mitä DVAL tässä tilanteessa kertoo +1p, jos osasi perustella miksi 100/c on tavoiteltavassa haarukassa +2p. (näitä kahta viimeistä pistettä ei siis saanut jos vain sanoi ilman mitään perusteluja että näin on.)

---

3. Käyttäen ainoastaan Riemann-integraalin määritelmää, osoita että funktio $f : [0,2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{jos } \ x \in [0,1], \\ 5\,, & \text{jos } \ x \in]1,2], \end{cases}$$

on integroituva, ja määritä integraalin $\int_0^2 f(x)\,dx$ arvo. (Summakaavasta $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ on hyötyä.)

Ratkaisu. Olkoon $P_n = \{x_0, x_1, ..., x_{n+2}\}$ sellainen välin $[0,2]$ jako, että $x_0 = 0$, $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$ kaikilla $i \in \{1, ..., n+1\}$, ja $x_{n+2} = 2$. Siis pisteet $x_0, ..., x_n$ muodostavat välin $[0,1]$ tasavälisen jaon, $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{n}$ ja $x_{n+2} = 2$. Merkitään $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ kaikilla $i \in \{1, ..., n+2\}$, ja

$$m_i = \inf_{x \in I_i} f(x), \qquad M_i = \sup_{x \in I_i} f(x).$$

Huomataan, että

$$m_i = f(x_{i-1}) = 2x_{i-1} = 2\frac{i-1}{n} \qquad \text{kaikilla } \ i \in \{1, ..., n\},$$

$$m_{n+1} = f(1) = 2 \ \text{ ja } \ m_{n+2} = 5.$$

Huomataan myös, että

$$M_i = f(x_i) = 2x_i = 2\frac{i}{n} \qquad \text{kaikilla } \ i \in \{1, ..., n\},$$

$$M_{n+1} = 5 = M_{n+2}.$$

Tutkitaan ensin funktion f alasummaa välillä $[0,2]$ välin jaolla P_n:

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n+2} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_{n+1}(x_{n+1} - x_n) + m_{n+2}(x_{n+2} - x_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(2\frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) + 2\frac{1}{n} + 5\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{2}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1} j + 5 - \frac{3}{n} = \frac{n(n-1)}{n^2} + 5 - \frac{3}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1 + 5 = 6. \end{aligned}$$

Yläsummalle saadaan

$$\begin{aligned} U(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n+2} M_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) + M_{n+1}(x_{n+1} - x_n) + M_{n+2}(x_{n+2} - x_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(2\frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) + 5\frac{1}{n} + 5\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + 5 = \frac{(n+1)n}{n^2} + 5 \xrightarrow{n\to\infty} 1 + 5 = 6. \end{aligned}$$

Koska kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$L(f, P_n) \leq \text{ala} \int_0^2 f \leq \text{ylä} \int_0^2 f \leq U(f, P_n),$$

suppiloperiaatteen nojalla on

$$\text{ala} \int_0^2 f = \text{ylä} \int_0^2 f = 6,$$

joten funktio f on integroituva, ja

$$\int_0^2 f = 6.$$

Arvioinnista: Välin jaon määrittäminen +0,5p, Lukujen m_i ja M_i määrittäminen +1p, lähdetty todentamaan integroituvuutta +1p, alaintegraalin laskeminen +1,5p, yläintegraalin laskeminen +1,5p, oikea vastaus +0,5p. (Lisähuomioita: Ylä- ja alaintegraaleja laskettaessa ylä- ja alasumman oikeasta määritelmästä on saanut suoraan yhteensä +0,5p. Jos epäjatkuvuuspisteen vaikutusta ei ole osattu ottaa huomioon lukuja m_i ja M_i määritettäessä -0,5p. Jos vakiofunktion integroituvuutta ei ole perusteltu määritelmästä lähtien -1p. Tehtävässä ei menettänyt pisteitä, jos funktion integroituvuuden perusteli oikein määritelmästä lähtien ja tämän jälkeen varsinaisen integraalin laski muilla tavoilla.)

---

4. Olkoot $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ rajoitettuja funktioita. Ovatko seuraavat väitteet totta vai tarua? Todista tai anna perusteltu vastaesimerkki.

(a) Jos funktio $f + g$ on integroituva, niin funktiot f ja g ovat integroituvia.

(b) Jos funktio f on integroituva, niin integraalifunktio $F : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt,$$

on derivoituva pisteessä $\frac{1}{2}$.

Ratkaisu. (a) Väite on tarua. Vastaesimerkki: Olkoot $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0, & \text{jos } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

ja $g = -f$. Tällöin funktio $f + g$ on vakiofunktiona integroituva. Perustellaan, miksi funktiot f ja g eivät ole integroituvia. Olkoon P mielivaltaisesti valittu välin $[0,1]$ jako. Koska sekä rationaali- että irrationaalilukujen joukot ovat tiheitä, on

$$U(f,P) = 1, \quad L(f,P) = 0, \quad U(g,P) = 0, \quad L(g,P) = -1,$$

joten

$$\text{ala} \int_0^1 f = 0 \neq 1 = \text{ylä} \int_0^1 f$$

ja

$$\text{ala} \int_0^1 g = -1 \neq 0 = \text{ylä} \int_0^1 g.$$

Arvioinnista: Vastasi tarua ja mainitsi, että vaikka f ei olisi integroituva, $f + (-f)$ (tai vastaava) on +1p. Jos osasi edellisen lisäksi antaa esimerkin ei-integroituvasta funktiosta +1p. Jos vielä *perusteli* (huomaa tehtävänanto) että esimerkkifunktio ei ole integroituva, +1p.

(b) Väite on tarua. Vastaesimerkki: Olkoon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos} \quad x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1\,, & \text{jos} \quad x \in]\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Tällöin funktiolla f on vain yksi epäjatkuvuuspiste, joten se on integroituva. Tutkitaan sen integraalifunktion F(kiinnitetyllä alarajalla 0) lauseketta. Jos $x \in [0, \frac{1}{2}]$, on $F(x) = 0$, ja jos $x \in]\frac{1}{2}, 1]$, on

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^{1/2} f(t)\,dt + \int_{1/2}^x f(t)\,dt = \int_{1/2}^x 1\,dt = x - \frac{1}{2}.$$

Siis funktion F toispuoleisille derivaatoille pisteessä $\frac{1}{2}$ pätee

$$F'_-(\frac{1}{2}) = 0 \neq 1 = F'_+(\frac{1}{2}),$$

joten funktio F ei ole derivoituva pisteessä $\frac{1}{2}$.

Arvioinnista: Jos jollain lailla kävi ilmi, että ilman tietoa funktion f jatkuvuudesta ei voi olla varma integraalifunktion derivoituvuudesta +1p, jos osasi antaa oikeanlaisen esimerkkifunktion f ja määrittää integraalifunktion +1p, ja jos vielä perusteli miksi F ei ole derivoituva tarkastelupisteessä +1p.

---

5. (a) Perustele kurssin lauseita hyödyntäen, että

$$\left| \int_2^{-1} x^5 e^{\sin x}\,dx \right| < 33.$$

(b) Määritä perustellen funktion $F\colon [-1,4] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_4^x (t^8 - t^7) \cos t\,dt,$$

lokaalit maksimi- ja minimikohdat.

Ratkaisu. (a) Funktio $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 e^{\sin x}$ on jatkuvana integroituva. Koska eksponenttifunktio on kasvava ja $\sin x \leq 1$ kaikilla $x \in [-1,2]$, pätee

$$|f(x)| = |x|^5 |e^{\sin x}| \leq e|x|^5 \quad \text{kaikilla} \quad x \in [-1,2].$$

Arvioidaan integraalin kolmioepäyhtälön ja additiivisuuden, yllä olevan havainnon ja lopulta Analyysin peruslauseen osan 2 pohjalta integraalia:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_2^{-1} x^5 e^{\sin x}\,dx\right| &= \left|-\int_{-1}^{2} x^5 e^{\sin x}\,dx\right| \\
&= \left|\int_{-1}^{2} x^5 e^{\sin x}\,dx\right| \\
&\le \int_{-1}^{2} |x^5 e^{\sin x}|\,dx \\
&\le e\int_{-1}^{2} |x|^5\,dx \\
&= e\left(-\int_{-1}^{0} x^5\,dx + \int_0^2 x^5\,dx\right) \\
&= e\left(-\left(\frac{1}{6}\cdot 0^6 - \frac{1}{6}(-1)^6\right) + \frac{1}{6}\cdot 2^6 - \frac{1}{6}\cdot 0^6\right) \\
&= \frac{65}{6}e < 11e < 11\cdot 3 = 33.
\end{aligned}
$$

Arvioinnista: Funktion integroituvuuden tarkistaminen / sen ilmeneminen vastauksesta +0.5p. Funktion f sopiva arvioiminen +1p. Integraalin sopiva arviointi +1.5p. (Huom. Analyysin peruslauseeseen viittaaminen antaa tässä suoraan +0.5p, mutta tehtävästä on voinut saada täydet pisteet, vaikka tähän tulokseen ei olisikaan muistanut suoranaisesti viitata.)

(b) Koska funktio $f : [-1,4] \to 4$, $f(t) = (t^8 - t^7)\cos t$ on jatkuva, Analyysin peruslauseen ensimmäisen osan nojalla suljetulla välillä $[-1,4]$ jatkuva integraalifunktio F on avoimella välillä $]-1,4[$ derivoituva, ja tällä avoimella välillä on $F' = f$. Tutkitaan derivaatan nollakohtia: Pätee

$$F'(x) = f(x) = (x^8 - x^7)\cos x = x^7(x-1)\cos x = 0,$$

jos $x = 0$ tai $x = 1$ tai $x = \frac{\pi}{2}$. Tiedetään, että funktio F voi saada lokaaleja ääriarvoja vain määrittelyvälin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa. Tutkitaan derivaattafunktion merkkiä näiden pisteiden rajaamilla avoimilla osaväleillä tekijöiden kautta.

$$\text{Välillä }]-1,0[: \quad x^7 < 0, \quad x-1 < 0, \quad \cos x > 0 \quad \Longrightarrow \quad F'(x) > 0,$$

joten funktio F on aidosti kasvava välillä $[-1,0]$.

$$\text{Välillä }]0,1[: \quad x^7 > 0, \quad x-1 < 0, \quad \cos x > 0 \quad \Longrightarrow \quad F'(x) < 0,$$

joten funktio F on aidosti vähenevä välillä $[0,2]$.

$$\text{Välillä }]1,\frac{\pi}{2}[: \quad x^7 > 0, \quad x-1 > 0, \quad \cos x > 0 \quad \Longrightarrow \quad F'(x) > 0,$$

joten funktio F on aidosti kasvava välillä $[1,\frac{\pi}{2}]$.

$$\text{Välillä }]\frac{\pi}{2},4[: \quad x^7 > 0, \quad x-1 > 0, \quad \cos x < 0 \quad \Longrightarrow \quad F'(x) < 0,$$

joten funktio F on aidosti vähenevä välillä $[\frac{\pi}{2},4]$.

Siten pisteet -1, 1 ja 4 ovat funktion F lokaaleja minimikohtia ja pisteet 0 ja $\frac{\pi}{2}$ lokaaleja maksimikohtia.

(Toinen ratkaisutapa derivaattafunktion merkin selvittämiseen avoimilla osaväleillä olisi ollut ottaa yksi testipiste jokaiselta päätepisteiden ja derivaatan nollakohtien rajaamalta avoimelta väliltä, laskea tai päätellä derivaattafunktion merkki niissä pisteissä, ja hyödyntää Bolzanon lausetta derivaattafunktioille tai ihan perus-Bolzanoa, onhan derivaattafunktio tässä tapauksessa jatkuva. Myös merkkikaavioon saattoi päätelmät koota, kunhan perusteli päätelmät.)

Arvioinnista: Perustelu sille, miksi analyysin peruslausetta saa käyttää +0.5p. Analyysin peruslauseen käyttö +0.5p. Derivaatan nollakohtien ja muiden kriittisten pisteiden (eli välin päätepisteiden) löytäminen ja niiden mainitseminen kriittisiksi pisteiksi +1p. Kulkukaavion yms. analysoiminen ja sen avulla kriittisten pisteiden laadun määrääminen +1p.
