

## MATA173 Johdatus matemaattiseen analyysiin 3

### Kurssitentti 9.3.2022

Aikaa on 4 tuntia. Kurssitenttin lisäksi arvioinnissa otetaan huomioon kurssin aikana kerätyt pisteet harjoitustehtävistä; tarkemmat tiedot arvioinnista kurssin kotisivulla.

1. Totta vai tarua? (Lyhyt perustelu todelle väitteelle, vastaesimerkki epätodelle.)
  - (a) Jos  $f$  on jatkuva pisteessä  $x_0$ , niin  $f$  on derivoituva pisteessä  $x_0$ . (1,5 p)
  - (b) Jos  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on kaikkialla derivoituva, niin  $f$  on Riemann-integroituva välillä  $[-1, 1]$ . (1,5 p)
  - (c) Jos funktio  $e^{2f}$  on Riemann-integroituva välillä  $[0, 1]$ , niin  $f$  on Riemann-integroituva välillä  $[0, 1]$ . (1,5 p)
  - (d) Jos  $f: ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  on derivoituva ja aidosti kasvava, niin  $f'(\frac{1}{2}) > 0$ . (1,5 p)

2. (a) Onko funktio  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{jos } x \leq 1, \\ 2x - 1, & \text{jos } x > 1, \end{cases}$  derivoituva pisteessä 1? Perustele tarkasti määritelmän avulla. (3 p)

- (b) Määritä perustellen raja-arvo  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^4 + x \cos(5x)}{1 - e^{3x^2 - x}}$ . (3 p)

3. (a) Selitä lyhyesti, miten määritellään rajoitetun funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integroituvuus ja Riemann-integraali  $\int_a^b f(x) dx$ . (3 p)

- (b) Osoita, että funktio  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{jos } 0 \leq x < 1, \\ -3, & \text{jos } x = 1, \\ 5, & \text{jos } 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

on Riemann-integroituva välillä  $[0, 2]$  ja määritä  $\int_0^2 f(x) dx$ . (3 p)

4. Perustele huolellisesti, miksi

- (a)  $\left| \int_1^3 \frac{x^2 \sin(8x^4)}{2 + \log x} dx \right| \leq 6$ , (3 p)

- (b)  $\frac{1}{117} < \log 468 - \log 464 \leq \frac{1}{116}$ . (3 p)

5. (a) Olkoon  $g: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & \text{jos } 0 \leq x < 2, \\ -3, & \text{jos } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$  Esitä  $g$  jonkin funktion integraalifunktiona. (2 p)

- (b) Olkoon  $h: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$h(x) = \int_{-1}^x (t^4 - 2t^3) \sin(t) dt.$$

Määritä funktion  $h$  lokaalit ääriarvokohdat ja perustele kussakin kohdassa, onko kyseessä lokaali maksimi- vai minimikohta. (4 p)