

Johdatus todennäköisyys laskentaan ja tilastolliseen päättelyyn opintojakso

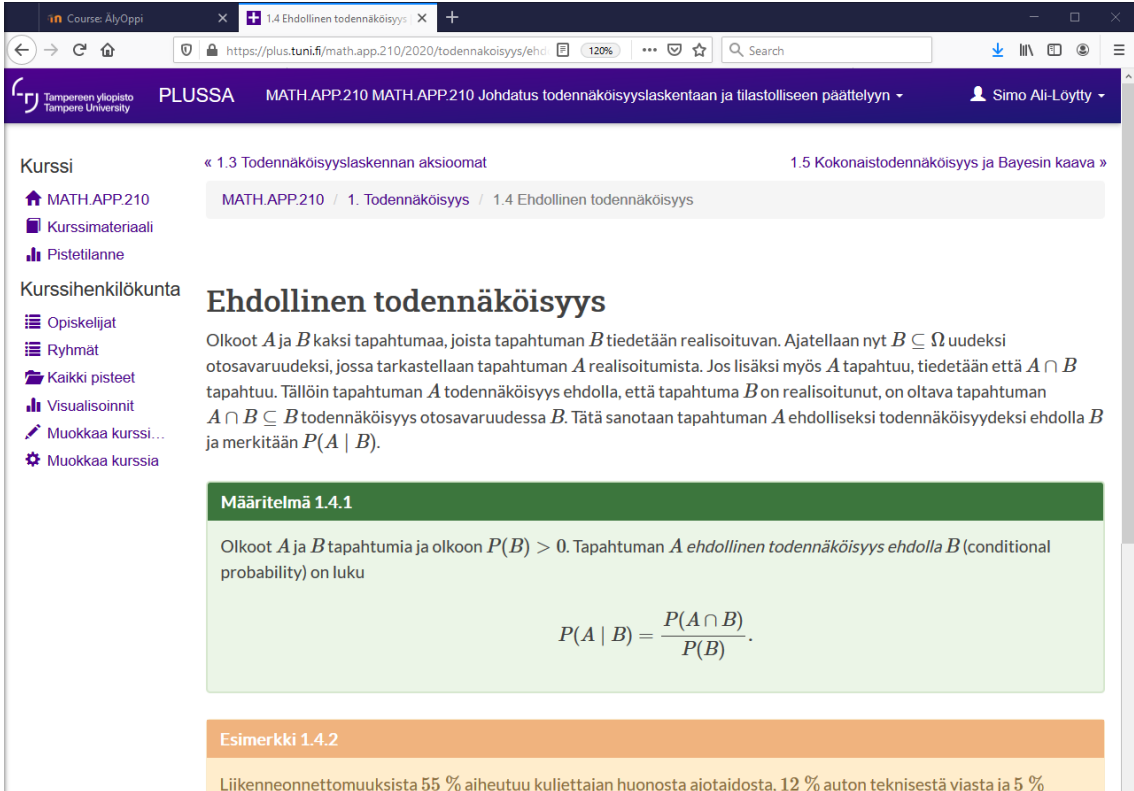
Simo Ali-Löytty ja Pekka Pere

Sisältö

- Matematiikan osahanke lyhyesti
- Todennäköisyyslaskennan ja tilastollisen päättelyn perusteiden ensimmäisen opintojakson sisältöjä
- Materiaaleja
- Stack tehtäväpankki

Matematiikan osahanke

- STACK-tilamuuttujien testaus ja integrointi ([oma webinaari](#))
- Matematiikan sähköiset tentit
- Kurssiaihiot:
 - Monen muuttujan differentiaali ja integraalilaskenta
 - Todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen alkeiskurssi ([materiaali](#))
 - Matriisilaskennan alkeiskurssi
 - Laskennallisten menetelmien ja MATLAB:in alkeiskurssi (LaMat)
 - Soveltava matriisilaskennan kurssi
 - Lääkelaskennan kurssi terveydenhuoltoalan opiskelijoille (oma webinaari tulossa)
 - Matemaattisen mallinnuksen englanninkielinen kurssikokonaisuus
 - Graafiteorian johdantokurssi



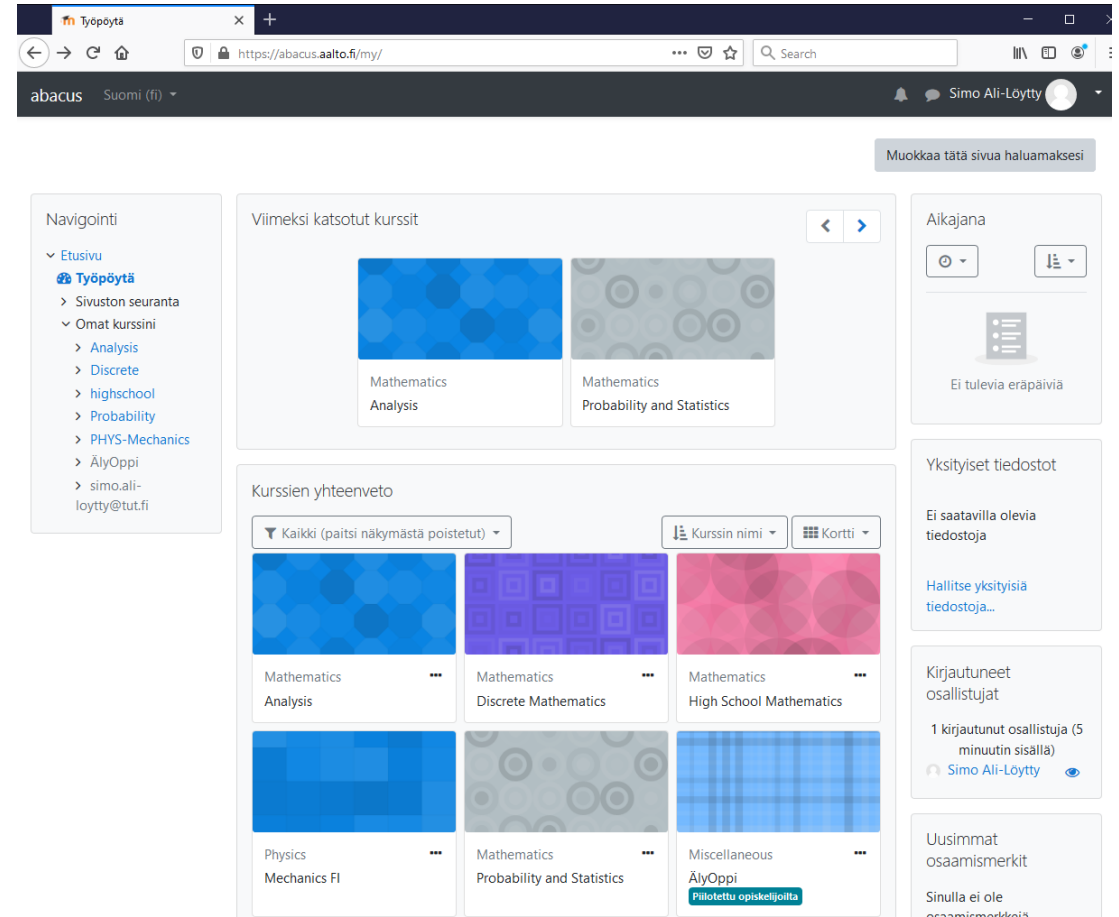
The screenshot shows a web browser window displaying the course page for 'Ehdollinen todennäköisyys' (Conditional Probability) in the PLUSSA system. The page is part of the 'MATH.APP.210' course. The left sidebar contains navigation links: Kurssi, Kurssimateriaali, Pistetilanne, Opiskelijat, Ryhmät, Kaikki pisteet, Visualisoinnit, Muokkaa kurssi..., and Muokkaa kurssia. The main content area shows the course title 'Ehdollinen todennäköisyys' and a brief description of conditional probability. Below the description, there is a section titled 'Määritelmä 1.4.1' which defines conditional probability. The definition states: 'Olkoot A ja B tapahtumia ja olkoon $P(B) > 0$. Tapahtuman A ehdollinen todennäköisyys ehdolla B (conditional probability) on luku

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Below the definition, there is a section titled 'Esimerkki 1.4.2' which provides an example of conditional probability. The example states: 'Liikenneonnettomuuksista 55 % aiheutuu kuljettajan huonosta ajotaidosta, 12 % auton teknisestä viasta ja 5 %

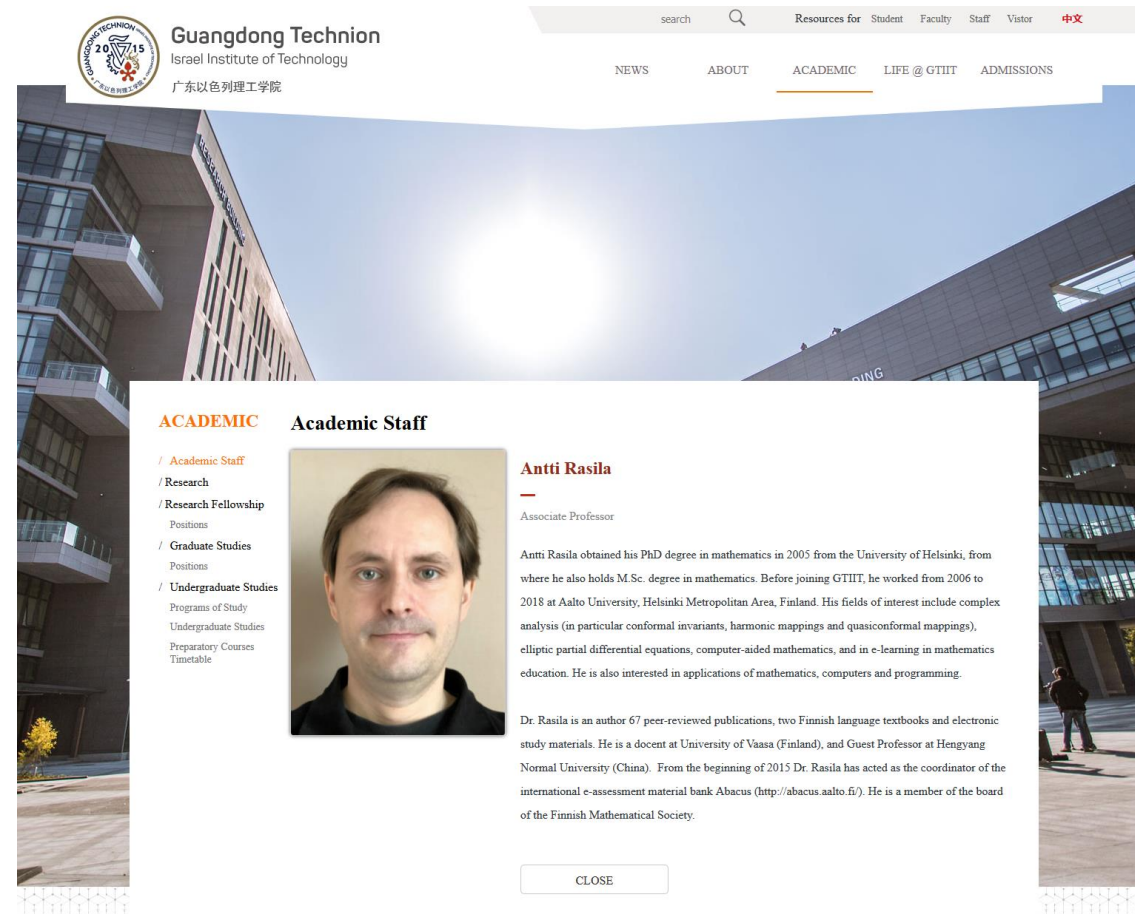
Materiaalipankin osoite on abacus.aalto.fi

- Abacus hanke aloitettiin vuonna 2015 suomalaisten teknillisten yliopistojen yhteistyönä
- Abacus hanke on laajentunut kattamaan valtaosan suomalaisia korkeakouluja, joissa opetetaan STEM aineita.
- Materiaalipankissa on kattava valikoima perus- ja aineopintotason tehtäviä sekä joitakin syventävien opintojaksojen tehtäviä.



Materiaaliin pääsee käsiksi yhteyshenkilöiden kautta tai olemalla yhteydessä Antti Rasilaan

- Yliopistoilla ja korkeakouluilla on omat yhteyshenkilöt. Yhteyshenkilöä voi tiedustella simo.ali-loytty@tuni.fi tai Antin kautta
- Antin sähköpostiosoite on [antti.rasila \[at\] gtiit.edu.cn](mailto:antti.rasila@gtiit.edu.cn) tai [antti.rasila \[at\] iki.fi](mailto:antti.rasila@iki.fi)



Hankkeessa on kehitetty matematiikan sähköisiä tenttejä

- Tentit on toteutettu EXAM-tentteinä
- Tenteissä automaattisesti arvioitavat tehtävät toteutettiin STACK-tehtävinä erillisessä Moodle-ympäristössä: <http://alyoppi.mmg.fi/>
- Tenttien muihin tehtäviin vastataan tyypillisesti Matlabin Live Editorilla tehdyllä pdf-tiedostolla

<) Laske matriisin $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ determinanti.

det(B) = 0

a) Muodostavtko matriisin $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 5 & 6 & 11 \end{bmatrix}$ kaksi viimeistä saraketta matriisin kuva-avaruuden kannan?

Vastaus: Kyllä

Vastauksesi tulkittiin muodossa:

1

b) Kerro luonnollisella kielellä, miten voidaan tutkia, onko annettu vektorijoukko kanta jonkin toisen vektorijoukon virittämälle vektoriavaruudelle.

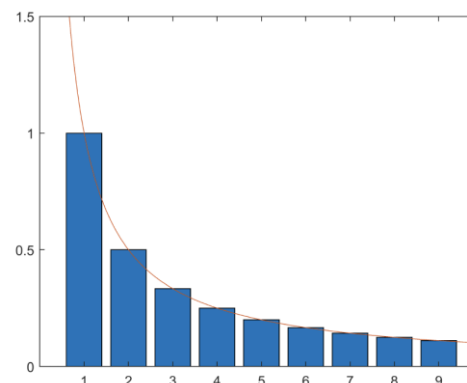
Back Osoita, että harmoninen sarja hajaantuu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Kyseessä on positiiviterminen sarja, joten käytetään integraalitestia sarjan tutkimiseen. Mikäli funktio $F = \frac{1}{x}$ suppenee, myös sarja suppenee. Funktio F on valittu tuollaiseksi, koska se kuvaa hyvin sarjan käyttäytymistä. Lopussa kuvaaja, jossa asiaa on selvennetty.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \ln(c) - \ln(1) = \ln(c) = \infty$$

$\ln(c)$ on luonnollisesti kasvava, joten nähdään välittömästi, että raja-arvo on ääretön. Koska funktio hajaantuu, myös sarja hajaantuu. Oletuksena tehtävässä on, että integraalitestit on paikkansapitävä menetelmä.



Todennäköisyyslaskenta 4 op

(Insinöörimatematiikka 5, 5 op, vanha tekniikan puolen opintojakso)

Osaamistavoitteet

Opintojakson suoritettuaan opiskelija osaa määrittää ongelmanratkaisutilanteessa satunnaismuuttujan/satunnaismuuttujat ja niiden otosavaruuden sekä määrittää tiheysfunktion. Opiskelija osaa määrittää tehtävänä olevan tapahtuman satunnaismuuttujien avulla ja osaa laskea tapahtuman todennäköisyyden. Opiskelija osaa tunnistaa ja laskea todennäköisyyksiä tavallisimmilla jatkuvilla ja diskreeteillä todennäköisyysjakaumilla. Opiskelija osaa todennäköisyyslaskennan laskusääntöjä ja tuntee tavallisimmat tunnusluvut, odotusarvon, varianssin, keskihajonnan, kovarianssin ja korrelaation.

Ydinsisältö

- TODENNÄKÖISYYDEN KÄSITE JA LASKULAKEJA: satunnaismuuttuja, otosavaruus, tapahtuma, klassinen todennäköisyys, yhteenlaskusääntö, kertolaskusääntö, ehdollinen todennäköisyys, kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava, tapahtumien riippumattomuus
- TODENNÄKÖISYYSJAKAUMIA: diskreetti ja jatkuva jakauma, tiheys- ja kertymäfunktio, odotusarvo, varianssi ja keskihajonta, tasainen jakauma, binomijakauma, Poisson-jakauma, normaalijakauma, t-, F- ja χ^2 -jakaumat
- YHTEISJAKAUMAT: Diskreetti ja jatkuva jakauma, marginaalijakaumat, riippumattomuus, kovarianssi, korrelaatio, [tilastollisen testauksen periaatteet](#). Keskeinen raja-arvolause.

Täydentävä tietämys

- Tsebyševin epäyhtälö, momentit generoiva funktio, satunnaismuuttujan funktiot
- Satunnaismuuttujien funktiot, otoskeskiarvon ja otosvarienssin jakauma, tilastollisia testejä.

Tilastollisen päättelyn perusteet (5 op)

(vanha FM puolen opintojakso)

Osaamistavoitteet

Opiskelija osaa yksinkertaisia todennäköisyyslaskuja sekä kombinatoriikan alkeet. Hän ymmärtää satunnaismuuttujan ja sen jakauman. Hän pystyy yksinkertaisissa tilanteissa määrittämään satunnaismuuttujan jakauman. Hän tuntee odotusarvon ja varianssin ominaisuudet. Opiskelija tuntee binomijakauman ja normaalijakauman ja osaa laskea näihin liittyviä todennäköisyyksiä. Opiskelija ymmärtää satunnaisotoksen, otossuureen, otossuureen jakauman sekä otossuureiden käytön tilastollisessa päättelyssä. Opiskelija ymmärtää estimoinnin ja hypoteesien testaukseen liittyvän teorian opintojaksolla esitetyssä laajuudessa. Hän tunnistaa erilaiset estimointitilanteet, osaa valita tilanteeseen soveltuvan luottamusvälin sekä käyttää sitä tilastollisessa päättelyssä. Hän ymmärtää tilastollisen testauksen periaatteet ja osaa suorittaa tilastollisen testauksen annetussa empiirisessä tilanteessa.

Asiasisältö

- Todennäköisyyslaskentaa, todennäköisyysjakaumia, satunnaisotos, otossuure, otantajakauma, parametrien estimointi, hypoteesien testaus, R-ohjelmiston käyttöä.

Johdatus todennäköisyyslaskentaan ja tilastolliseen päättelyyn (5 op) (uusi opintojakso)

Osaamistavoitteet

Opiskelija ymmärtää, mitä todennäköisyydellä tarkoitetaan ja osaa laskea todennäköisyyksiä. Opiskelija ymmärtää satunnaismuuttujan ja sen toteuman eron sekä todennäköisyysjakauman ja kertymäfunktion käsitteet ja erot jatkuvassa ja diskreetissä tilanteessa. Opiskelija hallitsee tärkeimmät todennäköisyysjakaumat ja keskeisen raja-arvolauseen. Opiskelija ymmärtää, mitä tarkoitetaan todennäköisyysotannalla, piste-estimoinnilla, väliestimoinnilla ja merkitsevyystestauksella. Opiskelija kokee opiskellun teorian empiirisesti relevantiksi. Opiskelija osaa soveltaa kurssilla tarkasteltuja menetelmiä tilastollisella ohjelmistolla.

Asiasisältö

Todennäköisyyden käsite, todennäköisyyslaskennan laskusääntöjä, ehdollisen todennäköisyyden ja riippumattomuuden käsitteet, kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavat. Satunnaismuuttujan käsite, todennäköisyysjakauma ja kertymäfunktio, satunnaismuuttujan sijainti- ja vaihtelumittoa, diskreettejä ja jatkuvia jakaumia, Keskeinen raja-arvolause. Todennäköisyysotanta, piste-estimointi, väliestimointi, merkitsevyystestaus.

Johdatus todennäköisyyslaskentaan ja tilastolliseen päättelyyn (5 op) esitiedot

Pakolliset esitiedot: Lukion matematiikka tai vastaava osaaminen.

Suosittelut esitiedot (jokin alla olevista tai vastaava osaaminen):

- MATH.APP.111 Analyysin peruskurssi
- MATH.APP.160 Differentiaali- ja integraalilaskenta
- DATA.STAT.110 Tilastotieteen johdantokurssi

Johdatus todennäköisyyslaskentaan ja tilastolliseen päättelyyn (5 op) ohjelmistot?

- Aikaisemmin käytetty mm. SPSS tai Matlab
- Nykyisin käytössä/opetetaan ohjelmistoja R tai Matlab, mutta halutessaan opiskelija voi käyttää SPSS, Excel, Python, verkkolaskimet, ...

Johdatus todennäköisyyslaskentaan ja tilastolliseen päättelyyn (5 op) , Pekka Peren moniste

- 1 Johdanto
- 2 R: Nano-opas
- 3 Todennäköisyyslaskentaa
- 4 Kombinatoriikkaa
- 5 Diskreetit ja jatkuvat satunnaismuuttujat
- 6 Todennäköisyysjakaumia
- 7 Otannan teoriaa ja empiriaa
- 8 Piste-estimointi
- 9 Väliestimointi
- 10 Testiteoriaa
- 11 Testejä

Ei matemaattista analyysia. Esimerkeissä hyödynnetään R-ohjelmistoa.

Oppikirja tekeillä tämän ja Tilastollisten menetelmien perusteet –kurssien sisällöistä.

Johdatus todennäköisyyslaskentaan ja tilastolliseen päättelyyn (5 op), harjoitukset ja koe

Harjoitustehtävät:

- todellisista aineistoista ja tutkimuksista
- tulkinnallisia tehtäviä paljon
- yksinkertaisia matemaattisia johtoja
- yksinkertaisten annettujen R-koodien ajoa
- jaan opiskelijat pienryhmiin ja kannustan ratkomaan tehtäviä pienryhmissä.

Koe:

- etätentti
- mahdollistaa R:n käytön kokeessa mutta vain apuväline laskennassa
- kaikkea muita tietolähteitä saa hyödyntää kokeessa paitsi muita ihmisiä.

Johdatus todennäköisyyslaskentaan ja tilastolliseen päättelyyn (5 op), verkkotehtävät

Hankkeessa on laadittu automaattisesti arvioitavia Stack ja monivalintatehtäviä erilaisiin tarkoituksiin..

Kysymys 1

Ei vastattu

Kokonaispisteistä 1,00

Merkitse kysymys

Muokkaa kysymystä

1.1 Peruskäsitteitä

Valitse yksi tai useampi:

Ymmärrän, mitä tarkoitetaan satunnaiskokeella ja siitä mitattavalla/havainnoitavalla tuloksella sekä osaan antaa molemmista esimerkkejä.

Ymmärrän, mitä tarkoitetaan sanottaessa, että kokeen tulosten kaikki tulosvaihtoehdot muodostavat otosavaruuden.

Ymmärrän, mitä tarkoitetaan sanottaessa, että otosavaruuden osajoukot = tapahtumat.

Ymmärrän, mitä tarkoitetaan satunnaiskokeella ja siitä mitattavalla/havainnoitavalla tuloksella sekä osaan antaa molemmista esimerkkejä.

Ymmärrän, mitä tarkoitetaan sanottaessa, että kokeen tulosten kaikki tulosvaihtoehdot muodostavat otosavaruuden.

Ymmärrän, mitä tarkoitetaan sanottaessa, että otosavaruuden osajoukot = tapahtumat.

Ymmärrän, mitä tarkoitetaan satunnaiskokeella ja siitä mitattavalla/havainnoitavalla tuloksella sekä osaan antaa molemmista esimerkkejä.

Ymmärrän, mitä tarkoitetaan sanottaessa, että kokeen tulosten kaikki tulosvaihtoehdot muodostavat otosavaruuden.

Ymmärrän, mitä tarkoitetaan sanottaessa, että otosavaruuden osajoukot = tapahtumat.

Ymmärrän, mitä tarkoitetaan satunnaiskokeella ja siitä mitattavalla/havainnoitavalla tuloksella sekä osaan antaa molemmista esimerkkejä.

Ymmärrän, mitä tarkoitetaan sanottaessa, että kokeen tulosten kaikki tulosvaihtoehdot muodostavat otosavaruuden.

Ymmärrän, mitä tarkoitetaan sanottaessa, että otosavaruuden osajoukot = tapahtumat.

Olkoon funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ otosavaruuden Ω diskreetin satunnaismuuttujan X tiheysfunktio. Valitse paikkansa pitävät väitteet.

Valitse yksi tai useampi:

a. Funktio f saa vain ei-negatiivisia arvoja.

b. Funktion f antamien kaikkien todennäköisyyksien summa on 1.

c. Funktion f arvo tietyssä otosavaruuden pisteessä on yhtä suuri kuin kyseisen alkion realisoinnin todennäköisyys.

MATH.APP.210-2020-2021-7-TAU

Osallistujat

Arvioinnit

Yleisinfo, kysymykset ja vastaukset

Oppimateriaali

Aloitussiivetti

Aiheviikko 1: Todennäköisyys

Aiheviikko 2: Satunnaismuuttuja

Aiheviikko 3: Odotusarvo

Aiheviikko 4: Todennäköisyysjakaumia

Aiheviikko 5: Otosjakaumat ja estimointi

Aiheviikko 6: Tilastollinen testaaminen

Arviointi ja loppukoe

Esimerkkejä ja vanhoja materiaaleja

Vanhoja tenttejä

Osaamistavoitteet aiheviikolle 2: Satunnaismuuttuja:

Arvosanaan 1-2 riittävät taidot:	Arvosanaan 3-4 riittävät taidot:	Arvosanaan 5 riittävät taidot:
Osaan tunnistaa, onko satunnaismuuttuja diskreetti vai jatkuva ja laskea niiden todennäköisyyksiä.	Osaan muodostaa sekä diskreetin, että jatkuvan tasajakauman tiheysfunktion.	Osaan soveltaa monipuolisesti diskreettejä todennäköisyysjakaumia, esimerkiksi hypergeometrista jakaumaa.
Ymmärrän, mitä tarkoitetaan kertymäfunktioilla ja osaan ilmoittaa tapahtuman todennäköisyyden kertymäfunktion avulla.	Osaan laskea MATLABilla tunnettujen satunnaismuuttujien tiheys- ja kertymäfunktioiden arvoja.	Osaan muodostaa vektoriavoinen satunnaismuuttujan kertymäfunktion integraalilausekkeen ja laskea sen MATLABin avulla.
Tiedän periaatteen, miten jatkuvan satunnaisvektorin marginaalijakaumat muodostetaan.	Ymmärrän satunnaismuuttujien riippumattomuuden määritelmän ja sen yhteyden tapahtumien riippumattomuuden käsitteeseen.	Osaan muodostaa marginaalijakaumat ja niiden avulla tutkia satunnaismuuttujien riippumattomuutta.
Ymmärrän, että satunnaismuuttujan X funktiot $Y=h(X)$ ovat uusia satunnaismuuttujia.	Tiedän periaatteen, jolla määrittää satunnaismuuttujan funktion otosavaruus ja osaan muodostaa satunnaismuuttujan funktion tiheysfunktion.	Osaan generoida MATLABilla tai muulla ohjelmalla tunnetun satunnaismuuttujan funktion arvoja.

Viikolla käsiteltävät aiheet:

aihe	videot	oppikirja	kurssimoniste	muu materiaali
- Diskreetin satunnaismuuttujan jakauma - Jatkuvan satunnaismuuttujan jakauma - Satunnaismuuttujan funktiot - Satunnaisvektorin jakauma - Marginaalijakaumat - Satunnaismuuttujien riippumattomuus	- Diskreetti satunnaismuuttuja - Jatkuva satunnaismuuttuja - Satunnaismuuttujan funktio - Satunnaisvektori - Marginaalijakaumat - Satunnaismuuttujien riippumattomuus - Viikon 2 videoesimerkkien sivu	Chapter 3: Random Variables and Probability Distributions Section 7.2: Transformations of Variables	Luku 2: Satunnaismuuttuja	Kertaustehtävät Matlab-materiaaleja Taso- ja avaruus-integraalit

Oma edistymiseni

Esimerkivideot viikolla 2

Pilottettu, mutta päily sallittu

Verkkotehtävät 2

Tehtävät ja ratkaisut 2

Tehtävät ja ratkaisut 2

Pilottettu opiskelijalla

Videoratkaisut 2

Viikon 2 laskuharjoitustehtävien 1-4 palautus

Aiheviikko 2, harjoitustehtävien 5-6 palautus

Palauta tänne tehtävien 5-6 ratkaisut pdf-muodossa.

Aiheviikon 2 ryhmätehtävän palautus

Kysymys 18

Ei vastattu

Kokonaispisteistä 5,00

Merkitse kysymys

Muokkaa kysymystä

Vastauksesi on v

Malliratkaisu:

Funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow$

1. $f(x) \geq 0$

2. $\sum_{x \in \Omega} f(x) =$

3. $f(x) = P$

Tiheysfunktio on

Oikeat vastaukset

, Funktion f anti

, Funktion f arvo

Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on muotoa $f(x) = cx$, missä c on vakio. Tapahtumat A ja B määritellään: $A = \{X \in \Omega \mid X \geq 5\}$ ja $B = \{X \in \Omega \mid X < 6\}$. Vastaukset murtolukuna tai kolmen desimaalin tarkkuudella. Määritä luku c ja laske ehdollinen todennäköisyys $P(A \mid B)$, kun

(a) X on diskreetti otosavaruutenaan $\Omega = \{4, 5, 6, 7\}$.

$c =$

$P(A \mid B) =$

(b) X on jatkuva otosavaruutenaan $\Omega = [4, 7]$.

$c =$

$P(A \mid B) =$

Mallivastaus:

(a) X on diskreetti otosavaruutenaan $\Omega = \{4, 5, 6, 7\}$. Pistetodennäköisyyksien summan tulee olla $= 1$, joten

$$P(\Omega) = \sum_{x=4}^7 cx = c(4 + 5 + 6 + 7) = 22c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{22}.$$

Koska $A = \{X \in \Omega \mid X \geq 5\} = \{5, 6, 7\}$ ja $B = \{X \in \Omega \mid X < 6\} = \{4, 5\}$, on $A \cap B = 5$ ja

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{22} \cdot 5}{\frac{1}{22} \cdot (4 + 5)} = \frac{5}{9} = 0.556.$$

1. Mitkä asiat jäivät epäselviksi tältä viikolta verkkotehtävistä tai harjoitustehtävistä tai muista asioista? Minkä asian kohdalla tuntui, ettet ymmärtänyt niitä syvällisesti? Mitkä asiat tuntuivat hankalalta tällä viikolla?

2. Millaisia ahaa-elämyksiä sait tällä viikolla tai minkä asian osaat jo hyvin? Mitkä asiat tukivat tällä viikolla oppimistasi?

Johdatus todennäköisyyslaskentaan ja tilastolliseen päättelyyn (5 op) tulevaisuus

Verkkotehtävät ovat saatavilla Abacus-portaalissa.
Opintojakso tulee tarjolle myös FiTech-verkoston:
[FiTech | For future tech talents](#)

