Kompleksianalyysi 2

Tero Kilpeläisen monisteesta muokannut

Antti Vähäkangas

Luentomuistiinpanoja keväälle 2015

7. toukokuuta 2015

Alkusanat

Seuraavilla sivuilla on luentomuistiinpanoja Kompleksianalyysi 2 -kurssille. Nämä on pääosin muokattu Tero Kilpeläisen kirjoittamasta luentomonisteesta sopimaan nykyiseen, 30 tunnin luentosarjaan. Riemannin kuvauslauseen todistus pohjautuu Kari Astalan ja Eero Saksmanin kirjoittamaan Complex Analysis II -luentomonisteeseen.

Anna Tuhola kirjoitti muistiinpanojen ensimmäisen LaTeX-version.

Kurssilla käsitellään kompleksista integrointia varsin yleisissä kompleksitason alueissa, analyyttisten funktioiden potenssisarjaesityksiä, residylaskentaa, erikoispisteitä ja konformikuvauksia.

Kaikki muotoa KA1.xx.xx olevat viitteet osoittavat kurssin Kompleksianalyysi 1 (Tero Kilpeläinen, k. 2015) luentomonisteen kohtaan xx.xx.

Sisältö

1. Cauchyn lause ja integraalikaava — homologiset versiot **1**

2. Analyyttisen funktion potenssisarjaesitys **12**

2.1. Kompleksisista sarjoista 12

2.2. Potenssisarjakehitelmä 21

2.3. Laurent-sarjat 26

3. Eristetyt erikoispisteet ja residylause **33**

3.1. Erikoispisteet 33

3.2. Poistuvat erikoispisteet 35

3.3. Navat 36

3.4. Oleellisista erikoispisteistä 40

3.5. Residylause 42

4. Analyyttisen funktion kuvausominaisuuksia **46**

4.1. Argumentin periaate ja Hurwitzin lause 46

4.2. Analyyttisen funktion avoimuus 48

4.3. Johdantoa konformikuvauksiin 50

4.4. Normaaliperheet ja Montelin lause 53

4.5. Riemannin kuvauslauseen todistus 54

5. Laajennettu kompleksitaso ja Möbius-kuvaukset **58**

5.1. Laajennettu kompleksitaso 58

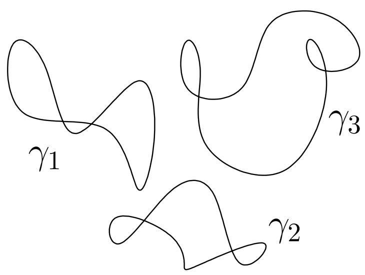
5.2. Möbius-kuvauksista 59

5.3. Möbius-kuvaukset konformikuvauksina 68

1. Cauchyn lause ja integraalikaava — homologiset versiot

Cauchyn lauseen yleisen (homologisen) muodon todistusta varten tarvitaan vielä joitakin käsitteitä ja ”muistutus” iteroidusta integraaleista.

1.1. Määritelmä. Kompleksitason *sykli* on äärellinen jono $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p)$, missä γ_k ovat suljettuja teitä kaikilla $k = 1, 2, \ldots, p$.



1.2. Huomautus. Teiden γ_k järjestyksellä ei ole merkitystä. Usein samastamme esimerkiksi syklit $(\gamma, \beta, \alpha, \overleftarrow{\gamma}, \overleftarrow{\gamma}, \beta)$ ja $(\overleftarrow{\gamma} * \gamma, \beta * \beta, \overleftarrow{\gamma}, \alpha)$. Samaistamme myös suljetun tien γ ja syklin $\sigma = (\gamma)$.

Jos $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p)$ on sykli, niin

$$|\sigma| = |\gamma_1| \cup |\gamma_2| \cup \ldots \cup |\gamma_p|,$$

ja edelleen σ on *sykli joukossa* A, jos $|\sigma| \subset A$. Huom! Syklin σ *jälki* $|\sigma|$ on kompakti, sillä se on äärellinen yhdiste kompakteja joukkoja.

Jos $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p)$ on sykli ja $f : |\sigma| \to \mathbf{C}$ on jatkuva, niin

$$\int_\sigma f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{p} \int_{\gamma_k} f(z)\, dz.$$

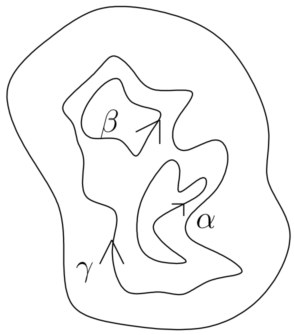
Erityisesti, syklin σ kierrosluku pisteen $z_0 \notin |\sigma|$ ympäri on

$$n(\sigma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{dz}{z - z_0} = \sum_{k=1}^{p} n(\gamma_k, z_0).$$

1.3. Määritelmä. Olkoon σ sykli avoimessa joukossa $G \subset \mathbf{C}$. Sykli σ on *nollahomologinen* joukossa G, jos

$$n(\sigma, z) = 0 \quad \text{kaikilla } z \in \mathbf{C} \setminus G\,.$$

Suljettu tie γ avoimessa joukossa G on *nollahomologinen* joukossa G, jos sykli $\sigma = (\gamma)$ on nollahomologinen joukossa G.



Kaksi sykliä $\sigma_0 = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p)$ ja $\sigma_1 = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$ avoimessa joukossa G ovat *homologiset* joukossa G, jos sykli

$$\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p, \overleftarrow{\beta_1}, \overleftarrow{\beta_2}, \ldots, \overleftarrow{\beta_q})$$

on nollahomologinen joukossa G.

Avoimen joukon G tiet λ_0 ja λ_1 ovat *homologiset* joukossa G, jos niillä on yhteiset alku- ja loppupisteet ja suljettu tie $\lambda = \lambda_0 * \overleftarrow{\lambda_1}$ on nollahomologinen joukossa G.

1.4. Huomautus. Syklit σ_0 ja σ_1 (avoimessa) joukossa G ovat homologisia joukossa G jos, ja vain jos,

$$n(\sigma_0, z) = n(\sigma_1, z) \quad \text{kaikilla } z \in \mathbf{C} \setminus G\,.$$

Tämä seuraa suoraan määritelmästä ja seuraavasta laskusta (merkinnät kuten yllä):

$$\begin{aligned} n(\sigma, z) &= \sum_{k=1}^{p} n(\gamma_k, z) + \sum_{m=1}^{q} n(\overleftarrow{\beta_m}, z) \\ &= \sum_{k=1}^{p} n(\gamma_k, z) - \sum_{m=1}^{q} n(\beta_m, z) = n(\sigma_0, z) - n(\sigma_1, z)\,, \end{aligned}$$

missä $z \in \mathbf{C} \setminus G$.

1.5. Huomautus. Kaikki syklit kiekossa $B \subset \mathbf{C}$ ovat nollahomologisia joukossa B. Olkoon nimittäin $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)$ sykli kiekossa B. Tällöin $|\sigma| \subset B$ ja siten $\mathbf{C} \setminus B$ sisaltyy joukon $\mathbf{C} \setminus |\gamma_k|$ rajoittamattomaan komponenttiin kaikilla $k = 1, 2, \dots, p$. Lemman KA1.5.4 nojalla kaikilla $z \in \mathbf{C} \setminus B$ on

$$n(\sigma, z) = \sum_{k=1}^{p} n(\gamma_k, z) = 0\,.$$

Tarvitsemme aputuloksen integraalijärjestyksen vaihdosta iteroidussa (kompleksisessa) integraalissa. Jos $R = \{z = x + iy : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ on suljettu suorakaide ja $h : R \to \mathbf{C}$ jatkuva, niin Fubinin lauseen nojalla

$$\int_c^d \Big(\int_a^b h(t,s)dt\Big)ds = \int_a^b \Big(\int_c^d h(t,s)ds\Big)dt. \tag{1.1}$$

Edelleen

1.6. Lemma. *Olkoon $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ ja $\beta : [c,d] \to \mathbf{C}$ teitä ja $g : |\gamma| \times |\beta| \to \mathbf{C}$ jatkuva.*[1] *Tällöin*

$$\int_\beta \Big(\int_\gamma g(z,\zeta)dz\Big)d\zeta = \int_\gamma \Big(\int_\beta g(z,\zeta)d\zeta\Big)dz.$$

TODISTUS: Koska g on jatkuva kompaktissa joukossa $|\gamma| \times |\beta|$, on g tasaisesti jatkuva. Siten kuvaukset

$$\zeta \mapsto \int_\gamma g(z,\zeta)dz \quad \text{ja} \quad z \mapsto \int_\beta g(z,\zeta)d\zeta$$

ovat jatkuvia (HT). Niinpä integraalit ovat hyvin määriteltyjä.

Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että β ja γ ovat jatkuvasti differentioituvia — yleinen tapaus saadaan jakamalla $[a,b]$ ja $[c,d]$ osaväleihin ja summaamalla. Nyt funktio h,

$$h(t,s) := g(\gamma(t), \beta(s))\gamma'(t)\beta'(s),$$

[1] Muista: $|\gamma| \times |\beta| = \{(z,w) \in \mathbf{C}^2 : z \in |\gamma|, w \in |\beta|\}$.

on jatkuva suorakaiteessa $R = [a, b] \times [c, d]$, joten yhtälöstä (1.1) seuraa, että

$$\begin{aligned}
&\int_\beta \Big(\int_\gamma g(z,\zeta) dz \Big) d\zeta = \int_c^d \Big(\int_a^b g(\gamma(t), \beta(s))\gamma'(t) dt \Big) \beta'(s) ds \\
&= \int_c^d \Big(\int_a^b g(\gamma(t), \beta(s))\gamma'(t)\beta'(s) dt \Big) ds = \int_a^b \int_c^d h(t,s) ds\, dt \\
&= \int_a^b \Big(\int_c^d g(\gamma(t), \beta(s))\beta'(s) ds \Big) \gamma'(t) dt = \int_\gamma \Big(\int_\beta g(z,\zeta) d\zeta \Big) dz.
\end{aligned}$$

□

1.7. Lause (Cauchyn lause)**.** *Olkoon σ sykli avoimessa joukossa G. Tällöin*

$$\int_\sigma f(z)\, dz = 0 \qquad \text{kaikilla analyyttisilla funktioilla } f : G \to \mathbf{C}$$

jos ja vain jos σ on nollahomologinen joukossa G.

Todistus: Todistetaan ensin ehdon välttämättömyys. Olkoon $z_0 \in \mathbf{C} \setminus G$. Tällöin

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

on analyyttinen joukossa G, joten

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma f(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{dz}{z - z_0} = n(\sigma, z_0).$$

Niinpä σ on nollahomologinen sykli joukossa G.

Käydään sitten ehdon riittävyyden kimppuun. Olkoon σ nollahomologinen sykli joukossa G. Määritellään

$$V = \{z \in \mathbf{C} \setminus |\sigma| : n(\sigma, z) = 0\}.$$

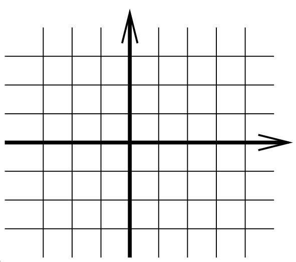
Koska $n(\sigma, \cdot)$ on vakio joukon $\mathbf{C} \setminus |\sigma|$ komponenteissa (yksityiskohdat HT—muista Lemma KA1.5.4), on V yhdiste joukon $\mathbf{C} \setminus |\sigma|$ komponentteja. Siten V on avoin.

Toisaalta V sisältää joukon $\mathbf{C}\setminus|\sigma|$ rajoittamattoman komponentin Lemman KA1.5.4 nojalla. Oletuksen nojalla $\mathbf{C}\setminus G \subset V$. Siten $K := \mathbf{C}\setminus V \subset G$ on suljettu ja rajoitettu eli kompakti. Lisäksi $|\sigma| \subset K$.

Olkoon $0 < \delta < \operatorname{dist}(K, \partial G)$. Tällöin $B(z,\delta) \subset G$ kaikilla $z \in K$. Jaetaan $\mathbf{C}$ sisuksiltaan pistevieraisiin koordinaatiston suuntaisiin (suljettuihin) neliöihin, joiden reunat ovat suorilla

$$x = \frac{n\delta}{2} \quad \text{ja} \quad y = \frac{n\delta}{2}, \qquad n \in \mathbf{Z},$$

ts. jokaisen neliön sivun pituus on $\frac{\delta}{2}$ ja neljän kärki on origossa.



Rajoitettu joukko K kohtaa vain äärellisen monta näistä neliöistä. Olkoot ne $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$. Konstruktiosta seuraa, että jos z_j on neliön Q_j keskipiste, niin $B_j := B(z_j, \frac{\delta}{2}) \subset G$, sillä muuten olisi $B(z,\delta) \cap \partial G \neq \emptyset$ kaikilla $z \in Q_j \cap K$, mikä on ristiriita. Edelleen $Q_j \subset B_j$.

Olkoon nyt f analyyttinen joukossa G.
Väite:

$$\int_\sigma f(z)\,dz = 0\,.$$

Olkoon $k = 1, \ldots, r$ ja kiinnitetään $z \in \operatorname{int} Q_k$. Sovelletaan nyt lokaalia Cauchyn integraalikaavaa (Lause KA1.5.5) kiekossa B_k. Saadaan

$$f(z) = \underbrace{n(\partial Q_k, z)}_{=1} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_k} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\,,$$

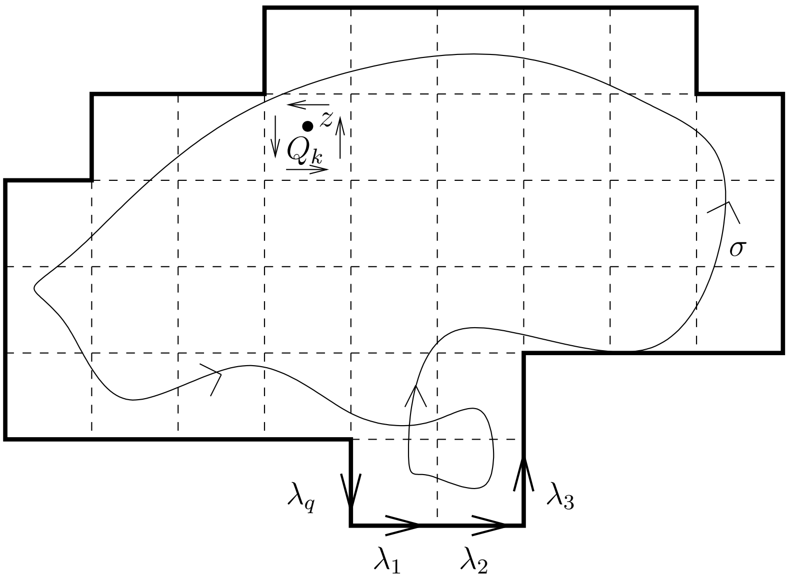
missä reuna suunnistetaan positiiviseen kiertosuuntaan. Jos $j \neq k$, niin lokaalista Cauchyn lauseesta (tapauksessa $z \notin B_j$) tai integraalikaavasta (tapauksessa $z \in B_j$) kiekossa B_j seuraa, että

$$0 = \underbrace{n(\partial Q_j, z)}_{=0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_j} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

Siten

$$(*) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{r} \int_{\partial Q_j} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

kaikilla $z \in \operatorname{int} Q_k$. Yhtälö $(*)$ pätee kaikilla k, joten se pätee kaikilla $z \in \bigcup_{j=1}^{r} \operatorname{int} Q_j$.



Olkoon nyt λ yksi tien ∂Q_j muodostavista suunnatuista janoista. Nyt joko $|\lambda| \cap K = \emptyset$ tai $|\lambda| \cap K \neq \emptyset$.

Jos $|\lambda| \cap K \neq \emptyset$, niin $|\lambda|$ on myös erään toisen neliön Q_k sivu. Tällöin yhtälön $(*)$ oikean puolen integraali käy yli teiden λ ja $\overleftarrow{\lambda}$, jotka integroitaessa kumoavat toisensa. Siten kaikilla $z \in \bigcup_{j=1}^{r} \operatorname{int} Q_j$

$$(**) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{q} \int_{\lambda_k} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z},$$

missä $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ ovat ne neliöiden Q_j positiivisesti suunnatut reunajanat, joiden jäljet eivät leikkaa joukkoa K. Lemmasta KA1.5.6 saadaan, että

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_k} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

määrittelee analyyttisen funktion, erityisesti siis jatkuvan funktion joukossa $\mathbf{C}\setminus|\lambda_k|$. Siten yhtälön $(**)$ oikea puoli määrittelee jatkuvan funktion joukossa

$$\mathbf{C} \setminus \bigcup_{k=1}^{q} |\lambda_k| \,.$$

Huomaa, että

$$K \subset \mathbf{C} \setminus \bigcup_{k=1}^{q} |\lambda_k| \,.$$

Koska yhtälön $(**)$ vasen puoli on analyyttisenä jatkuva joukossa G, pätee $(**)$ siis myös niillä neliöiden Q_j reunojen osilla, jotka eivät kuulu janojen λ_j jälkiin. Erityisesti, $(**)$ pätee kaikilla $z \in |\sigma|$.

Todistuksen lopuksi olkoon $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p)$. Nyt

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma} f(z)\, dz &\overset{(**)}{=} \int_{\sigma} \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_k} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \right) dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \int_{\gamma_l} \left(\int_{\lambda_k} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \right) dz
\end{aligned}$$

ja koska integrandi on jatkuva joukossa

$$\bigcup_{k,l} |\gamma_l| \times |\lambda_k| \,,$$

niin lemman 1.6 mukaan edellinen on yhtä suuri kuin

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{q} \sum_{l=1}^{p} \int_{\lambda_k} \left(\int_{\gamma_l} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right) dz\, d\zeta &= \sum_{k=1}^{q} \int_{\lambda_k} f(\zeta) \left(\sum_{l=1}^{p} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_l} \frac{dz}{\zeta - z} \right) d\zeta \\
&= -\sum_{k=1}^{q} \int_{\lambda_k} f(\zeta) \left(\sum_{l=1}^{p} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_l} \frac{dz}{z - \zeta} \right) d\zeta \\
&= -\sum_{k=1}^{q} \int_{\lambda_k} f(\zeta) n(\sigma, \zeta)\, d\zeta = 0,
\end{aligned}$$

koska $n(\sigma, \zeta) = 0$ kaikilla $\zeta \in \lambda_k$, mikä johtuu siitä, että koska $|\lambda_k| \cap K = \emptyset$, niin $|\lambda_k| \subset V$. □

1.8. Seuraus. *Olkoon f analyyttinen avoimessa joukossa G ja σ_0 ja σ_1 G:ssä homologisia syklejä tai teitä. Tällöin*

$$\int_{\sigma_0} f(z)\,dz = \int_{\sigma_1} f(z)\,dz.$$

TODISTUS: Jos $\sigma_0 = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$ ja $\sigma_1 = (\beta_1, \dots, \beta_q)$ syklejä ja homologisia joukossa G, niin sovelletaan Cauchyn lausetta joukossa G nollahomologiseen sykliin $\sigma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p, \overleftarrow{\beta_1}, \dots, \overleftarrow{\beta_q})$, jolloin

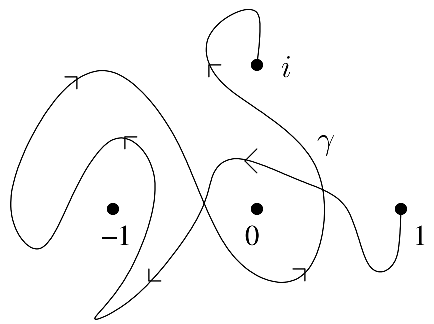
$$\int_{\sigma_0} f(z)\,dz - \int_{\sigma_1} f(z)\,dz = \int_{\sigma} f(z)\,dz = 0.$$

Jos σ_0 ja σ_1 ovat teitä, niin samoin väite seuraa soveltamalla Cauchyn lausetta nollahomologiseen sykliin $(\sigma_0 * \overleftarrow{\sigma_1})$. $\square$

Esimerkki. Laske integraali

$$\int_{\gamma} \frac{z^2+z+1}{z^3+z^2}\,dz$$

pitkin tietä γ, joka on kuvattu oheisessa kuvassa.



Tehdään integrandista osamurtokehitelmä. Saadaan

$$\int_{\gamma} \frac{z^2+z+1}{z^3+z^2}dz = \int_{\gamma} \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z+1}\right) dz = \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2} + \int_{\gamma} \frac{dz}{z+1}.$$

Koska $F(z) = -z^{-1}$ on funktion $f(z) = z^{-2}$ primitiivi joukossa $\mathbf{C}\setminus\{0\}$, ensimmäinen integraali on helppo laskea:

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z^2} = \Big/_{1}^{i} -\frac{1}{z} = 1 + i.$$

Koska γ on homologinen janan $\beta = [1, i]$ kanssa joukossa $\mathbf{C} \setminus \{-1\}$, jossa myös funktio $g(z) = (z+1)^{-1}$ on analyyttinen, seuraus 1.8 antaa

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z+1} = \int\limits_{\beta} \frac{dz}{z+1} = \Big/_{1}^{i} \operatorname{Log}(z+1) = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi i}{4} - \ln 2 = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi i}{4}.$$

Tässä on hyödynnetty tietoa, että $G(z) = \operatorname{Log}(z+1)$ on funktion g primitiivi joukossa $\mathbf{C} \setminus (-\infty, -1]$, joka sisältää janan $\beta = [1, i]$. Tulokseksi saadaan siis

$$\int\limits_{\gamma} \frac{z^2 + z + 1}{z^3 + z^2} dz = 1 - \ln\sqrt{2} + i(1 + \frac{\pi}{4}).$$

1.9. Lause (Cauchyn integraalikaava)**.** *Olkoon f analyyttinen joukossa G ja σ nollahomologinen sykli joukossa G. Tällöin*

$$n(\sigma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

kaikilla $z \in G \setminus |\sigma|$.

Todistus: Vertaa Cauchyn lokaalin version (Lause KA1.5.5) todistukseen.

Olkoon $z \in G \setminus |\sigma|$ ja määritellään $g : G \to \mathbf{C}$,

$$g(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \text{kun } \zeta \neq z \\ f'(z), & \text{kun } \zeta = z. \end{cases}$$

Tällöin g on jatkuva joukossa G ja analyyttinen joukossa $G \setminus \{z\}$. Nyt Lauseesta KA1.5.10 seuraa, että f on analyyttinen joukossa G. Niinpä Cauchyn lauseen nojalla

$$\begin{aligned} 0 = \int\limits_{\sigma} g(\zeta) d\zeta &= \int\limits_{\sigma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int\limits_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i\, n(\sigma, z) f(z). \end{aligned}$$

□

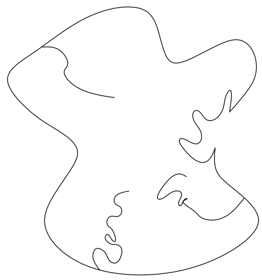
1.10. Lause. *Olkoon f analyyttinen ja σ nollahomologinen sykli joukossa G. Tällöin kaikilla $k = 1, 2, \ldots$*

$$n(\sigma, z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\sigma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \, d\zeta \,,$$

kun $z \in G \setminus |\sigma|$.

Todistus: Kuten lauseen KA1.5.11 todistus, HT. □

1.11. Määritelmä. Alue $D \subset \mathbf{C}$ on *yhdesti yhtenäinen*, jos jokainen joukon D suljettu tie γ (ja siten jokainen sykli) on nollahomologinen joukossa D.



1.12. Huomautus. Cauchyn lauseen ja integraalikaavan väitteet pätevät kaikille sykleille yhdesti yhtenäisissä alueissa.

1.13. Huomautus. Rajoitettu alue D on yhdesti yhtenäinen, jos ja vain jos $\mathbf{C} \setminus D$ on yhtenäinen (HT).

Rajoittamaton alue $D \neq \mathbf{C}$ on yhdesti yhtenäinen, jos ja vain, jos joukon $\mathbf{C} \setminus D$ kaikki komponentit ovat rajoittamattomia (HT).

1.14. Lause. *Olkoon $D \subset \mathbf{C}$ alue. Jokaisella analyyttisellä funktiolla $f : D \to \mathbf{C}$ on primitiivi alueessa D, jos ja vain jos D on yhdesti yhtenäinen.*

Todistus: Olkoon D yhdesti yhtenäinen alue ja $f : D \to \mathbf{C}$ analyyttinen. Tällöin Cauchyn lauseesta seuraa, että

$$\int_\gamma f(z) \, dz = 0 \quad \text{kaikilla suljetuilla teillä } \gamma\,, \quad |\gamma| \subset D\,.$$

Nyt Lauseen KA1.4.5 nojalla funktiolla f on primitiivi alueessa D (toisin sanoen, on olemassa analyyttinen funktio $F : D \to \mathbf{C}$ siten, että $F'(z) = f(z)$ kaikilla $z \in D$).

Olkoon sitten γ suljettu tie joukossa D ja $z_0 \in \mathbf{C} \setminus D$. Nyt funktio

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

on analyyttinen alueessa D, joten sillä on primitiivi siellä. Siispä Lauseen KA1.3.15 nojalla

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = n(\gamma, z_0).$$

Tie γ on siis nollahomologinen, joten D on yhdesti yhtenäinen. $\square$

1.15. Lause. *Yhdesti yhtenäisessä alueessa D on logaritmin haara, jos $0 \notin D$.*

Todistus: Lauseesta 1.14 seuraa, että funktiolla $\frac{1}{z}$ on primitiivi f alueessa D. Kiinnitetään $z_0 \in D$ ja asetetaan

$$\begin{aligned} g(z) &= f(z) - f(z_0) + \operatorname{Log} z_0 \\ F(z) &= z e^{-g(z)} \end{aligned}$$

Nyt g ja F ovat analyyttisiä ja g on funktion $\frac{1}{z}$ primitiivi, koska $g'(z) = \frac{1}{z}$. Edelleen

$$F'(z) = e^{-g(z)}(1 - z\frac{1}{z}) = 0.$$

Siten F on vakio ja koska

$$F(z_0) = z_0 e^{-g(z_0)} = z_0 e^{-\operatorname{Log} z_0} = \frac{z_0}{z_0} = 1,$$

on $F(z) = 1$ kaikilla $z \in D$. Toisin sanoen $z = e^{g(z)}$ kaikilla $z \in D$ eli g on logaritmin haara alueessa D. $\square$

2. Analyyttisen funktion potenssisarjaesitys

2.1. Kompleksisista sarjoista

2.1. Määritelmä. Olkoon $z_n \in \mathbf{C}$, $n = 1, 2, \ldots$. Kompleksinen sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

suppenee (*kohti lukua* $s \in \mathbf{C}$), jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} z_n \quad (= s \in C).$$

Tällöin merkitään

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

ja sanotaan, että s on sarjan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ summa. Toisin sanoen, jos

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} z_n\,,$$

niin

$$\text{sarja} \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n \quad \text{suppenee,}$$

jos ja vain jos osasummien s_k muodostama jono $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ suppenee.

Jos sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ ei suppene, se *hajaantuu*.

Sanotaan, että sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *suppenee itseisesti*, jos sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \quad \text{suppenee.}$$

2.2. Huomautus (Muutama harjoitustehtävä)**.**

- Jos $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ suppenee itseisesti, niin $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ suppenee.
- Jos $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ suppenevat ja $c \in \mathbf{C}$, niin $\sum_{n=1}^{\infty}(cz_n + w_n)$ suppenee kohti lukua $c \sum_{n=1}^{\infty} z_n + \sum_{n=1}^{\infty} w_n$.
- Jos $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ suppenevat itseisesti ja $c \in \mathbf{C}$, niin $\sum_{n=1}^{\infty}(cz_n + w_n)$ suppenee itseisesti kohti lukua $c \sum_{n=1}^{\infty} z_n + \sum_{n=1}^{\infty} w_n$.

Jatkossa tarvitaan muutakin indeksointia kuin $\sum_{n=1}^{\infty}$. Nämä, esimerkiksi $\sum_{n=-k}^{\infty}$, määritellään luonnollisella tavalla.

Esimerkki. Tutkitaan geometrista sarjaa $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $z \in \mathbf{C}$. Sarjan osasumma on

$$s_k = 1 + z + \cdots + z^k \,.$$

Huom! Tässä yhteydessä ja jatkossa merkitään $0^0 = 1$.

Jos $z = 1$, niin $s_k = k + 1 \to \infty$ ja sarja hajaantuu.

Jos $z \neq 1$, niin kaavasta

$$1 - z^{k+1} = (1 - z)(1 + z + \cdots + z^k)$$

saadaan

$$s_k = \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} - \frac{z^{k+1}}{1 - z}.$$

Jos $|z| < 1$, niin viimeinen termi

$$\frac{z^{k+1}}{1 - z} \to 0 \,.$$

Jos $|z| > 1$, niin

$$\left| \frac{z^{k+1}}{1 - z} \right| \to \infty \,.$$

Jos $|z| = 1$, $z \neq 1$, niin viimeinen termi kiertää $1/|1-z|$-säteisen kiekon kehällä. Siten raja-arvoa ei ole olemassa, kun $|z| = 1$, $z \neq 1$.

Siis
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{suppenee jos ja vain jos} \quad |z| < 1$$
ja tällöin
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}\,.$$
Harjoitustehtävänä voit osoittaa, että suppeneminen on itseistä.

Funktiojonot. Sarjateorian kehittelyä varten tarvitaan esitarkasteluja liittyen funktiojonojen (tasaiseen) suppenemiseen. Tulemme nimittäin tarkastelemaan pisteestä $z \in A \subset \mathbf{C}$ riippuvia osasummia
$$s_k(z) = \sum_{n=1}^{k} f_n(z)\,,$$
missä $f_n : A \to \mathbf{C}$ kullakin $k \in \mathbf{N}$. Tähän sovellukseen palataan vasta myöhemmin ja tarkastellaan nyt yleistä tilannetta:

2.3. Määritelmä. Olkoon $A \subset \mathbf{C}$ ja $s_k : A \to \mathbf{C}$ kullakin $k \in \mathbf{N}$. Funktiojono s_k suppenee *tasaisesti* joukossa A (kohti funktiota $s : A \to \mathbf{C}$), jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on $N \in \mathbf{N}$, jolle
$$|s_k(z) - s(z)| < \varepsilon$$
kaikilla $z \in A$, kun $k \geq N$. Huom! luku ε ei siis riipu pisteestä $z \in A$.

2.4. Huomautus. Jos $s_k : A \to \mathbf{C}$ ovat jatkuvia ja $s_k \to s$ tasaisesti joukossa A, niin $s : A \to \mathbf{C}$ on jatkuva.

2.5. Huomautus. *Muista tasaisen suppenemisen Cauchyn kriteerio:*
Jono $s_k : A \to \mathbf{C}$ suppenee tasaisesti joukossa A (kohti funktiota $s : A \to \mathbf{C}$) jos ja vain jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on $N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, jolle
$$\sup_{z \in A} |s_k(z) - s_m(z)| < \varepsilon$$
kun $k, m \geq N$.

2.6. Määritelmä. Sanotaan, että funktiojono $s_k : A \to \mathbf{C}$ suppenee *lokaalisti tasaisesti* joukossa A (kohti funktiota $s : A \to \mathbf{C}$), jos $s_k \to s$ tasaisesti jokaisessa joukon A kompaktissa osajoukossa K.

Esimerkki. Tarkastellaan funktioita $s_k(z) = z^k$, $z \in B(0,1)$. Olkoon $K \subset B(0,1)$ kompakti joukko, jolloin $K \subset B(0,r)$ jollakin $0 < r < 1$. Oletetaan, että $\varepsilon > 0$ ja valitaan N siten, että $r^N < \varepsilon$. Nyt

$$|s_k(z) - 0| = |z|^k < r^k \leq r^N < \varepsilon \,,$$

kaikilla $z \in K$, kun ja $k \geq N$. Siis $s_k \to 0$ tasaisesti joukossa K. Koska K oli mielivaltainen kompakti A:n osajoukko, niin $s_k \to 0$ lokaalisti tasaisesti kiekossa $B(0,1)$. Huom! Funktiojono s_k ei suppene tasaisesti kiekossa $B(0,1)$ (HT).

2.7. Huomautus. Yksiö $\{z\}$ on kompakti, joten jos $s_k \to s$ lokaalisti tasaisesti, niin $s_k \to s$ pisteittäin. Erityisesti lokaalisti tasaisesti suppenevan jonon rajafunktio on yksikäsitteinen.

2.8. Lemma. *Olkoot $s_k : G \to \mathbf{C}$ jatkuvia funktioita, $k \in \mathbf{N}$, jotka suppenevat lokaalisti tasaisesti avoimessa joukossa G (kohden jotain funktiota $s : G \to \mathbf{C}$). Jos γ on tie joukossa G, niin*

$$\int_\gamma s(z)\, dz = \lim_{k\to\infty} \int_\gamma s_k(z)\, dz \,.$$

TODISTUS: Harjoitustehtävä; muista, että tien jälki $|\gamma| \subset G$ on kompakti. $\square$

Analyyttisten funktioiden $s_k : G \to \mathbf{C}$ (lokaali) tasainen suppeneminen on niin vahvaa, että derivoimisen ja rajakäynnin järjestys voidaan vaihtaa.

2.9. Lause. *Oletetaan, että analyyttisten funktioiden $s_k : G \to \mathbf{C}$ jono suppenee lokaalisti tasaisesti avoimessa joukossa G ja kohti funktiota $s : G \to \mathbf{C}$. Tällöin s on analyyttinen ja $s_k^{(n)} \to s^{(n)}$ lokaalisti tasaisesti joukossa G kaikilla $n = 0, 1, 2, \ldots$.*

TODISTUS: Koska $s_k \to s$ lokaalisti tasaisesti avoimessa joukossa G, on s jatkuva joukossa G. Lemmasta 2.8 ja Cauchyn lauseesta seuraa, että

$$\int_{\partial R} s(z)dz = \lim_{k\to\infty} \int_{\partial R} s_k(z)dz = 0$$

kaikilla suljetuilla suorakaiteilla R joukossa G. Niinpä Moreran lauseen KA1.5.9 nojalla $s : G \to \mathbf{C}$ on analyyttinen.

Derivaattojen lokaalin tasaisen konvergenssin osoittamiseksi riittää osoittaa, että $s'_k \to s'$ lokaalisti tasaisesti (väite seuraa tästä induktiivisesti). Tätä varten riittää osoittaa, että $s'_k \to s'$ tasaisesti kiekossa $B(z_0, r)$, jolle $\overline{B} = \overline{B}(z_0, 2r) \subset G$. (Miksi?) Sovelletaan seuraavaksi Cauchyn estimaattia KA1.5.12 analyyttiseen funktioon $s_k - s$ kiekossa $B(z_0, 2r)$. Siis kaikilla $z \in B(z_0, r)$

$$
\begin{aligned}
|s'_k(z) - s'(z)| &\leq \frac{\sup_{\zeta \in \overline{B}} |s(\zeta) - s_k(\zeta)| 2r}{(2r - |z - z_0|)^2} \\
&\leq \underbrace{\frac{2}{r} \sup_{\zeta \in \overline{B}} |s(\zeta) - s_k(\zeta)|}_{\text{ei riipu pisteestä } z} \xrightarrow{k \to \infty} 0,
\end{aligned}
$$

koska $s_k \to s$ tasaisesti kiekossa $\overline{B} \subset G$. Koska viimeinen nollaan suppeneva yläraja ei riipu pisteestä z, niin $s'_k \to s'$ tasaisesti kiekossa $B(z_0, r)$. □

2.10. Huomautus. Lause 2.9 ei päde, jos oletetaan vain, että $s_k \to s$ pisteittäin, vaikka tiedettäisiin s analyyttiseksi. Mikäli jono s_k on lokaalisti tasaisesti rajoitettu, niin Cauchyn estimaatin (Lause KA1.5.12) avulla nähdään, että tällöin pisteittäisestä konvergenssista seuraa lokaalisti tasainen konvergenssi (HT).

Funktiosarjat. Olkoon $f_n : A \to \mathbf{C}$, $n = 1, 2, \ldots$. Sanotaan, että funktiosarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *suppenee (pisteittäin) joukossa* A, jos sarjat

$$
\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \quad \text{suppenevat jokaisella } z \in A\,.
$$

Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee itseisesti joukossa A, jos $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ suppenee joukossa A.

Sanotaan, että funktiosarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *suppenee tasaisesti joukossa* A, jos funktioiden

$$
s_k = \sum_{n=1}^{k} f_n : A \to \mathbf{C}\,, \qquad k \in \mathbf{N}\,,
$$

muodostama jono suppenee tasaisesti joukossa A. Sanomme, että funktiosarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa* A, jos funktioiden s_k (kuten yllä) muodostama jono suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa A.

2.11. Huomautus. Jos funktiosarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee tasaisesti joukossa A, niin funktiojono $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ suppenee tasaisesti joukossa A kohti nollafunktiota. Tämä seuraa tasaisen suppenemisen Cauchyn kriteeriosta, eli Huomautuksesta 2.5.

2.12. Lemma. *Olkoot $f_n : G \to \mathbf{C}$ jatkuvia, joille sarja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$$

suppenee lokaalisti tasaisesti avoimessa joukossa G. Jos γ on tie joukossa G, niin

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)dz.$$

TODISTUS: Merkitään $s_k = \sum_{n=1}^{k} f_n$ kullakin $k \in \mathbf{N}$. Oletuksen nojalla jono s_k jatkuvia funktioita suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa G kohti funktiota f. Nyt integraalin lineaarisuuden ja Lemman 2.8 nojalla

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{k\to\infty} \int_\gamma s_k(z)\,dz = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_\gamma f_n(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz\,.$$

□

2.13. Lause. *Olkoot $f_n : G \to \mathbf{C}$ analyyttisiä, ja sellaisia, että sarja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

suppenee lokaalisti tasaisesti avoimessa joukossa G. Tällöin

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

on analyyttinen joukossa G ja kaikilla $k = 1, 2, \ldots$ derivaattojen muodostama sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa G kohti f:n derivaattaa $f^{(k)}$,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \qquad \text{kun } z \in G\,.$$

TODISTUS: Seuraa Lauseesta 2.9 soveltamalla derivoinnin lineaarisuutta, HT. □

Seuraava testi on monissa tilanteissa käyttökelpoinen tapa todeta funktiosarjan tasainen (ja itseinen) suppeneminen.

2.14. Lause (Weierstrassin M-testi)**.** *Olkoot $f_n : A \to \mathbf{C}$ funktioita ja oletetaan, että kaikilla $n \in \mathbf{N}$ on sellainen $M_n < \infty$, että*

$$|f_n(z)| \leq M_n$$

kaikilla $z \in A$. Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ suppenee, niin funktiosarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee itseisesti ja tasaisesti joukossa A.

Todistus: Itseinen suppeneminen on helppo harjoitustehtävä. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $\left(\sum_{n=1}^{k} M_n\right)_k$ on Cauchy-jono, on olemassa luku $N = N(\varepsilon)$ siten, että

$$\sum_{n=1}^{k} M_n - \sum_{n=1}^{m} M_n < \varepsilon$$

kun $k \geq m \geq N$. Merkitään

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} f_n : A \to \mathbf{C}\,.$$

Nyt kun $k > m \geq N$, niin kaikilla $z \in A$

$$\begin{aligned} |s_k(z) - s_m(z)| &= \left| \sum_{n=m+1}^{k} f_n(z) \right| \\ &\leq \sum_{n=m+1}^{k} |f_n(z)| \leq \sum_{n=m+1}^{k} M_n \\ &= \sum_{n=1}^{k} M_n - \sum_{n=1}^{m} M_n < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Siten funktioiden s_k jono toteuttaa tasaisen suppenemisen Cauchyn kriteerion (katso Huomautus 2.5). □

2.15. Määritelmä. Jos $a_n \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, \dots$, niin määritellään

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} (\sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}) = \inf_n (\sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}) \in [-\infty, \infty]$$

ja

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} (\inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}) = \sup_n (\inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}) \in [-\infty, \infty].$$

2.16. Huomautus. Kompleksianalyysi 1 -kurssilta tutun kompleksisen raja-arvon tulkinnan sijaan, jota yleensä käytämme, edellä esiintyvät kaksi raja-arvoa otetaan laajennetulla reaaliakselilla $\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$. Koska (esimerkiksi)

$$b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$$

on vähenevä jono lukuja välillä $(-\infty, \infty]$, on sillä oltava raja-arvo (laajennetulla reaaliakselilla) ja lim sup on siten hyvin määritelty. Myös lim inf on hyvin määritelty.

2.17. Huomautus. Jos raja-arvo $\lim_{n\to\infty} a_n$ on olemassa laajennetulla reaaliakselilla, niin

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n .$$

Esimerkki. Olkoon

$$a_n = i^{2n}, \qquad \text{jolloin} \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = -1 < 1 = \limsup_{n\to\infty} a_n .$$

2.18. Määritelmä. Olkoon $z_0 \in \mathbf{C}$. Funktiosarjoja tyyppiä

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

$a_0, a_1, \dots \in \mathbf{C}$, sanotaan *potenssisarjoiksi pisteen* z_0 *ympärillä (tai Taylorin sarjoiksi pisteessä* z_0*)*. Luvut a_n ovat potenssisarjan $(*)$ *kertoimia*. Olkoon

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

jolloin[2] $0 \le \rho \le \infty$ on sarjan $(*)$ *suppenemissäde*. Tällöin kiekkoa $B(z_0, \rho)$ sanotaan sarjan $(*)$ *suppenemiskiekoksi*. Jos $\rho = \infty$, niin $B(z_0, \rho) = \mathbf{C}$.

[2] Määritellään $\frac{1}{0} := \infty$ ja $\frac{1}{\infty} := 0$.

2.19. Lause. *Olkoon ρ potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ suppenemissäde. Tällöin pätee:*

- *Sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ hajaantuu kaikilla z, joille $|z-z_0| > \rho$.*
- *Jos $\rho > 0$, niin sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ suppenee itseisesti ja lokaalisti tasaisesti kiekossa $B(z_0,\rho)$ ja siten funktio*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

on analyyttinen kiekossa $B(z_0,\rho)$. Lisäksi

$$f^{(n)}(z_0) = n!a_n. \tag{2.1}$$

2.20. Huomautus. Lause 2.19 ei puhu mitään sarjan suppenemisesta suppenemiskiekon $B(z_0,\rho)$ reunalla. Sarja voi joko supeta tai hajaantua siellä (HT).

Lauseen 2.19 todistus: **1.** Tarkastellaan lukua $z \in \mathbf{C}$, jolle $|z-z_0| = r > \rho$. Nyt $r^{-1} < \rho^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Tämä tarkoittaa, että on äärettömän monta indeksiä n, joille

$$\sqrt[n]{|a_n|} > r^{-1} \quad \text{eli} \quad |a_n| > r^{-n},$$

joten

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n||z-z_0|^n > r^{-n}r^{-n} = 1$$

äärettömän monella n. Erityisesti

$$|a_n(z-z_0)^n| \not\to 0\,,$$

joten sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ hajaantuu.

2. Olkoon $\rho > 0$ ja $0 < r < \rho$. Riittää osoittaa, että $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ suppenee itseisesti ja tasaisesti suljetussa kiekossa $\bar{B}_r := \overline{B}(z_0,r)$. (Miksi?) Valitaan $s \in (r,\rho)$. Koska $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho^{-1} < s^{-1}$, on $N \in \mathbf{N}$, jolle

$$\sqrt[n]{|a_n|} < s^{-1}, \quad \text{kun} \quad n \geq N\,.$$

Olkoon $c = \max\{1, |a_0|, |a_1|s, \dots, |a_N|s^N\}$, jolloin

$$|a_n| \le cs^{-n} \quad \text{kaikilla } n.$$

Toisin sanoen

$$|a_n(z - z_0)^n| \le c\left(\frac{r}{s}\right)^n =: M_n \quad \text{kaikilla } z \in \bar{B}_r.$$

Koska $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n$ suppenee, sillä $\frac{r}{s} < 1$, seuraa Weierstrassin M-testistä 2.14, että sarja $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ suppenee tasaisesti ja itseisesti kiekossa $\bar{B}_r$.

3. Funktion f analyyttisyyttä ja derivaattoja koskeva väite seuraa lauseesta 2.13; huomaa, että osasummafunktiot $s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n(z - z_0)^n$ ovat kokonaisia. □

2.2. Potenssisarjakehitelmä

Analyyttinen funktio on lokaalisti potenssisarja:

2.21. Lause (Potenssisarjakehitelmä). *Olkoon f analyyttinen avoimessa joukossa G ja $B = B(z_0, r) \subset G$. Tällöin funktiolla f on potenssisarjaesitys pisteen z_0 ympärillä ja f määrää potenssisarjan yksikäsitteisesti:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad z \in B,$$

missä

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Todistus: *Potenssisarjaesityksen olemassaolo:* Olkoon

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

ja $z \in B$. Olkoon s sellainen, että $|z - z_0| < s < r$. Jos $\zeta \in \partial B(z_0, s)$, niin

$$\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{s} < \frac{s}{s} = 1,$$

joten geometrisen sarjan summan kaavalla saadaan

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Weierstrassin M-testin nojalla viimeinen sarja suppenee (ζ:n suhteen) lokaalisti tasaisesti avoimessa joukossa $G \setminus \overline{B}(z_0, |z - z_0|) \supset \partial B(z_0, s)$, joten jos $\gamma(t) = z_0 + se^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, niin Cauchyn integraalikaavasta seuraa, että

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta .$$

Lemman 2.12 nojalla

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \Big((z - z_0)^n \, \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \Big),$$

ja koska Cauchyn integraalikaavan 1.10 mukaan

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n \, ,$$

saadaan edellisestä

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Potenssisarjan yksikäsitteisyys: Olkoon

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \quad \text{kaikilla } z \in B \, .$$

Tällöin sarjan suppenemissäde on vähintään yhtä suuri kuin r ja lauseesta 2.19 seuraa, että

$$b_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n \, ,$$

mikä todistaa väitteen. $\square$

Esimerkki. Etsitään funktion $f(z) = e^z$ potenssisarjakehitelmä origossa.

Koska $f^{(n)}(z) = e^z$ kaikilla z, on $f^{(n)}(0) = 1$ kaikilla n, joten

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} z^n = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{kaikilla } z \in \mathbf{C}\,.$$

Potenssisarjakehitelmän sovellutuksena todistamme seuraavan yksikäsitteisyyslauseen:

2.22. Lause. *Olkoon f analyyttinen alueessa D. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

i) $f \equiv 0$ alueessa D (eli $f(z) = 0$ kaikilla $z \in D$).

ii) Joukolla

$$N = \{z \in D : \ f(z) = 0\}$$

on kasautumispiste D:ssä.

iii) On olemassa piste $z_0 \in D$, jolle

$$f^{(k)}(z_0) = 0 \qquad \textit{kaikilla } k = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

TODISTUS: Selvästi i) $\Rightarrow$ ii).

Osoitetaan sitten, että ii) $\Rightarrow$ iii): Olkoon $z_0 \in D$ joukon N kasautumispiste. Koska f on jatkuva, on $f(z_0) = 0$. Ellei

$$f^{(k)}(z_0) = 0 \qquad \text{kaikilla } k = 1, 2, 3, \ldots$$

niin olkoon

$$k_0 = \min\{k : \ f^{(k)}(z_0) \neq 0\} \in \mathbf{N}.$$

Tällöin f:n potenssisarja pisteessä z_0 on

$$\sum_{n=k_0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\,, \qquad \text{missä } a_{k_0} \neq 0.$$

Jos

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k_0} (z - z_0)^n\,,$$

niin g on analyyttinen eräässä z_0:n ympäristössä B ja

$$f(z) = (z - z_0)^{k_0} g(z) \qquad \text{kaikilla } z \in B.$$

Koska g on jatkuva ja $g(z_0) = a_{k_0} \neq 0$, on olemassa punkteerattu z_0:n ympäristö U^*, missä

$$g(z) \neq 0 \qquad \text{kaikilla } z \in U^*.$$

Erityisesti

$$0 \neq (z - z_0)^{k_0} g(z) = f(z) \text{ kaikilla } z \in U^*\,,$$

mikä on vastoin tietoa, että z_0 on joukon N kasautumispiste. Väite iii) seuraa.

Lopuksi osoitamme, että iii) $\Rightarrow$ i): Olkoon

$$U = \{z \in D : f^{(k)}(z) = 0 \qquad \text{kaikilla } k = 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Koska analyyttisen funktion f kaikki derivaatat ovat jatkuvia (jopa analyyttisiä) on joukko U suljettu D:ssä. Koska $z_0 \in U$, riittää D:n yhtenäisyyden tähden osoittaa, että U on myös avoin: Olkoon $w \in U$ ja olkoon

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - w)^n$$

f:n potenssisarjaesitys, joka suppenee kiekossa $B(w, r) \subset D$. Lauseen 2.21 nojalla

$$a_n = \frac{f^{(n)}(w)}{n!} = 0 \qquad \text{kaikilla } n = 0, 1, 2, 3, \dots\,,$$

joten $f(z) = 0$ kaikilla $z \in B(w, r)$ ja siten $B(w, r) \subset U$, joka on näin ollen avoin joukko. $\square$

Kuvausta f sanotaan *diskreetiksi*, jos jokaisen pisteen alkukuva on diskreetti joukko, ts. sillä ei ole kasautumispistettä f:n määrittelyjoukossa. Lauseen 2.22 mukaan alueen D analyyttinen funktio on diskreetti ellei se ole vakiokuvaus.

Lauseen 2.22 nojalla seuraava määritelmä on hyvin asetettu.

2.23. Määritelmä. Olkoon f analyyttinen avoimessa joukossa G ja $z_0 \in G$. Jos $f(z_0) = 0$ ja $f \not\equiv 0$ jokaisessa z_0:n ympäristössä, niin lukua

$$k_0 = \min\{k \in \mathbf{N} : f^{(k)}(z_0) \neq 0\}$$

sanotaan *nollakohdan z_0 kertaluvuksi.*

2.24. Lause. *Oletetaan, että f analyyttinen avoimessa joukossa G, $z_0 \in G$ ja $k_0 = 1, 2, 3, \ldots$. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

i) Piste z_0 on f:n nollakohta, jonka kertaluku on k_0.

ii) On olemassa analyyttinen funktio $g : G \to \mathbf{C}$, jolle $g(z_0) \neq 0$ ja

$$f(z) = (z - z_0)^{k_0} g(z) \quad \textit{kaikilla } z \in G\,.$$

TODISTUS: Olkoon z_0 f:n kertalukua k_0 oleva nollakohta ja olkoon

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

f:n potenssisarjakehitelmä kiekossa $B(z_0, r) \subset G$. Tällöin $a_n = 0$ kaikilla $n < k_0$, joten

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k_0}} &= (z - z_0)^{-k_0} \sum_{n=k_0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k_0} (z - z_0)^n\,, \qquad \text{kun } z \in B^*(z_0, r)\,, \end{aligned}$$

missä oikea puoli määrittelee kiekossa $B(z_0, r)$ analyyttisen funktion, jonka arvo pisteessä z_0 on

$$a_{k_0} = \frac{f^{(k_0)}(z_0)}{k_0!} \neq 0\,.$$

Siten funktio

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{k_0}}\,, & \text{kun } z \neq z_0 \\ a_{k_0}\,, & \text{kun } z = z_0\,, \end{cases}$$

on etsimämme funktio.

Olkoon kääntäen g analyyttinen funktio, jolle $g(z_0) \neq 0$ ja

$$f(z) = (z - z_0)^{k_0} g(z) \quad \text{kaikilla } z \in G\,.$$

Tällöin $f \not\equiv 0$ jokaisessa pisteen z_0 ympäristössä ja kun $k \leq k_0$, niin

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \frac{k_0!}{(k_0 - k + n)!} (z - z_0)^{k_0 + n - k} g^{(n)}(z)\,,$$

missä

$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!}\,.$$

Siten

$$f^{(k)}(z_0) = \begin{cases} 0\,, & \text{kun } k < k_0 \\ k_0!g(z_0) \neq 0\,, & \text{kun } k = k_0\,, \end{cases}$$

joten z_0 on kertalukua k_0 oleva f:n nollakohta. □

2.3. Laurent-sarjat

Laurent-sarjoja varten tarvitsemme kahteen suuntaan äärettömiä tuplasarjoja:

2.25. Määritelmä. *Tuplasarja* $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} z_n$ *suppenee*, jos

$$\text{sekä} \quad \sum_{n=0}^{\infty} z_n \quad \text{että} \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n} \quad \text{suppenevat.}$$

Tällöin

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} z_n + \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n}.$$

Sarja $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} z_n$ *suppenee itseisesti*, jos sekä $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ että $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_{-n}$ suppenevat itseisesti.

Sanomme, että sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n 0^n$ hajaantuu, jos $a_n \neq 0$ jollakin $n < 0$.

Tuplafunktiosarjojen *suppeneminen, itseinen suppeneminen ja (lokaali) tasainen suppeneminen joukossa A* määritellään analogisella tavalla funktiosarjojen vastaavien käsitteiden avulla (kts. s. 16)

2.26. Määritelmä. *Laurent-sarja pisteessä* $z_0 \in \mathbf{C}$ on muotoa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad , \quad a_n \in \mathbf{C}$$

oleva tuplafunktiosarja.

Luku

$$\rho_O = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

on Laurent-sarjan $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *ulkopuolinen suppenemissäde* ja

$$\rho_I = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$$

sen *sisäpuolinen suppenemissäde*. Kun $\rho_I < \rho_O$, sanotaan että

$$D = \{z \in \mathbf{C} : \rho_I < |z-z_0| < \rho_O\}$$

on kyseisen sarjan *suppenemisrengas*. Jos $\rho_I = 0$ ja $\rho_O = \infty$, niin $D = \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

2.27. Huomautus. Taylorin sarja eli tavallinen potenssisarja on Laurent-sarja, kun $a_n = 0$ kaikilla $n < 0$. Sen sisäpuolinen suppenemissäde on 0.

2.28. Lause. *Olkoon ρ_O ja ρ_I Laurent-sarjan $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ulko- ja sisäpuoliset suppenemissäteet. Sarja hajaantuu, jos*

$$|z-z_0| > \rho_O \quad \textit{tai} \quad |z-z_0| < \rho_I.$$

Tämän lisäksi Laurent-sarjalla on seuraavat suppenemisominaisuudet:

- *Jos $\rho_O > 0$, niin $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)$ suppenee itseisesti ja lokaalisti tasaisesti kiekossa $B_O = B(z_0, \rho_O)$ ja määrittelee siten analyyttisen funktion f_O kiekossa B_O.*
- *Jos $\rho_I < \infty$, niin $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ suppenee itseisesti ja lokaalisti tasaisesti avoimessa joukossa*

  $$\complement B_I = \{z : |z-z_0| > \rho_I\},$$

  joten funktio

  $$f_I(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

  on analyyttinen joukossa $\complement B_I$.

- *Jos $\rho_I < \rho_O$, niin tarkasteltava Laurent-sarja suppenee itseisesti ja lokaalisti tasaisesti renkaassa*
$$D = \{z : \rho_I < |z - z_0| < \rho_O\}$$
ja siten
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0) = f_I(z) + f_O(z)$$
on analyyttinen joukossa D. Lisäksi kaikilla $n \in \mathbf{Z}$
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z-z_0|=r\}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz\,,$$
kunhan $\rho_I < r < \rho_O$ ja $\{z : |z - z_0| = r\}$ on suunnistettu vastapäivään.

TODISTUS: Koska ρ_O on potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ on suppenemissäde, seuraa sitä ja funktiota f_O koskevat väitteet lauseesta 2.19.

Sitten tarkastellaan sarjaa
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\zeta^n,$$
joka on potenssisarja, jonka suppenemissäde on $1/\rho_I$. Sarja hajaantuu, jos $|\zeta| > \frac{1}{\rho_I}$, ja jos $\rho_I < \infty$, suppenee itseisesti ja lokaalisti tasaisesti kiekossa $B(0, 1/\rho_I)$. Merkitään
$$\zeta = \frac{1}{z - z_0},$$
jolloin potenssisarjan lokaalisti tasaisesta suppenemisesta seuraa (HT) että sarja
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$$
suppenee itseisesti ja lokaalisti tasaisesti joukossa $\{z : |z - z_0| > \rho_I\}$ ja hajaantuu, kun $|z - z_0| < \rho_I$. Funktiosta f_I tulee erityisesti analyyttinen joukossa $\complement B_I$.

Näistä saadaan, että tuplasarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ hajaantuu, jos
$$\text{joko} \quad |z - z_0| > \rho_O \quad \text{tai} \quad |z - z_0| < \rho_I\,.$$

Jos $\rho_I < \rho_O$ eli $\rho_O > 0$ ja $\rho_I < \infty$, niin yllä olevista tarkasteluista seuraa, että $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ suppenee itseisesti ja lokaalisti tasaisesti avoimessa renkaassa

$$D = B_O \cap \complement B_I$$

ja siellä

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = f_O(z) + f_I(z)$$

on analyyttinen.

Olkoon sitten $\rho_I < r < \rho_O$ ja $k \in \mathbf{Z}$. Merkitään

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-k-1} \quad , \quad z \in D.$$

Olkoon $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Lemman 2.12 nojalla integroinnin ja summauksen järjestys voidaan vaihtaa, koska sarja suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa $D \supset |\gamma|$, ja saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-k-1} dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_\gamma (z-z_0)^{n-k-1} dz \\ &= a_k\,, \end{aligned}$$

koska funktiolla $(z-z_0)^{n-k-1}$ on primitiivi, paitsi jos $n = k$. $\square$

Kääntäen, rengasalueessa analyyttisellä funktiolla on Laurentin sarjakehitelmä:

2.29. Lause (Analyyttisen funktion Laurentin sarjakehitelmä)**.** *Oletetaan, että $0 \le a < b \le \infty$. Olkoon f analyyttinen renkaassa*

$$D = \{z \in \mathbf{C} : a < |z-z_0| < b\}.$$

Tällöin f voidaan esittää Laurent-sarjana joukossa D,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\,, \quad z \in D.$$

Esitys on yksikäsitteinen: kaikilla $n \in \mathbf{Z}$

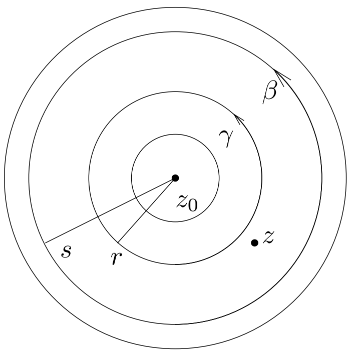
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\{|z-z_0|=r\}} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}\,,$$

kunhan $a < r < b$ ja ympyrä on $\{|z-z_0| = r\}$ suunnistettu vastapäivään.

TODISTUS: Valitaan $r_0 \in (a,b)$. Olkoon

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\{|z-z_0|=r_0\}} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

Huomaa, että Cauchyn lauseen perustella säteen r_0 valinnalla ei ole merkitystä, koska kahden eri säteisen ympäränkehän kiertävät tiet ovat homologisia D:ssä.



Olkoon $z \in D$. Valitaan r, s, joille $a < r < |z-z_0| < s < b$. Olkoon

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it}\,, \quad 0 \le t \le 2\pi$$
$$\beta(t) = z_0 + se^{it}\,, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Tällöin sykli $\sigma = (\beta, \overleftarrow{\gamma})$ on nollahomologinen joukossa D ja $n(\sigma, z) = 1$, joten Cauchyn integraalikaavasta 1.9 seuraa, että

$$(*) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Nyt jatketaan kuten potenssisarjaesityksen todistuksessa (katso lause 2.21). Jos $\zeta \in |\beta|$, niin

$$\left|\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{s} < 1\,,$$

joten

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Weierstrassin M-testin nojalla suppeneminen on (ζ:n suhteen) lokaalisti tasaista joukossa $D \setminus \overline{B}(z_0, |z-z_0|) \supset |\beta|$ joten Lemmasta 2.12 seuraa, että

$$(**) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_\beta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_\beta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right)}_{=a_n} (z-z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Samaan tapaan $\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| = \frac{r}{|z-z_0|} < 1$ kaikilla $\zeta \in |\gamma|$ ja

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = -\frac{f(\zeta)}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(\zeta - z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}.$$

Weierstrassin M-testin nojalla suppeneminen on (ζ:n suhteen) lokaalisti tasaista joukossa $D \cap B(z_0, |z-z_0|) \supset |\gamma|$, joten

$$(***) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = -\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta \right)}_{=a_{-n}} (z-z_0)^{-n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n}.$$

Nyt siis tuplasarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ suppenee renkaassa D ja yhtälöistä $(*)$, $(**)$ ja $(***)$ seuraa, että

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n - \left(-\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \end{aligned}$$

kaikilla $z \in D$.

Yksikäsitteisyys seuraa lauseesta 2.28 kuten potenssisarjan tapauksessa, HT. $\square$

Esimerkki. Olkoon $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, jolloin f on analyyttinen joukossa $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Koska

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{kaikilla } z \in \mathbf{C}\,,$$

saamme

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{z^n}{(-n)!}.$$

Tämä on f:n Laurent-sarja, mikä on yksikäsitteinen.

3. Eristetyt erikoispisteet ja residylause

3.1. Erikoispisteet

Funktiolla f on *eristetty erikoispiste* (tai lyhyemmin: *erikoispiste*) $z_0 \in \mathbf{C}$, jos on olemassa sellainen $r > 0$, että f on analyyttinen punkteeratussa kiekossa

$$B^* = B^*(z_0, r) = B(z_0, r) \setminus \{z_0\} = \{z : 0 < |z - z_0| < r\}.$$

Sanotaan, että f on *analyyttinen (avoimessa joukossa) G lukuunottamatta eristettyjä erikoispisteitä*, jos on eristettyjen erikoispisteiden joukko $E \subset G$ siten, että joukolla E ei ole kasautumispisteitä joukossa G ja f on analyyttinen joukossa $G \setminus E$.

Olkoon funktiolla f eristetty erikoispiste z_0 ja valitaan sellainen $r > 0$, että f on analyyttinen punkteeratussa kiekossa $B^* = B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Lauseen 2.29 mukaan funktiolla f on yksikäsitteinen Laurent-sarja, eli

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

kaikilla $z \in B^*$.

Luokitellaan erikoispisteet:

- z_0 on funktion f *poistuva erikoispiste*, jos $a_n = 0$ kaikilla $n < 0$.
- z_0 on funktion f *napa*, jos on $k < 0$ siten, että $a_k \neq 0$, mutta $a_k \neq 0$ vain äärellisen monella $k < 0$.
- z_0 on funktion f *oleellinen erikoispiste*, jos $a_k \neq 0$ äärettömän monella $k < 0$.

Esimerkki. Origo (eli piste 0) on

$$\text{funktion} \quad f(z) = \frac{\sin z}{z} \quad \text{poistuva erikoispiste,}$$

$$\text{funktion} \quad g(z) = \frac{1}{z} \quad \text{napa}$$

$$\text{ja funktion} \quad h(z) = e^{\frac{1}{z}} \quad \text{oleellinen erikoispiste.}$$

3.1. Huomautus (Tärkeä!). Piste z_0 on funktion f poistuva erikoispiste, jos ja vain jos

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z)\,, & \text{kun } z \neq z_0 \\ a_0\,, & \text{kun } z = z_0\,, \end{cases}$$

on hyvin määritelty ja analyyttinen pisteen z_0 ympäristössä; tässä esiintyvä luku a_0 on f:n Laurent-sarjan 0. kerroin.

3.2. Huomautus. Olkoon z_0 funktion f erikoispiste. Sanotaan, että

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$$

on funktion f Laurent-sarjan

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

singulaariosa. Tällöin S on analyyttinen joukossa $\mathbf{C} \setminus \{z_0\}$ (ylim. HT).

Lisäksi z_0 on funktion $f - S$ erikoispiste. Se on kuitenkin poistuva, koska

$$f(z) - S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

jossakin pisteen z_0 punkteeratussa ympäristössä.

3.3. Huomautus. Funktion f singulaariosassa esiintyvä kerroin a_{-1} on erikoisroolissa. Oletetaan, että z_0 on funktion f erikoispiste ja sanotaan että

$$a_{-1} =: \operatorname{Res}(f, z_0)$$

on funktion f *residy* pisteessä z_0. Jos $r > 0$ on riittävän pieni, niin Lauseen 2.29 nojalla

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z-z_0|=r\}} f(z)\, dz\,,$$

missä ympyränkehä on suunnistettu vastapäivään.

3.2. Poistuvat erikoispisteet

Seuraavaksi karakterisoimme poistuvat erikoispisteet. Alla esitetty tulos on varsin käyttökelpoinen monissa tilanteissa.

3.4. Lause (Riemannin jatkolause)**.** *Olkoon funktiolla f eristetty erikoispiste z_0. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitävät:*

i) Piste z_0 on poistuva erikoispiste.

ii) On $r > 0$, jolle f on rajoitettu punkteeratussa kiekossa

$$B^* = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z - z_0| < r\}.$$

iii) Pätee:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0\,.$$

Todistus: i) $\Rightarrow$ ii). Harjoitustehtävä.

ii) $\Rightarrow$ iii). Olkoon $M, r > 0$ siten, että

$$|f(z)| \leq M\,, \qquad \text{kun } z \in B^* = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z - z_0| < r\}\,.$$

Nyt

$$|z - z_0||f(z)| \leq M|z - z_0| \xrightarrow{z \to z_0} 0\,.$$

iii) $\Rightarrow$ i). Määritellään

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0) f(z)\,, & \text{kun } z \neq z_0 \\ 0\,, & \text{kun } z = z_0. \end{cases}$$

Koska g on jatkuva kiekossa $B = B(z_0, r)$ pienellä $r > 0$ ja analyyttinen punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0, r)$, seuraa Lauseesta KA1.5.10, että g on analyyttinen koko kiekossa B. Niinpä kun $z \neq z_0$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z - z_0} g(z) = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \\ &\overset{b_0 = g(z_0) = 0}{=} \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

mikä on Laurentin sarja, jossa singulaarinen osa on 0. Siten z_0 on poistuva. $\square$

3.3. Navat

3.5. Määritelmä. Olkoon z_0 funktion f napa ja

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Tällöin luku

$$k = -\min\{n < 0 : a_n \neq 0\}$$

on *navan z_0 kertaluku.*

3.6. Lause. *Olkoon $k \in \mathbf{N}$ ja f analyyttinen punkteeratussa kiekossa $B^* = B^*(z_0, r)$. Tällöin z_0 on funktion f k. kertaluvun napa jos ja vain jos on olemassa analyyttinen funktio g kiekossa $B(z_0, r)$ siten, että $g(z_0) \neq 0$ ja*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} \quad \text{kaikilla } z \in B^*.$$

TODISTUS: Todistetaan ensin ehdon välttämättömyys. Kaikilla $z \in B^*$

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_{-k} \neq 0.$$

Määritellään

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k} (z - z_0)^n.$$

Tällöin g on analyyttinen kiekossa $B(z_0, r)$, sillä sarja suppenee kiekossa $B(z_0, r)$. Lisäksi $g(z_0) = a_{-k} \neq 0$. Nyt

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k} (z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^{-k} g(z). \end{aligned}$$

Seuraavaksi todistetaan ehdon riittävyys. Kun

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n , \quad b_0 \neq 0 ,$$

ja

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} g(z)\,,$$

niin

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-k}^{\infty} b_{n+k} (z - z_0)^n,$$

mikä on funktion f Laurentin sarja, jonka $-k$. kerroin on $= b_0 \neq 0$. □

3.7. Huomautus (Tärkeä!). Olkoon z_0 funktion f k. kertaluvun napa ja g pisteen z_0 ympäristössä analyyttinen siten, että kaikilla $z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} g(z).$$

Tällöin

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=-k}^{\infty} b_{n+k} (z - z_0)^n\,, \end{aligned}$$

mikä on funktion f Laurentin sarja. Tässä termin $(z - z_0)^{-1}$ kerroin on

$$b_{-1+k} = b_{k-1} = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

eli

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}.$$

Koska f ei ole määritelty pisteessä z_0, on tämä parasta kirjoittaa muodossa: Jos z_0 on funktion f k. kertaluvun napa, niin

(3.1)
$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \big((z - z_0)^k f(z) \big).$$

Erityisesti, jos z_0 on 1. kertaluvun napa, on

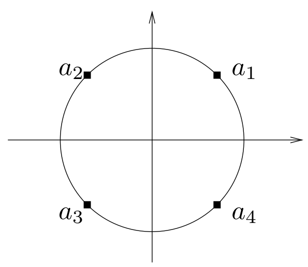
$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Esimerkki. Olkoon
$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$$
Tällöin
$$f(z) = \frac{1}{z + \frac{z^2}{2!} + \dots} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots} = \frac{1}{z}g(z),$$
missä g on analyyttinen ja $g(0) \neq 0$. Siten funktiolla f on 1. kertaluvun napa pisteessä 0 ja

$$\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{\frac{d}{dz}(e^z)|_{z=0}} = 1.$$

3.8. Esimerkki. Olkoon
$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}\,,$$
jolloin funktiolla f on navat

$$a_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}\,, \quad a_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}\,, \quad a_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}} \quad \text{ja} \quad a_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$



Selvästi navat a_n ovat yksinkertaisia (HT). Niinpä

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,a_1) &= \lim_{z\to a_1}(z-a_1)f(z) = \lim_{z\to a_1}\frac{z^2}{(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)}\\ &= \frac{a_1^2}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)} = \sqrt{2}\frac{2i}{2i\cdot 2(1+i)\cdot 2i}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{4(i+1)} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{4}e^{-\frac{i\pi}{4}}.\end{aligned}$$

Samoin
$$\operatorname{Res}(f,a_2) = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{4}e^{-\frac{3i\pi}{4}}.$$
Residyt navoissa a_3 ja a_4 voidaan selvittää vastaavasti.

3.9. Lause. *Olkoon z_0 funktion f eristetty erikoispiste. Tällöin*

i) piste z_0 on funktion f napa jos ja vain jos $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$.

ii) piste z_0 on k. kertaluvun napa jos ja vain jos k on se positiivinen kokonaisluku, jolle

$$\lim_{z\to z_0} |z-z_0|^k |f(z)| \in]0,\infty[.$$

Todistus: Olkoon z_0 funktion f k. kertaluvun napa. Tällöin on olemassa pisteen z_0 ympäristössä analyyttinen funktio g siten, että $g(z_0) \neq 0$ ja

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}\,.$$

Niinpä

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \lim_{z\to z_0} \left|\frac{g(z)}{(z-z_0)^k}\right| = \infty,$$

koska $g(z_0) \neq 0$. Myöskin on

$$|z-z_0|^l |f(z)| = |z-z_0|^{l-k} |g(z)| \to \begin{cases} \infty\,, & \text{jos } l < k \\ |g(z_0)| \in (0,\infty)\,, & \text{jos } l = k \\ 0\,, & \text{jos } l > k. \end{cases}$$

Tämä todistaa molempien väitteiden ”vain jos” puolet.

Olkoon sitten

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty \quad \text{ja} \quad h = \frac{1}{f}\,.$$

Nyt h on rajoitettu ($|h| \leq 1$) pisteen z_0 ympäristössä, joten z_0 on funktiolle h poistuva erikoispiste ja

$$h(z_0) = \lim_{z\to z_0} h(z) = 0\,.$$

Koska $h \not\equiv 0$, niin jos

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

on funktion h potenssisarjakehitelmä, niin $b_0 = 0$, mutta

$$k := \min\{n \in \mathbf{N} : b_n \neq 0\} \in \{1,2,3,\dots\}.$$

Siten funktio

$$g(z) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+k}(z-z_0)^n}$$

on analyyttinen pisteen z_0 ympäristössä ja

$$g(z_0) = \frac{1}{b_k} \neq 0\,.$$

Niinpä

$$f(z) = \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{\sum_{n=k}^{\infty} b_n(z-z_0)^n} = \frac{1}{(z-z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+k}(z-z_0)^n} = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}.$$

Lauseen 3.6 mukaan z_0 on funktion f napa, jonka kertaluku on k. mistä seuraa ensimmäisen väitteen ”jos” osa.

Lopuksi, jos tiedetään, että

$$\lim_{z \to z_0} |z-z_0|^k |f(z)| = a \in (0, \infty)$$

jollakin $k \in \mathbf{N}$, niin

$$|f(z)| \to \infty \text{ , kun } z \to z_0,$$

ja ylläoleva todistus osoittaa, että z_0 on napa, jonka kertaluku on k (huomaa, että $1/|b_k| = a$). □

3.4. Oleellisista erikoispisteistä

Analyyttisen funktion käyttäytyminen oleellisen erikoispisteen ympäristössä on villiä. Pätee **Picardin (suuri) lause**: *Jos z_0 on analyyttisen funktion f oleellinen erikoispiste, niin joukossa $\mathbf{C} \setminus f(B^*(z_0, r))$ on korkeintaan yksi piste, oli $r > 0$ miten pieni hyvänsä.*

Emme kuitenkaan todista tätä syvällistä lausetta, vaan samansuuntaisen, mutta heikomman (ja helpomman) tuloksen.

3.10. Lause (Casorati-Weierstrass)**.** *Jos z_0 on punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0, r)$ analyyttisen funktion f oleellinen erikoispiste, niin kuvajoukko $f(B^*(z_0, r))$ on tiheä $\mathbf{C}$:ssä, ts.*

$$\overline{f(B^*(z_0, r))} = \mathbf{C}\,.$$

Todistus: Jos kuvajoukko ei olisi tiheä, niin sen komplementissa olisi kiekko

$$B(w,\varepsilon) \cap f(B^*(z_0,r)) = \emptyset \,.$$

Silloin funktio

$$g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$$

olisi analyyttinen punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0,r)$. Lisäksi g on rajoitettu, koska

$$\begin{aligned}|g(z)| &= \frac{1}{|f(z)-w|} \\ &\le \frac{1}{\varepsilon}\,,\end{aligned}$$

joten Riemannin jatkolauseen 3.4 nojalla z_0 on g:n poistuva erikoispiste. Siten koska g:llä on raja-arvo z_0:ssa, on z_0 funktion $1/g$ poistuva erikoispiste tai napa. Näin ollen z_0 on funktion

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$$

erikoispiste, joka on joko poistuva tai napa, mikä on vastoin oletusta, että z_0 oli f:n oleellinen erikoispiste. □

Kokonainen funktio f on joko polynomi tai sitten sitten sillä on olellinen erikoispiste äärettömyydessä:

3.11. Lause. *Olkoon $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ kokonainen. Tällöin funktiolla*

$$g(z) = f(\frac{1}{z})$$

on oleellinen erikoispiste origossa tai f on polynomi.

Todistus: Ellei f ole polynomi, niin f:llä on potenssisarjaesitys

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\,, \quad z \in C,$$

missä $a_n \neq 0$ äärettömän monella n. Siten funktion g Laurent-sarja on

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} b_n z^n\,, \quad b_n = a_{-n}\,,\ z \in \mathbf{C}\setminus\{0\}\,,$$

joten koska $b_n = a_{-n} \neq 0$ äärettömän monella $n < 0$, on 0 sen oleellinen erikoispiste. □

Esimerkki. Olkoon f analyyttinen pisteen z_0 ympäristössä $B^* = B^*(z_0, r)$. Oletetaan, että f ei ole identtisesti nolla joukossa B^* ja että on olemassa pisteet $z_n \subset B^*$ siten, että $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ ja $f(z_n) = 0$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$. (Konkreettisena esimerkkinä mainitaan funktio

$$f(z) = \cos\left(\frac{1}{z-1}\right),$$

jolla on eristetty erikoispiste $z_0 = 1$.)

Tällöin:

- z_0 ei voi olla funktion f poistuva erikoispiste, sillä muuten f olisi identtisesti nolla joukossa B^*, kts. Lause 2.22.
- Koska $\lim_{n\to\infty} |f(z_n)| = 0 < \infty$ ja $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, niin z_0 ei voi olla funktion f napa, kts. Lause 3.9.

Näin ollen pisteen z_0 on oltava oleellinen erikoispiste (muita vaihtoehtoja ei ole, HT).

3.5. Residylause

Residylause antaa tehokkaan työkalun laskea kompleksisia integraaleja.

3.12. Lause (Residylause)**.** *Olkoon σ nollahomologinen sykli avoimessa joukossa G ja f analyyttinen joukossa G lukuunottamatta eristettyjen erikoispisteiden joukkoa E, jolle $E \cap |\sigma| = \emptyset$. Tällöin*

$$\int_\sigma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a\in E} n(\sigma, a)\,\mathrm{Res}(f, a).$$

3.13. Huomautus. Cauchyn lauseen todistuksessa todettiin, että jos σ on nollahomologinen sykli joukossa G, niin

$$K_\sigma = |\sigma| \cup \{z \in \mathbf{C} \setminus |\sigma| : n(\sigma, z) \neq 0\}$$

on joukon G kompakti osajoukko. Olkoon $D \subset\subset G$ avoin ja $K_\sigma \subset D$. Tällöin σ on nollahomologinen joukossa D. Koska joukolla E ei ole kasautumispisteitä joukossa G, on joukko $E \cap D = \{z_1, \dots, z_p\}$ äärellinen. Siten summa väitteessä on hyvin määritelty.

$$\sum_{a\in E} n(\sigma, a)\,\mathrm{Res}(f, a) = \sum_{j=1}^{p} n(\sigma, z_j)\,\mathrm{Res}(f, z_j).$$

Todistus: Olkoot $z_1, \dots, z_p$ kuten huomautuksessa, ja S_k funktion f singulaariosa pisteessä z_k, $k = 1, \dots, p$. Tällöin S_k on analyyttinen joukossa $\mathbf{C} \setminus \{z_k\}$ lauseen 2.28 perusteella ja siis funktiolla $f - S_k$ on poistuva erikoispiste z_k. Siten

$$g = f - S_1 - S_2 - \cdots - S_p$$

on analyyttinen joukossa D lukuunottamatta poistuvia erikoispisteitä $z_1, \dots, z_p$. Koska nämä ovat poistuvia, voidaan olettaa, että g on analyyttinen koko D:ssä. Nyt Cauchyn lauseesta seuraa, että

$$0 = \int_\sigma g(z)dz = \int_\sigma f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{p} \int_\sigma S_k(z)dz$$

eli

$$(*) \qquad \int_\sigma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{p} \int_\sigma S_k(z)dz.$$

Jos nyt

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$$

on funktion f singulaariosa mielivaltaisessa pisteessä $z_0 \in E$, niin sarja S suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa $\mathbf{C} \setminus \{z_0\}$. Erityisesti se suppenee tasaisesti syklin σ jäljellä. Siten

$$\int_\sigma S(z)dz = \int_\sigma \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \int_\sigma \frac{dz}{(z - z_0)^n},$$

missä käytettiin lemmaa 2.12. Koska funktiolla $(z - z_0)^{-n}$ on primitiivi, kun $n > 1$,

$$\int_\sigma (z - z_0)^{-n} dz = 0\,, \qquad \text{kun } n > 1\,,$$

joten saadaan

$$\int_\sigma S(z)dz = a_{-1} \int_\sigma \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0) n(\sigma, z_0).$$

Nyt yhtälöstä $(*)$ seuraa, että

$$\int_\sigma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{p} \int_\sigma S_k(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} n(\sigma, z_k) \operatorname{Res}(f, z_k).$$

$\square$

Residylausetta voidaan soveltaa myös reaalisten integraalien laskemiseen, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Esimerkki. Osoita, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Ensiksi todetaan, että integraali suppenee, koska

$$\frac{x^2}{1+x^4} \le \frac{1}{x^2}\,.$$

Olkoon

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}\,,$$

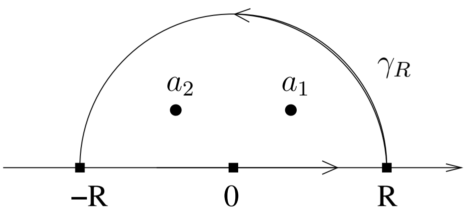
jolloin funktiolla f on navat

$$a_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}\,, \quad a_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}\,, \quad a_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}} \quad \text{ja} \quad a_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}\,.$$

Esimerkin 3.8 laskun nojalla

$$\mathrm{Res}(f, a_1) = \frac{1}{4}e^{-\frac{i\pi}{4}}\,, \qquad \mathrm{Res}(f, a_2) = \frac{1}{4}e^{-\frac{3i\pi}{4}}\,.$$

Olkoon $R > 1$ ja γ_R puolipallon $B(0,R) \cap \{z : Im(z) > 0\}$ reuna vastapäivään.



Residylauseesta seuraa, että

$$(*) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \mathrm{Res}(f, a_1) + \mathrm{Res}(f, a_2) = -\frac{i}{2\sqrt{2}}.$$

Koska

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-R}^{R}\frac{x^2}{1+x^4}dx + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{R^3e^{3it}}{1+R^4e^{4it}}dt,$$

niin

$$\int\limits_{-R}^{R}\frac{x^2}{1+x^4}dx \overset{(*)}{=} \frac{\pi}{\sqrt{2}} - iR^3\int\limits_{0}^{\pi}\frac{e^{3it}}{1+R^4e^{4it}}dt.$$

Kun $t\in[0,\pi]$, niin $|1-1+R^4e^{4it}| = R^4$, joten kolmioepäyhtälöstä seuraa, että

$$\left|1+R^4e^{4it}\right| \geq R^4-1,$$

kun $R>1$, joten

$$\left|R^3\int\limits_{0}^{\pi}\frac{e^{3it}}{1+R^4e^{4it}}dt\right| \leq \frac{R^3}{R^4-1}\int\limits_{0}^{\pi}\underbrace{|e^{3it}|}_{=1}\,dt = \frac{\pi R^3}{R^4-1} \to 0,$$

kun $R\to\infty$. Niinpä

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx &= \lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{x^2}{x^4+1}dx \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \underbrace{\lim_{R\to\infty} iR^3\int\limits_{0}^{\pi}\frac{e^{3it}}{1+R^4e^{4it}}dt}_{=0} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

3.14. Huomautus. Määrättäessä integraaleja kuten edellä raja-arvoin $R\to\infty$, on todettava, että integrandit suppenevat itseisesti! Vertaa huomautukseen tuplasarjojen kohdalla.

4. Analyyttisen funktion kuvausominaisuuksia

4.1. Argumentin periaate ja Hurwitzin lause

4.1. Lause. *(Argumentin periaate). Olkoon f alueessa D analyyttinen funktio, jonka nollakohdat ovat $a_1, a_2, \ldots, a_n \in D$. Olkoon $k_j \in \mathbf{N}$ nollakohdan a_j kertaluku ja σ nollahomologinen sykli D:ssä. Jos $a_j \notin |\sigma|$ kaikilla j, niin*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{j=1}^{n} k_j\, n(\sigma, a_j)\,.$$

TODISTUS: Olkoon $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Lauseen 2.24 nojalla on olemassa alueessa D analyyttinen funktio g ja $r > 0$, joille $g(a_j) \neq 0$ ja $f(z) = (z - a_j)^{k_j} g(z)$ kaikilla $z \in B(a_j, r)$. Lisäksi voimme olettaa, että $g(z) \neq 0$ kaikilla $z \in B(a_j, r)$, joten

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k_j (z - a_j)^{k_j - 1} g(z)}{(z - z_0)^{k_j} g(z)} + \frac{(z - a_j)^{k_j} g'(z)}{(z - a_j)^{k_j} g(z)} = \frac{k_j}{z - a_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

kun $z \in B^*(a_j, r)$. Koska funktio g'/g on analyyttinen pisteen a_j ympäristössä, niin $\mathrm{Res}(f'/f, a_j) = k_j$.

Residylauseen nojalla

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{j=1}^{n} n(\sigma, a_j) \mathrm{Res}(f'/f, a_j) = \sum_{j=1}^{n} k_j\, n(\sigma, a_j)$$

kuten haluttiin. □

Soveltamalla Lausetta 4.1 funktioon $f(z) - w_0$ saadaan:

4.2. Lause. *Olkoon f alueessa D analyyttinen funktio ja olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n \in D$ ne pisteet, joilla $f(z) = w_0$. Olkoon $k_j \in \mathbf{N}$ w_0-kohdan a_j kertaluku (so. funktion $f - w_0$ nollakohdan kertaluku) ja σ nollahomologinen sykli D:ssä. Jos $a_j \notin |\sigma|$ kaikilla $j = 1, 2, \ldots, n$, niin*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{f'(z)}{f(z) - w_0}\, dz = \sum_{j=1}^{n} k_j\, n(\sigma, a_j)\,.$$

Esimerkki. Jos $\gamma(t) = 2e^{i2\pi t}$, $t \in [0,1]$, niin

$$\int\limits_{\gamma} \frac{2z+1}{z^2+z+1}\, dz = 4\pi i\,,$$

koska nimittäjän molemmat nollakohdat $\frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$ ovat yksikkökiekon kehällä

4.3. Esimerkki. Olkoon γ nollahomologinen suljettu tie alueessa D ja $f : D \to \mathbf{C}$ analyyttinen. Olkoon $w_0 \in \mathbf{C} \setminus f(|\gamma|)$ ja $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ne D:n pisteet $z \in D$, joille $f(z) = w_0$. Jos $k_j \in \mathbf{N}$ on w_0-kohdan a_j kertaluku ja $\sigma = f \circ \gamma$, niin σ on suljettu tie ja

$$n(\sigma, w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma} \frac{1}{w - w_0}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0}\, dz = \sum_{j=1}^{n} k_j\, n(\gamma, a_j)\,,$$

missä keskimmäisen yhtäsuuruuden näkee helposti muuttujanvaihdolla (HT).

4.4. Lause. *(Hurwitzin lause). Jos alueessa D analyyttiset funktiot f_j, $j \in \mathbf{N}$, suppenevat D:ssä lokaalisti tasaisesti kohti funktiota $f : D \to \mathbf{C}$ ja $f_j(z) \neq 0$ kaikilla $j \in \mathbf{N}$ ja $z \in D$, niin joko $f \equiv 0$ tai $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$.*

Todistus: Oletetaan, että f ei ole identtisesti nolla alueessa D, mutta on olemassa funktion f kertalukua k_0 oleva nollakohta $z_0 \in D$. Lauseen 2.22 nojalla on olemassa $r > 0$ siten, että $B(z_0, 2r) \subset D$ ja f ei saa arvoa nolla joukossa $B(z_0, 2r) \setminus \{z_0\}$. Argumentin periaatteen nojalla (sovellettuna kiekossa $B(z_0, 2r)$) saamme

$$\int\limits_{\{|z-z_0|=r\}} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i k_0 \neq 0\,.$$

Toistaalta koska f_j ei häviä alueessa D, niin

$$\int\limits_{\{|z-z_0|=r\}} \frac{f_j'(z)}{f_j(z)}\, dz = 0$$

kaikilla j. Koska jonot f_j ja f_j' suppenevat D:ssä lokaalisti tasaisesti kohti vastaavia rajafunktioita f ja f', ja funktio f ei häviä kompaktissa joukossa $\{|z - z_0| = r\}$, niin f_j'/f_j suppenee tasaisesti joukossa $\{|z - z_0| = r\}$ kohti rajafunktiota f'/f (HT). Siten

$$0 = \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\{|z-z_0|=r\}} \frac{f_j'(z)}{f_j(z)}\, dz = \int\limits_{\{|z-z_0|=r\}} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i k_0 \neq 0\,,$$

mikä on ristiriita. $\square$

Hurwitzin lauseesta voimme johtaa seuraavan tuloksen, joka kuvailee analyyttisten injektioiden tasaista rajaa.

4.5. Lause. *Oletetaan, että injektiot f_j, $j \in \mathbf{N}$ ovat analyyttisiä alueessa D. Jos funktiot f_j suppenevat kohti funktiota f lokaalisti tasaisesti joukossa D, niin joko f on vakio tai se on injektiivinen D:ssä.*

Todistus HT.

4.2. Analyyttisen funktion avoimuus

Lauseesta 2.22 seuraa, että ei-vakio analyyttinen funktio alueessa D on diskreetti, ts. pisteen alkukuva on aina D:ssä diskreetti eli kasautumispisteetön joukko. Tässä kappaleessa analysoidaan lisää analyyttisen funktion lokaalia käyttäytymistä ja osoitetaan mm. että ei-vakio analyyttinen funktio on avoin kuvaus, ts. se kuvaa avoimet joukot avoimiksi joukoiksi.

Seuraavan lauseen mukaan analyyttinen funktio käyttäytyy nollakohtansa ympäristössä kuten z^n origon ympäristössä, missä n on nollakohdan kertaluku.

4.6. Lause. *Olkoon $f : B(z_0, R) \to \mathbf{C}$ analyyttinen ja $w_0 = f(z_0)$. Jos z_0 on funktion $f(z) - w_0$ n-kertainen nollakohta, niin on olemassa $\varepsilon > 0$ ja $0 < \delta < R$ siten, että kun $0 < |w - w_0| < \varepsilon$, niin yhtälöllä*

$$f(z) = w$$

on tasan n yksinkertaista ratkaisua z kiekossa $B(z_0, \delta)$.

Todistus: Koska z_0:n kertaluku on äärellinen, ei f ole vakio. Koska analyyttisen funktion nollakohdat ovat eristettyjä (Lause 2.24), on $0 < \delta < \frac{1}{2}R$, jolle yhtälöllä

$$f(z) = w_0$$

ei ole lainkaan ratkaisuja punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0, 2\delta)$ ja lisäksi

$$f'(z) \neq 0 \quad \text{kaikilla } z \in B^*(z_0, 2\delta)\,.$$

Olkoon

$$\gamma(t) = z_0 + \delta e^{2\pi i t}\,, \quad t \in [0, 1]$$

ja $\sigma = f \circ \gamma$. Koska $w_0 \notin |\sigma|$ on $\varepsilon > 0$, jolle

$$B(w_0, \varepsilon) \cap |\sigma| = \emptyset.$$

Siten $B(w_0, \varepsilon)$ kuuluu johonkin $\mathbf{C} \setminus |\sigma|$:n komponenttiin, joten Lemman KA1.5.4 nojalla kaikilla $w \in B(w_0, \varepsilon)$

$$n(\sigma, w_0) = n(\sigma, w)\,.$$

Olkoon $w \in B^*(w_0, \varepsilon)$ ja olkoot a_j on funktion $f(z) - w$ k_j-kertaiset nollakohdat. Esimerkin 4.3 nojalla

$$n = n\, n(\gamma, z_0) = n(\sigma, w_0) = n(\sigma, w) = \sum_{j=1}^{p} k_j n(\gamma, a_j)\,.$$

Koska $n(\gamma, a_j)$ on joko $= 0$ tai $= 1$ ja koska $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in B^*(z_0, \delta)$, on yllä olevassa summassa tasan n kappaletta yksinkertaisia yhtälön $f(z) = w$ ratkaisuja $a_j \in B^*(z_0, \delta)$. □

4.7. Huomautus. Lausetta 4.6 kutsutaan englanniksi nimellä "Branched Covering Principle", mikä viittaa siihen, että analyyttinen funktio peittää kuvan lokaalisti n kertaa.

Todistusta analysoimalla näemme, että luvuksi $\delta > 0$ kelpaa mikä tahansa sellainen, jolle

$$f(z) \neq w_0 \quad \text{ja} \quad f'(z) \neq 0 \quad \text{kun } 0 < |z - z_0| \leq \delta\,.$$

Sen jälkeen luvulta $\varepsilon > 0$ riittää vaatia, että

$$\varepsilon \leq |w_0 - f(z)| \quad \text{aina, kun } |z - z_0| = \delta\,.$$

Ei-vakio analyyttinen funktio f on *avoin kuvaus* ts. avoimen joukon G kuvajoukko $f(G)$ on aina avoin:

4.8. Lause. *Olkoon f ei-vakio analyyttinen funktio alueessa D. Tällöin f on avoin kuvaus.*

Todistus: Olkoon $G \subset D$ avoin ja $w_0 \in f(G)$. Valitaan $z_0 \in G$, jolle $f(z_0) = w_0$. Koska f ei ole vakio, voidaan Lausetta 4.6 soveltaa ja löydetään $\delta > 0$ ja $\varepsilon > 0$, joille $B(z_0, \delta) \subset G$ ja jokaisella $w \in B(w_0, \varepsilon)$ on (ainakin yksi) alkukuva $z \in B(z_0, \delta)$. Siis

$$B(w_0, \varepsilon) \subset f\big(B(z_0, \delta)\big) \subset f(G)\,,$$

joten $f(G)$ on avoin. □

4.9. Seuraus. *Olkoon $f : G \to \mathbf{C}$ analyyttinen ja $z_0 \in G$. Jos $f'(z_0) \neq 0$, niin on olemassa $r > 0$ siten, että*

$$f|_{B(z_0,r)} : B(z_0, r) \to f\big(B(z_0, r)\big)$$

on homeomorfismi.

TODISTUS: Merkitään $w_0 = f(z_0)$. Koska $f'(z_0) \neq 0$, niin Lausetta 4.6 voidaan soveltaa pisteen z_0 jossain ympäristössä $B(z_0, R) \subset G$ arvolla $n = 1$. Siten löydetään $\varepsilon > 0$ ja $\delta > 0$, joille $B = B(z_0, \delta) \subset G$ ja jokaisella $w \in B(w_0, \varepsilon)$ on täsmälleen yksi alkukuva $z \in B$ (voidaan olettaa, että myös pisteellä w_0 on täsmälleen yksi alkukuva z_0 kiekossa B; ylim. HT). Funktion f jatkuvuuden nojalla on olemassa $0 < r < \delta$ s.e. $f(B(z_0, r)) \subset B(w_0, \varepsilon)$. Osoitetaan, että $f|_{B(z_0,r)} : B(z_0, r) \to f\big(B(z_0, r)\big)$ on bijektio; huomaa, että tämä rajoittuma on määritelmänsä nojalla surjektio.

Injektiivisyyttä varten olkoon $z \in B(z_0, r)$. Oletetaan, että $\zeta \in B(z_0, r)$ siten, että $f(\zeta) = f(z) =: w \in B(w_0, \varepsilon)$. Aiemman päättelyn nojalla $z = \zeta$, sillä muuten pisteellä w olisi (ainakin) kaksi alkukuvaa joukossa $B(z_0, r) \subset B(z_0, \delta)$. Siispä $f|_{B(z_0,r)} : B(z_0, r) \to f\big(B(z_0, r)\big)$ on bijektio; käänteiskuvauksen jatkuvuus seuraa kuvauksen avoimuudesta (Lause 4.8). □

4.10. Seuraus. *Olkoon $f : G \to \mathbf{C}$ analyyttinen injektio. Tällöin*

$$f'(z) \neq 0 \qquad \textit{kaikilla } z \in G\,.$$

TODISTUS: Olkoon $z_0 \in G$ ja $f(z_0) = w_0$. Piste z_0 on tämän yhtälön yksinkertainen juuri, koska muutoin löytäisimme pisteen $w \in f(G)$ (w_0:n läheltä), jolla olisi useampi alkukuvapiste G:ssä (Lause 4.6), mikä olisi vastoin tietoa, että f on injektio. Siten kertaluvun määäritelmän mukaan $f'(z_0) \neq 0$. □

4.3. Johdantoa konformikuvauksiin

Monia fysikaalisia ilmiöitä, kuten nesteiden virtaus, lämmönjohtuminen yms. mallitetaan matememaattisesti Laplacen yhtälön

$$u_{xx} + u_{yy} = 0\,, \quad z = (x, y) \in \mathbf{C}\,,$$

avulla. Tätä yhtälöä on huomattavasti helpompi käsitellä, mikäli tarkasteltava alue on joko puolitaso H tai kiekko B kuin yleinen alue G. Cauchy-Riemannin yhtälöiden avulla nähdään, että 'konforminen muuttujanvaihto' säilyttää Laplace-operaattorin, ts. jos $f : D \to G$ on konformikuvaus, kts. Määritelmä 4.11, ja u toteuttaa Laplace-yhtälön G:ssä, niin $u \circ f$ toteuttaa Laplace-yhtälön D:ssä. Mm. tästä syystä on tärkeää löytää eri alueiden välille konformikuvauksia:

4.11. Määritelmä. Funktio $f : G \to \mathbf{C}$ on *konformikuvaus (univalent, schlicht)* alueessa G, jos se on analyyttinen injektio alueessa G.

4.12. Huomautus. Monesti käytetään sanontaa: f on konforminen (pisteessä z_0), jolloin tarkoitetaan vain, että f on lokaalisti injektio (ts. sen derivaatta ei häviä). Konformikuvaus kielenkäytössämme on siis globaali injektio. Lauseesta 4.9 seuraa, että jos $f'(z_0) \neq 0$, on z_0:lla ympäristö U, jossa $f|_U : U \to f(U)$ on konformikuvaus.

Klassisessa mielessä konformisuus tarkoittaa sitä, että kulmien suuruudet säilyvät infinitesimaalisessa skaalassa: Jos γ ja σ ovat säännöllisiä polkuja, jotka kulkevat pisteen z_0 kautta ja jos $f'(z_0) \neq 0$, niin käyrien γ ja σ (tangenttien) välinen kulma = kuvakäyrien $f \circ \gamma$ ja $f \circ \sigma$ (tangenttien) välinen kulma. Tämä on helppo uskoa huomautuksen KA1.2.3 valossa: molemmat käyrät γ ja σ kiertyvät kuvauksessa f pisteessä kulman $\arg(f'(z_0))$ verran ja siten niiden välinen kulma säilyy.

Esimerkki. Kuvaus $f(z) = z^2$ on konforminen origon ulkopuolella, mutta ei ole lokaali injektio origossa.

Sen sijaan eksponenttifunktion derivaatta ei häviä missään, joten se määrittelee lokaalisti konformikuvauksen.

Edellä olevista lauseista saamme:

4.13. Lause. *Olkoon $f : G \to \mathbf{C}$ konformikuvaus. Tällöin*

(i) f määrittelee homeomorfismin $f : G \to f(G)$.

(ii) $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in G$.

(iii) Funktion f käänteiskuvaus $f^{-1} : f(G) \to G$ on myös konformikuvaus ja

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}\,.$$

Esimerkki. Seuraavien alueiden $G = \{z \in \mathbf{C} : |z| > 1\}$ ja $D = B^*(0,1)$ välisen konformikuvauksen antaa $f(z) = \frac{1}{z}$.

Seuraava Riemannin kuvauslause kertoo, että jokainen yhdesti yhtenäinen alue (joka ei ole koko kompleksitaso) on konformisesti kiekko.

4.14. Lause (Riemannin kuvauslause)**.** *Olkoon $D \neq \mathbf{C}$ yhdesti yhtenäinen alue. Tällöin on olemassa analyyttinen bijektio $f : D \to B(0,1)$.*

Riemannin kuvauslauseen 4.14 todistus annetaan seuraavissa kahdessa aliluvussa. Sen avulla voidaan helposti todistaa Lause 4.16, joka itse asiassa karakterisoi kiekon kanssa konformisesti ekvivalentit kompleksitason alueet; tarvitsemme vain seuraavan aputuloksen.

4.15. Lemma. *Olkoon D yhdesti yhtenäinen alue ja $f : D \to \mathbf{C}$ konformikuvaus. Tällöin $f(D)$ on yhdesti yhtenäinen alue.*

Todistus. Koska f ei ole vakio, niin $f(D)$ on alue. Olkoon $w_0 \in \mathbf{C} \setminus f(D)$ ja olkoon σ suljettu tie alueessa $f(D)$. Riittää osoittaa, että $n(\sigma, w_0) = 0$.

Nyt $\gamma = f^{-1} \circ \sigma$ on suljettu tie alueessa D, missä f^{-1} on kuvauksen $f : D \to f(D)$ käänteiskuvaus, joka on myös konformikuvaus. Lisäksi $\sigma = f \circ \gamma$. Siten

$$n(\sigma, w_0) = n(f \circ \gamma, w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{f \circ \gamma} \frac{dw}{w - w_0} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0}\, dz\,.$$

Koska γ on suljettu tie yhdesti yhtenäisessä alueessa D ja $z \mapsto f'(z)/(f(z) - w_0)$ on analyyttinen joukossa D, niin viimeinen integraali on nolla Cauchyn lauseen homologisen version nojalla. □

4.16. Lause. *Olkoon G avoin joukko. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(A) $G \neq \mathbf{C}$ ja G on yhdesti yhtenäinen;

(B) on olemassa analyyttinen bijektio $f : G \to B(0,1)$.

Todistus. Implikaatio (A) $\Rightarrow$ (B) seuraa Riemannin kuvauslauseesta. Olkoon sitten G avoin ja olkoon $f : G \to B(0,1)$ analyyttinen bijektio; Liouvillen lauseen nojalla $G \neq \mathbf{C}$. Edelleen, koska käänteiskuvaus $f^{-1} : B(0,1) \to G$ on analyyttinen bijektio niin Lemma 4.15 osoittaa, että $G = f^{-1}[B(0,1)]$ on yhdesti yhtenäinen alue. □

Riemannin kuvauslauseelle on monia todistuksia ja alla esitettävä todistus on alunperin Fejerin ja Rieszin (1922). Se pohjautuu Dirichletin ja Riemannin ideoihin, ratkaisten sopivasti asetetun ekstremaaliongelman. Tätä varten käsittelemme aluksi hieman normaaliperheiden teoriaa.

4.4. Normaaliperheet ja Montelin lause

Muistetaan seuraava määritelmä:

- jono $f_j : D \to \mathbf{C}$, missä $D \subset \mathbf{C}$ on alue, suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa $D \Leftrightarrow$ funktiot f_j suppenevat tasaisesti jokaisessa kompaktissa joukossa $K \subset D$.

Tässä luvussa annamme erittäin hyödyllisen kriteerion (Arzela–Ascolin lause), joka takaa lokaalisti tasaisesti suppenevan osajonon olemassaolon.

4.17. Määritelmä. Olkoon D alue ja $\mathcal{F} \subset C(D, \mathbf{C}) = \{f : D \to \mathbf{C} \text{ jatkuva}\}$ perhe jatkuvia kompleksiarvoisia funktioita. Sanomme, että perhe $\mathcal{F}$ on *normaali joukossa* D, jos jokainen jono perheen $\mathcal{F}$ funktioita sisältää osajonon joka suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa D.

Huomaa, että (osajonon) rajafunktion ei suinkaan tarvitse kuulua perheeseen $\mathcal{F}$. Rajafunktio on tosin aina jatkuva D:ssä. Ohitamme seuraavan lauseen todistuksen, joka tyypillisesti esitetään topologian tai funktionaalianalyysin peruskursseilla.

4.18. Lause (Arzela–Ascoli). *Olkoon $D \subset \mathbf{C}$ alue. Tällöin perhe $\mathcal{F}$ on normaali joukossa D, jos ja vain jos ehdot (1) ja (2) ovat voimassa:*

(1) $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva *joka pisteessä, so. jokaisella $w \in D$ ja $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että*

$$|f(z) - f(w)| < \varepsilon \qquad \text{aina kun } z \in B(w, \delta) \text{ ja } f \in \mathcal{F}$$

(2) jokaisella $w \in D$ joukko $A(w) = \overline{\{f(w) : f \in \mathcal{F}\}}$ on kompakti.

4.19. Huomautus. Olkoon $\mathcal{F} \subset C(D, \mathbf{C})$ normaaliperhe analyyttisiä funktioita alueessa D. Perheen $\mathcal{F}$ jokainen jono sisältää osajonon, joka suppenee tasaisesti D:n kompakteissa osajoukoissa. Erityisesti kyseisen osajonon rajafunktio on analyyttinen Lauseen 2.9 nojalla.

Sovellamme Arzela–Ascolin lausetta vastataksemme seuraavaan kysymykseen: milloin perhe $\mathcal{F}$ analyyttisiä funktioita avoimessa joukossa $D \subset \mathbf{C}$ on normaali?

4.20. Lause (Montelin lause). *Oletetaan, että D on alue. Perhe $\mathcal{F}$ analyyttisiä funktioita joukossa D on normaali, jos ja vain jos $\mathcal{F}$ on* lokaalisti rajoitettu *eli jokaiselle kompaktille joukolle $K \subset D$ on olemassa $M = M(K) < \infty$ siten, että*

$$|f(z)| \leq M \qquad \text{aina kun } z \in K \text{ ja } f \in \mathcal{F}\,.$$

TODISTUS: Olkoon $\mathcal{F}$ lokaalisti rajoitettu perhe analyyttisiä funktioita alueessa D. Osoitetaan aluksi, että $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva. Olkoon tätä varten $w \in D$ ja $\varepsilon > 0$. Luvun $\delta > 0$ konstruoimiseksi valitaan $r > 0$ siten, että $K = \overline{B(w,r)} \subset D$. Tarkastellaan funktiota $f \in \mathcal{F}$, jolle oletuksen nojalla pätee

$$\sup_{|z-w|\le r} |f(z)| \le M = M(K) < \infty\,.$$

Cauchyn integraalikaavan (Lause 1.10) nojalla

$$\begin{aligned}\sup_{|z-w|\le r/2} |f'(z)| &= \sup_{|z-w|\le r/2} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(w,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \right| \\ &\le \frac{M 2\pi r}{2\pi (r/2)^2} = \frac{4M}{r} =: M'\,.\end{aligned}$$

Valitaan $\delta = \min\{\varepsilon/(2M'), r/2\} > 0$, jolloin

$$\begin{aligned}\sup_{|z-w|\le\delta} |f(z) - f(w)| &= \sup_{|z-w|\le\delta} \left| \int_{[w,z]} f'(\zeta)\, d\zeta \right| \\ &\le \sup_{|z-w|\le\delta} |z-w| M' \le \delta M' < \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Koska luku δ ei riipu funktiosta f, niin perhe $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva.

Edelleen, koska $\{w\} \subset D$ on kompakti, niin oletuksen nojalla $|f(w)| \le M(\{w\})$ aina kun $w \in D$ ja $f \in \mathcal{F}$. Erityisesti

$$A(w) = \overline{\{f(w) \,:\, f \in \mathcal{F}\}}$$

on kompakti jokaisella $w \in D$, sillä kyseinen joukko on aina rajoitettu.

Perheen $\mathcal{F}$ normaalius seuraa nyt Arzela–Ascolin Lauseesta 4.18. Montelin ehdon välttämättömyys jätetään harjoitustehtäväksi. $\square$

4.5. Riemannin kuvauslauseen todistus

Todistamme Riemannin kuvauslauseen 4.14: jos $D \ne \mathbf{C}$ on yhdesti yhtenäinen alue, niin on olemassa analyyttinen bijektio $f : D \to B(0,1)$. Ryhdytään todistukseen. Kiinnitetään $z_0 \in D$ ja merkitään

$$\mathcal{F} = \{f : D \to \mathbf{C} \text{ konformikuvaus} \,:\, f(D) \subset B(0,1) \text{ ja } f(z_0) = 0\}\,.$$

Todistus etenee kolmessa vaiheessa, jotka karkeasti kuvaten ovat seuraavat:

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$;

2. On olemassa $f \in \mathcal{F}$ siten, että $|f'(z_0)| \geq |g'(z_0)|$ kaikilla $g \in \mathcal{F}$;

3. Jos $f \in \mathcal{F}$ on kuten kohdassa 2., niin funktiolla f on halutut ominaisuudet.

Askel 1. Ensimmäisen kohdan $\mathcal{F} \neq \emptyset$ todistus pohjautuu oletukseen $D \neq \mathbf{C}$ ja yhdesti yhtenäisyyteen; yksityiskohdat HT.

Askel 2. Merkitään $s = \sup\{|g'(z_0)| \,:\, g \in \mathcal{F}\}$. Valitaan jono f_j, $j \in \mathbf{N}$, funktioita perheestä $\mathcal{F}$ siten, että

$$\lim_{j\to\infty} |f_j'(z_0)| = s\,.$$

Koska $\mathcal{F} \neq \emptyset$, ja kyseisen perheen jäsenet ovat konformikuvauksina analyyttisiä injektioita joukossa D, niin Seurauksen 4.10 nojalla $s > 0$.

Määritelmän nojalla perhe $\mathcal{F}$ on lokaalisti rajoitettu (koska jokaiselle kompaktille joukolle $K \subset D$ on $|g(z)| \leq 1$ kaikilla $z \in K$ ja $g \in \mathcal{F}$). Montelin lauseen 4.20 nojalla perhe $\mathcal{F}$ on normaali joukossa D. Erityisesti on olemassa jonon (f_j) osajono $(f_{j_k})_{k\in\mathbf{N}}$ ja funktio $f : D \to \mathbf{C}$ siten, että

$$f_{j_k} \xrightarrow{k\to\infty} f \text{ lokaalisti tasaisesti alueessa } D\,.$$

Lauseen 2.9 nojalla rajafunktio f on analyyttinen alueessa D. Saman lauseen nojalla $f_{j_k}' \to f'$ lokaalisti tasaisesti, kun $k \to \infty$. Erityisesti

$$0 < s = \lim_{k\to\infty} |f_{j_k}'(z_0)| = |f'(z)|\,,$$

joten f ei ole vakio alueessa D. Koska funktiot f_{j_k} ovat analyyttisiä injektioita D:ssä, niin Lauseen 4.5 nojalla f on injektio $D \to \mathbf{C}$. Huomataan seuraavaksi, että $f(D) \subset \overline{B(0,1)}$ ja f on avoin kuvaus Lauseen 4.8 nojalla. Siten $f(D) \subset B(0,1)$. Koska $f_{j_k}(z_0) = 0$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$, niin myös $f(z_0) = 0$.

Yllä olevasta päättelystä seuraa, että $f \in \mathcal{F}$ ja f toteuttaa ehdon $|f'(z_0)| \geq |g'(z_0)|$ kaikilla funktioilla $g \in \mathcal{F}$.

Askel 3. Väitämme, että f on analyyttinen bijektio $D \to B(0,1)$. Askelen 2. jälkeen riittää osoittaa, että

$$f : D \to B(0,1) \text{ on surjektio.}$$

Tämä todistetaan vastaoletuksen kautta: On olemassa $w_0 \neq 0$ siten, että

$$w_0 \in B(0,1) \setminus f(D)\,.$$

Ryhdymme seuraavana tehtävänä osoittamaan, että tämä johtaa ristiriitaan ehdon $|f'(z_0)| \geq |g'(z_0)|$ kaikilla $g \in \mathcal{F}$ kanssa.

Tarvitsemme apukuvauksia (yksityiskohdat HT): Jos $a \in B(0,1)$ niin merkitään

$$\phi_{-a}(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \qquad \text{kun } z \in B(0,1)\,.$$

Kuvaus ϕ_{-a} on analyyttinen bijektio $B(0,1) \to B(0,1)$ ja

$$\phi'_{-a}(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2} \qquad \text{aina kun } z \in B(0,1)\,. \tag{4.1}$$

Yhdistetty kuvaus $\tau = \phi_{-w_0} \circ f$ on hyvin määritelty konformikuvaus $D \to B(0,1)$. Lemman 4.15 nojalla $\tau[D] \subset B(0,1)$ on yhdesti yhtenäinen ja $0 \notin \tau[D]$. Lauseen 1.15 nojalla alueessa $\tau[D]$ on logaritmin haara $\log : \tau[D] \to \mathbf{C}$, joka on analyyttinen injektio s.e. $e^{\log(z)} = z$ kaikilla $z \in \tau[D]$. Määritellään

$$g(z) = e^{\frac{1}{2}\log(\tau(z))}\,, \qquad \text{kun } z \in D\,.$$

Osoitetaan, että g on konformikuvaus $D \to B(0,1)$; kaikilla $z \in D$ nimittäin on

$$|g(z)|^2 = |g(z)^2| = |e^{\log(\tau(z))}| = |\tau(z)| < 1\,.$$

Lisäksi jos $z, z' \in D$ ovat eri pisteitä, niin

$$g(z)^2 = e^{\log(\tau(z))} = \tau(z) \neq \tau(z') = e^{\log(\tau(z'))} = g(z')^2\,.$$

Tämä osoittaa kuvauksen g injektiivisyyden. Seuraavaksi funktio g 'normalisoidaan' määrittelemällä

$$\rho = \phi_{-g(z_0)} \circ g\,,$$

jolloin ρ on konformikuvaus $D \to B(0,1)$ ja $\rho(z_0) = 0$. Erityisesti $\rho \in \mathcal{F}$. Ristiriidan osoittamiseksi riittää siis todistaa, että

$$|\rho'(z_0)| > |f'(z_0)|\,. \tag{4.2}$$

Osoitetaan vielä epäyhtälö (4.2); soveltamalla derivoimiskaavaa (4.1) ja annettuja määritelmiä saamme yhtäsuuruudet:

$$
\begin{aligned}
|\rho'(z_0)|^2 &= |\phi'_{-g(z_0)}(g(z_0))|^2 |g'(z_0)|^2 \\
&= \frac{1}{(1-|g(z_0)|^2)^2} \cdot \left| \frac{e^{\frac{1}{2}\log(\tau(z_0))}\tau'(z_0)}{2\tau(z_0)} \right|^2 \\
&= \frac{1}{(1-|g(z_0)|^2)^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{|\tau(z_0)|} \cdot |\tau'(z_0)|^2 \\
&= \frac{1}{(1-|w_0|)^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{|w_0|} \cdot (1-|w_0|^2)^2 \cdot |f'(z_0)|^2 \\
&= \left(\frac{1+|w_0|}{2\sqrt{|w_0|}} \right)^2 |f'(z_0)|^2 \,.
\end{aligned}
$$

Lopuksi, koska

$$
\frac{1+x^2}{2x} = 1 + \frac{(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2}{2} > 1 \qquad \text{aina kun } x \in (0,1)\,,
$$

niin arvio (4.2) seuraa yllä olevista laskuista.

Tämä päättää Riemannin kuvauslauseen todistuksen. $\square$

5. Laajennettu kompleksitaso ja Möbius-kuvaukset

5.1. Laajennettu kompleksitaso

Usein on kätevää lisätä kompleksitasoon $\mathbf{C}$ äärettömyyspiste $\infty \notin \mathbf{C}$. Näin saatua joukkoa

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

sanotaan *laajennetuksi kompleksitasoksi*. Algebralliset laskutoimitukset $\hat{\mathbf{C}}$:ssa määritellään laajennetun reaalilukujoukon tapaan:

$$\begin{cases} \infty \pm z = z \pm \infty = \infty\,, & \text{kun } z \in \mathbf{C} \\ \infty \cdot z = z \cdot \infty = \infty\,, & \text{kun } z \in \hat{\mathbf{C}} \setminus \{0\} \\ \frac{z}{\infty} = 0\,, & \text{kun } z \in \mathbf{C} \\ \frac{z}{0} = \infty\,, & \text{kun } z \in \hat{\mathbf{C}} \setminus \{0\}\,. \end{cases}$$

Huomaa, ettei operaatioita

$$\infty - \infty\,, \quad \frac{\infty}{\infty}\,, \quad \frac{0}{0} \quad \text{eikä} \quad 0 \cdot \infty$$

ole lainkaan määritelty (eikä niitä siis saa käyttää).

Perinteisesti laajennettua kompleksitasoa ajatellaan geometrisesti kolmiulotteisena pallona, *Riemannin pallona* seuraavasti: Olkoon

$$S = \{(u, v, w) \in \mathbf{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 = 1\}$$

$\mathbf{R}^3$:n yksikköpallopinta ja samastetaan kompleksitaso $\mathbf{C}$ tason $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbf{R}\}$ kanssa. Tarkastellaan pallon S 'pohjoisnavan' $N = (0, 0, 1)$ kautta kulkevia suoria L. Jos L ei ole S:n tangenttitasossa, niin se leikkaa pallonkuoren S täsmälleen yhdessä pisteessä $P = (u, v, w) \neq N$ ja tason $\mathbf{C} = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbf{R}\}$ täsmälleen yhdessä pisteessä

$$\pi(P) = \pi(u, v, w) = \left(\frac{u}{1-w}, \frac{v}{1-w}, 0\right).$$

Näin saadaan bijektio $\pi : S \setminus \{N\} \to \mathbf{C}$, ns. *stereograafinen projektio*. Tämä antaa vastaavuuden laajennetun kompleksitason $\hat{\mathbf{C}}$ ja pallon S välille, kun asetetaan $\pi(N) = \infty$. Käänteiskuvaus π^{-1} on helppo määrittää:

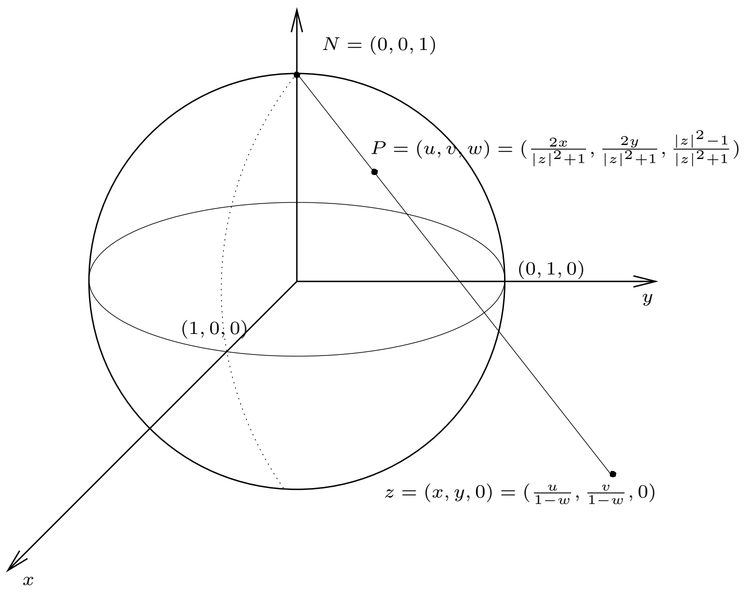
$$\pi^{-1}(z, 0) = \left(\frac{2Re(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2Im(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right).$$

Harjoitustehtävänä on melko helppoa todeta, että streograafisessa projektiossa pohjoisnavan kautta kulkevat ympyränkaaret vastaavat kompleksitason suoria ja kompleksitason ympyrät vastaavat pallonkuoren ympyröitä. Tästä syystä **C**:n ympyröitä ja suoria (lisättynä äärettömyyspisteellä ∞) sanotaan laajennetun kompleksitason $\hat{\mathbf{C}}$ *yleistetyiksi ympyröiksi*.

Puolitasot ja kiekot **C**:ssä vastaavat ympyrän kalotteja Riemannin pallolla. Lisäksi stereografinen projektio on 'konforminen' ts. se säilyttää kulmien suuruudet.

Huomaa, että äärettömyyspiste ∞ on Riemannin pallolla $S = \hat{\mathbf{C}}$ aivan samassa asemassa kuin muutkin pisteet, joten pyöräyttämällä äärettömyyspisteen toiseen paikkaan saa oivan kuvan laajennetun kompleksitason lokaaleista ominaisuuksista. Topologiasta meille riittänee tietää, että ∞ keskinen kiekko määritellään

$$B(\infty, r) = \infty \cup \{z \in \mathbf{C} : |z| > \frac{1}{r}\}.$$



Riemannin pallo ja stereograafinen projektio.

5.2. Möbius-kuvauksista

5.1. Määritelmä. Kuvausta $f : \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \text{missä } a,b,c,d \in \mathbf{C}, \quad ad - bc \neq 0,$$

sanotaan *Möbius-kuvaukseksi.* [3] Tässä käytetään sopimuksia:

$$\text{Jos } c = 0\,, \qquad \text{niin } \begin{cases} f(z) = \dfrac{az+b}{d}\,, & \text{kun } z \in \mathbf{C} \\ f(\infty) = \infty. \end{cases}$$

$$\text{Jos } c \neq 0\,, \qquad \text{niin } \begin{cases} f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}\,, & \text{kun } z \in \mathbf{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}, \\ f(-\frac{d}{c}) = \infty \\ f(\infty) = \frac{a}{c}\,. \end{cases}$$

Helposti nähdään:

5.2. Lause. *Möbius-kuvaus* $f : \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$ *on homeomorfismi ja konformikuvaus* $\mathbf{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$*:ssä (siis koko* $\mathbf{C}$*:ssä, jos* $c = 0$*).*

□

5.3. Lause. *Möbius-kuvaukset*

$$\mathcal{G} = \{f : \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}} : f \text{ on Möbius-kuvaus}\}$$

muodostavat ryhmän, jonka laskutoimitus on kuvausten yhdistäminen.

Todistus: Suora lasku (HT). Möbius-kuvauksen

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

käänteiskuvaus on

$$f^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}.$$

□

Huomaa, että Möbius-kuvausten ryhmä ei ole kommutatiivinen, ts on olemassa Möbius-kuvaukset f, g, joille $f \circ g \neq g \circ f$ (HT).

[3] A.F. Möbius, 1790–1868. Usein Möbius-kuvauksista käytetään nimitystä lineaarinen rationaalikuvaus, linear fractional transformation.

5.4. Huomautus. Möbius-kuvaukset

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

ja kompleksiset (2×2)-matriisit

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \det(A) = ad - bc \neq 0\,,$$

vastaavat toisiaan niin, että kaikki matriisit

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}, \quad \det(\lambda A) = \lambda^2 \det(A) = \lambda^2 (ad - bc) \neq 0\,,$$

vastaavat samaa Möbius-kuvausta

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,.$$

$1-1$ vastaavuus saadaan esimerkiksi normittamalla (2×2)-matriisit niin, että vaaditaan, että niiden determinantti on $= 1$. Huomaa, että matriisien kertolasku vastaa Möbius-kuvausten yhdistämistä (HT).

5.5. Huomautus (Yksinkertaiset Möbius-kuvaukset)**.** Möbius-kuvausta

$$f(z) = z + w\,, \quad w \in \mathbf{C}$$

sanotaan *siirroksi* eli *translaatioksi.* Se siirtää kompleksitason $\mathbf{C}$ pisteitä luvun w verran ja pitää äärettömyyspisteen paikallaan $f(\infty) = \infty$.

Toinen merkittävä tyyppi yksinkertaisia Möbius-kuvauksia on kuvaukset

$$g(z) = \lambda z\,, \qquad \text{missä } \lambda \in \mathbf{C}\,, \lambda \neq 0\,.$$

Jos $|\lambda| = 1$, kyseessä on kompleksitason *kierto*: ts. g kiertää kompleksitason pisteitä kulman $\arg(\lambda)$ verran ja pitää äärettömyyspisteen paikallaan $g(\infty) = \infty$.

Jos $\lambda \in \mathbf{R}$ ja $\lambda > 0$, niin kuvaus g on *dilaatio*: *venytys* jos $\lambda \geq 1$ ja *kutistus*, jos $0 < \lambda \leq 1$.

Yleinen tapaus $\lambda \in \mathbf{C}$, $\lambda \neq 0$, saadaan yhdistämällä kierto ja dilaatio, sillä

$$\lambda = |\lambda| \frac{\lambda}{|\lambda|}\,.$$

Äärettömyyspiste pysyy paikallaan, $g(\infty) = \infty$.

Kolmas tyyppi alkeellisia Möbius-kuvauksia on *inversio*:

$$h(z) = \frac{1}{z}\,.$$

Inversio vaihtaa äärettömyyspisteen ja origon: $h(\infty) = 0$ ja $h(0) = \infty$. Inversio saadaan heijastamalla piste z yksikkökiekon kehän $\partial B(0,1)$ suhteen ja sitten reaaliakselin suhteen (konjugaatin otto), tai päinvastoin:

$$h(z) = \frac{1}{z} = \overline{\frac{z}{|z|^2}} = \frac{\bar{z}}{|\bar{z}|^2}\,,$$

mistä nähdään, että

$$|h(z)| = \frac{1}{|z|} \qquad \text{ja} \qquad \arg(h(z)) = \arg(\bar{z}) = -\arg(z)\,.$$

Kaikki Möbius-kuvaukset saadaan yhdistämällä translaatio, dilaatio ja kierto sekä inversio.

5.6. Lause. *Jokainen Möbius-kuvaus saadaan yhdistämällä translaatio $z \mapsto z + w$, kuvaus $z \mapsto \lambda z$ ja inversio $z \mapsto \frac{1}{z}$.*

TODISTUS: Kun $ad - bc \neq 0$, niin

$$\frac{az+b}{cz+d} = \begin{cases} \dfrac{bc-ad}{c^2(z+\frac{d}{c})} + \dfrac{a}{c}\,, & \text{jos } c \neq 0, \\ \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d}\,, & \text{jos } c = 0, \end{cases}$$

mitkä ovat vaadittua tyyppiä. □

5.7. Lause. *Möbius-kuvaukset kuvaavat yleistetyt ympyrät yleistetyiksi ympyröiksi.*

TODISTUS: Kompleksitason suorat ovat muotoa

$$(5.1) \qquad Bz + \bar{B}\bar{z} + c = 0\,, \qquad \text{missä } B \in \mathbf{C}\,, \quad c \in \mathbf{R}\,,$$

minkä näkee sijoittamalla $\mathbf{R}^2$:n suoran $ax + by + c = 0$ yhtälöön $z = x + iy$, jolloin $2B = a - ib$. Edelleen ympyrän

$$|z - z_0| = r$$

yhtälö saadaan muotoon

$$(5.2) \qquad z\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + c = 0\,, \qquad \text{missä } B = -z_0 \in \mathbf{C}\,, \quad c = |B|^2 - r^2 \in \mathbf{R}\,.$$

Selvästi suorat säilyvät suorina ja ympyrät ympyröinä kuvauksissa $z \mapsto z + w$ ja $z \mapsto \lambda z$. Jos z on suoralla (5.1), niin sen kuvapiste $w = 1/z$ inversiossa $z \mapsto 1/z$ toteuttaa yhtälön

$$cw\bar{w} + B\bar{w} + \bar{B}w = 0\,,$$

mikä arvolla $c = 0$ on origon kautta kulkeva suora. Jos $c \neq 0$, kyseessä on kaavan (5.2) nojalla ympyrä, jonka säde on $|B|/|c|$ ja keskipiste $-B/c$.

Edelleen ympyrällä (5.2) olevan pisteen z kuvapiste $w = 1/z$ inversiossa toteuttaa yhtälön

$$cw\bar{w} + Bw + \bar{B}\bar{w} + 1 = 0\,,$$

mikä arvolla $c = 0$ (jolloin ympyränkehä kulkee origon kautta) antaa suoran yhtälön. Muilla c:n arvoilla tämä on ympyrän yhtälö. □

Koska Möbius-kuvaukset ovat homeomorfismeja, saamme tästä:

5.8. Seuraus. *Möbius-kuvaus kuvaa jokaisen avoimen joukon, joka on joko*

- *kiekko* $B(z_0, r)$,
- *kiekon ulkopuoli* $\hat{\mathbf{C}} \setminus \bar{B}(z_0, r)$, *tai*
- *jonkin suoran määräämä puolitaso* $\mathbf{C}$*:ssä,*

joukolle, joka on jotain yllämainittua tyyppiä.

□

Pistettä $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$, jolle $f(z_0) = z_0$ sanotaan kuvauksen f *kiintopisteeksi.*

5.9. Lause. *Möbius-kuvauksella $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ on joko 1 tai 2 kiintopistettä, ellei f ole identtinen kuvaus $f(z) = z$ kaikilla $z \in \hat{\mathbb{C}}$.*

TODISTUS: HT: totea toisen asteen yhtälön

$$\frac{az+b}{cz+d} = z$$

ratkaisujen lukumäärä (muista varoa tapausta $z = \infty$). Toinen tapa on käyttää lausetta 5.10. alla. □

Möbius-kuvauksen määrittelyssä voidaan määrätä kolmen pisteen kuvapisteet, muttei enempää.

5.10. Lause. *Olkoot $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ kolme eri pistettä. Jos $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ ovat kolme eri pistettä, niin on olemassa täsmälleen yksi Möbius-kuvaus $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, jolle*

$$f(z_1) = w_1\,, \quad f(z_2) = w_2 \quad \textit{ja} \quad f(z_3) = w_3\,.$$

TODISTUS: Voidaan olettaa (miksi?), että

$$w_1 = 1\,, \quad w_2 = 0 \quad \text{ja } w_3 = \infty\,.$$

Olemassaolo: Etsitty kuvaus on (HT: totea!)

$$f(z) = \frac{(z-z_2)(z_1-z_3)}{(z-z_3)(z_1-z_2)}$$

Huomaa: jos z_1, z_2 tai z_3 on ∞, niin (vastavasti)

$$f(z) = \frac{z-z_2}{z-z_3}\,, \quad \frac{z_1-z_3}{z-z_3} \quad \text{tai} \quad \frac{z-z_2}{z_1-z_2}.$$

Yksikäsitteisyys: Olkoon g toinen tällainen Möbius-kuvaus. Silloin

$$f \circ g^{-1}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

on Möbius-kuvaus, jolle

$$\begin{cases} f \circ g^{-1}(0) = 0\,, & \text{josta } b = 0 \\ f \circ g^{-1}(\infty) = \infty\,, & \text{josta } c = 0, \\ f \circ g^{-1}(1) = 1\,, & \text{josta } \frac{a}{d} = 1\,. \end{cases}$$

Näin ollen

$$f \circ g^{-1}(z) = z \qquad \text{kaikilla } z \in \hat{\mathbf{C}}\,,$$

joten $f = g$ ja väite on todistettu. □

Kuvauksen f määrittelyn kaavaa sanotaan kaksoisuhteeksi:

5.11. Määritelmä. Olkoot $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbf{C}}$ neljä eri pistettä. Lukua

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}$$

sanotaan pisteiden z_1, z_2, z_3, z_4 *kaksoissuhteeksi.*[4]

Kaksoissuhde on invariantti Möbius-kuvauksissa.

5.12. Lause. *Olkoot* $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbf{C}}$ *neljä eri pistettä ja* $f : \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$ *Möbius-kuvaus. Tällöin*

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)]\,.$$

TODISTUS: Olkoon

$$g(z) = [z_1, z_2, z_3, z]$$

se yksikäsitteinen Möbius-kuvaus (Lause 5.10), joka kuvaa pisteet z_1, z_2 ja z_3 (vastaavasti) pisteiksi 1, 0 ja ∞. Tällöin $g \circ f^{-1}$ kuvaa pisteet $f(z_1)$, $f(z_2)$ ja $f(z_3)$ (vastaavasti) pisteiksi 1, 0 ja ∞, joten

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = g(z_4) = g \circ f^{-1}(f(z_4)) = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)]\,,$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa Lauseen 5.10 yksikäsitteisyyspuolesta. □

[4] Varoitus: älä sekoita merkintää murtoviivaan. Kaksoissuhde voidaan kirjoittaa monessa eri järjestyksessä, joten tarkista aina käyttämästäsi lähteestä, mikä on kulloinenkin määritelmä.

5.13. Huomautus. Lauseen 5.12 avulla löydetään nopeasti se (yksikäsitteinen) Möbius-kuvaus f, joka kuvaa annetut kolme eri pistettä $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbf{C}}$ annetuille kolmelle eri pisteelle $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbf{C}}$: ratkaistaan $f(z)$ kaksoissuhteesta

$$[w_1, w_2, w_3, f(z)] = [z_1, z_2, z_3, z]\,.$$

Esimerkki. Muodostetaan Möbius-kuvaus f, jolle $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$ ja $2 \mapsto i$. Lasketaan

$$[1, 0, i, f(z)] = [1, 0, 2, z] \quad \text{eli} \quad \frac{(1-i)(-f(z))}{(i-f(z))} = \frac{(1-2)(-z)}{2-z}\,,$$

josta

$$f(z) = \frac{iz}{z(2-i) - 2 + 2i}\,.$$

Huomaa, että Lauseiden 5.7 ja 5.8 valossa f kuvaa reaaliakselin ympyrälle, jonka määrää pisteet 0, 1 ja i. Edelleen koska $f(-i) = -1/3$ kuvaa f ylemmän puolitason (bijektiivisesti) em. ympyrän rajaamalle kiekolle

$$B\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

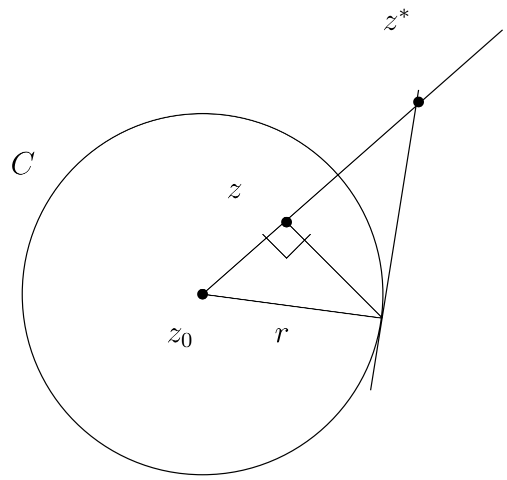
Olkoon

$$C = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| = r\}$$

z_0-keskinen r-säteinen ympyrä. Jos $z \in \hat{\mathbf{C}}$, niin sen *heijastuspiste kehän C suhteen* on

$$z^* = \begin{cases} z_0 + \dfrac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}\,, & \text{jos } z \neq z_0, \infty \\ \infty\,, & \text{jos } z = z_0 \\ z_0\,, & \text{jos } z = \infty\,. \end{cases}$$

Joskus sanotaan, että pisteet z ja z^* ovat *symmetrisiä* ympyrän C suhteen.



5.14. Lause. *Pisteet z ja w ovat symmetrisiä ympyrän C suhteen, jos ja vain, jos*

$$[w, z_1, z_2, z_3] = \overline{[z, z_1, z_2, z_3]} \quad \textit{kaikilla } z_1, z_2, z_3 \in C\,.$$

TODISTUS: Ensiksi havaitaan, että

$$z_j^* = z_0 + \frac{r^2}{\bar{z}_j - \bar{z}_0} = z_0 + \frac{(z_j - z_0)(\bar{z}_j - \bar{z}_0)}{\bar{z}_j - \bar{z}_0} = z_j\,, \qquad \text{kun } z_j \in C\,,$$

josta

$$z^* - z_j = \frac{r^2(\bar{z}_j - \bar{z})}{(\bar{z}_j - \bar{z}_0)(\bar{z} - \bar{z}_0}\,,$$

ja siten

$$[z^*, z_1, z_2, z_3] = \overline{[z, z_1, z_2, z_3]}\,.$$

Toinen suunta HT. Huomaa, että mitkä tahansa kolme eri pistettä $z_1, z_2, z_3 \in C$ identifioivat heijastuspisteen. □

5.15. Seuraus. *Olkoon f Möbius-kuvaus ja C yleistetty ympyrä. Tällöin C:n suhteen symmetristen pisteiden z ja z^* kuvapisteet $f(z)$ ja $f(z^*)$ ovat symmetrisiä yleistetyn ympyrän $f(C)$ suhteen.*

□

Esimerkki. Muodostetaan Möbius-kuvaus f, joka kuvaa yksikkökiekon $B(0,1)$ itselleen, $f(0)=0$, $f(1)=i$. Huomataan, että koska origo pysyy paikallaan, niin sen suhteen symmetrinen piste ∞ pysyy myös paikallaan. Siten

$$[i,0,\infty,f(z)] = [1,0,\infty,z]\,,$$

josta

$$\frac{f(z)}{i} = \frac{z}{1} \qquad \text{eli} \qquad f(z) = iz\,.$$

5.3. Möbius-kuvaukset konformikuvauksina

Osoitetaan, että kiekon konformikuvaukset itselleen ovat Möbius-kuvauksen rajoittumia po. kiekkoon.

Aloitetaan seuraavalla tuloksella.

5.16. Lause. *Olkoon $z_0 \in B(0,1)$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| = 1$. Tällöin Möbius-kuvaus*

$$f(z) = \lambda \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}$$

määrää (konformisen) bijektion $f : B(0,1) \to B(0,1)$, jolle $f(z_0) = 0$.

Todistus: Huomaa, että f on Möbius-kuvaus, sillä

$$\lambda(1 - z_0\bar{z}_0) = \lambda(1 - |z_0|^2) \neq 0\,.$$

Siten, koska $f(z_0) = 0$, niin riittää tarkistaa, että

$$f(\partial B(0,1)) \subset \partial B(0,1)\,.$$

Näin onkin, sillä kun $|z| = 1$, niin

$$|f(z)| = |\lambda| \frac{|z - z_0|}{|1 - z\bar{z}_0|} = \frac{|z - z_0|}{|z||\frac{\bar{z}}{|z|^2} - \bar{z}_0|} = \frac{|z - z_0|}{|\bar{z} - \bar{z}_0|} = \frac{|z - z_0|}{|z - z_0|} = 1\,.$$

□

Tarvitsemme vielä Schwarzin lemmaa:

5.17. Lause. *Jos $f : B(0,1) \to B(0,1)$ on analyyttinen ja $f(0) = 0$, niin*

$$|f'(0)| \leq 1 \quad \text{ja} \quad |f(z)| \leq |z| \quad \text{kaikilla } z \in B(0,1).$$

Lisäksi, jos on $z_0 \in B(0,1)$, $z_0 \neq 0$, jolle $|f(z_0)| = |z_0|$, niin on olemassa $\lambda \in \mathbf{C}$, jolle $|\lambda| = 1$ ja

$$f(z) = \lambda z \quad \text{kaikilla } z \in B(0,1).$$

Todistus: Todistettu demoissa: seuraa hetimmiten, kun maksimiperiaatetta KA1.5.16 sovelletaan funktioon

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & \text{kun } z \neq 0, \\ f'(0), & \text{kun } z = 0, \end{cases}$$

joka on analyyttinen koko kiekossa $B(0,1)$.

□

Kiekon konformiset kuvaukset itselleen ovat Möbius-kuvauksia.

5.18. Lause. *Olkoon $f : B(0,1) \to B(0,1)$ konforminen bijektio ja $z_0 = f^{-1}(0)$. Tällöin on olemassa $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| = 1$, jolle*

$$f(z) = \lambda \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0} \quad \text{kaikilla } z \in B(0,1).$$

Todistus: Olkoon

$$g(z) = \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0},$$

jolloin Lauseen 5.16 nojalla g määrää kiekon konformikuvauksen itselleen, jolle $g(z_0) = 0$. Siten $h = f \circ g^{-1}$ toteuttaa Schwarzin lemman 5.17 oletukset, joten

$$|h(z)| \leq |z| \quad \text{kaikilla } z \in B(0,1).$$

Kuvaus h^{-1} toteuttaa samoin Schwarzin lemman 5.17 oletukset, joten

$$|h^{-1}(w)| \leq |w| \quad \text{kaikilla } w \in B(0,1).$$

Erityisesti, kun $z = h^{-1}(w)$ on $h(z) = w$ ja

$$|h(z)| \leq |z| = |h^{-1}(w)| \leq |h(z)|$$

eli

$$|h(z)| = |z| \quad \text{kaikilla } z \in B(0,1)\,.$$

Siten Schwarzin lemman erikoistapaus kertoo, että

$$h(z) = \lambda z\,,$$

mistä

$$f(z) = h(g(z)) = \lambda g(z) = \lambda \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}\,,$$

kuten väitettiinkin. □

5.19. Seuraus. *Jos B on kiekko, niin jokainen konformikuvaus $f : B \to B$ on Möbius-kuvauksen rajoittuma kiekkoon B.*

□

Koko tason konformikuvaukset ovat affiineja kuvauksia:

5.20. Lause. *Olkoon $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ kokonainen injektio. Tällöin on olemassa $a, b \in \mathbf{C}$ $a \neq 0$, joille*

$$f(z) = az + b \quad \textit{kaikilla } z \in \mathbf{C}\,.$$

Erityisesti siis f on Möbius-kuvaus ja konforminen bijektio.

Todistus: Osoitetaan ensin, että f on polynomi. Jos f ei ole polynomi, on äärettömyyspiste sen oleellinen erikoispiste (Lause 3.11), ts. origo on kuvauksen

$$z \mapsto f(\frac{1}{z})$$

oleellinen erikoispiste. Tällöin Casorati-Weierstrassin lauseesta 3.10 seuraa, että joukko

$$f(\mathbf{C} \setminus B(0,1))$$

on $\mathbf{C}$:ssä tiheä, joten avoin joukko (ks. Lause 4.8) $f(B(0,1))$ leikkaa sitä,

$$f(\mathbf{C} \setminus B(0,1)) \cap f(B(0,1)) \neq \emptyset\,.$$

Siis on pisteet $z_1 \in B(0,1)$ ja $z_2 \notin B(0,1)$, joille vastoin f:n injektiiivisyyttä pätee

$$f(z_1) = f(z_2)\,.$$

Siis f on polynomi.

Algebran peruslauseen (Lause KA1.5.15) ja Lauseen 4.6 nojalla injektiivinen polynomi on 1. astetta, mistä väite seuraa. □