Kompleksianalyysi

Ari Lehtonen

”Le plus court chemin entre deux vérités dans le domaine réel
passe par le domaine complexe.” — Jacques Hadamard

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2020

Sisältö

Johdanto

Tämä luentomoniste on syntynyt keväällä 2019 ja 2020 pitämiäni kursseja Kompleksianalyysi 1&2 varten. Aiempaa tuntemusta kompleksiluvuista ei ole edellytetty, mutta hyvä tuntuma yhden muuttujan funktioiden analyysiin (differentiaali- ja integraalilaskenta mukaanlukien sarjateoria) ja joihinkin usean muuttujan funktioiden analyysin kohtiin (perusasiat tason topologiasta ja funktioiden differentioituvuudesta) ovat tarpeen.

Kompleksiluvut ilmestyivät matematiikkaan kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavan mukana 1500-luvun puolivälissä. Joissakin tapauksissa ratkaisukaavan tulokseen ilmestyy negatiivisten lukujen neliöjuuria, *imaginaarisia lukuja* (eli ”kuvitteellisia” lukuja). Niillä opittiin laskemaan, mutta niiden merkitys reaalisina objekteina jäi mysteeriksi 1800-luvun alkuvuosiin asti. Kompleksianalyysi lähti kehittymään 1800-luvun alussa osin siitä oivalluksesta (Gauss ja Cauchy), että kompleksinen käyräintegraali ei riipu integrointitiestä. Funktiot, joita siihen aikaan tutkittiin, tunnetaan nykyisin *analyyttisinä funktioina* eli sellaisina, jotka voidaan esittää Taylorin sarjansa summana. Kurssiparissa Kompleksianalyysi 1&2 sarjateoriaa käsitellään vasta jälkimmäisessä osassa; käyräintegraalin riippumattomuus integrointitiestä (”analyysin peruslause holomorfisille funktioille”) osoitetaan yhtäpitäväksi kompleksisen primitiivin olemassaololle. Tätä olemassaolo-ongelmaa selvitellään alustavasti kurssilla Kompleksianalyysi 1 ja jatketaan kurssilla Kompleksianalyysi 2. Primitiivin olemassaolo kompleksimuuttujan funktioille on oleellisesti monimutkaisempi kuin vastaava ongelma reaalimuuttujan funktioille.

Kurssin Kompleksianalyysi 1 alkuosan (monisteen luvut 1, 2 ja 3) teemoja ovat kompleksilukujen perusominaisuudet, täydennystä tason topologiaan, kompleksinen differentioituvuus ja sen yhteys vektorianalyysissä käsiteltyyn differentioituvuuteen sekä kompleksinen käyräintegrointi. Aiempaa osaamista reaalisten vektorikenttien käyräintegroinnista ei tarvita, vaikka sen ja esimerkiksi Greenin lauseen tuntemus auttavat Cauchyn integraalilauseen ymmärtämistä. Kurssin Kompleksianalyysi 1 keskeisimmät tulokset löytyvät monisteen luvuista 4 ja 5, Cauchyn integraalilause ja Cauchyn integraalikaava seurauksineen, joista yksi tärkeä on algebran peruslause: jokaisella kompleksikertoimisella ei-vakiopolynomilla on kompleksinen juuri. Varsinaisen kompleksianalyysin voidaan hyvällä syyllä katsoa alkavaksi nimenomaan Cauchyn integraalilauseesta. Erinäiset kompleksimuuttujan funktioiden erikoiset ominaisuudet kuten se, että kompleksisesti differentioituvalla funktiolla on kaikkien kertalukujen derivaatat, ja että se voidaan esittää Taylorin sarjansa summana, pohjautuvat Cauchyn integraalilauseeseen. Tässä kohtaa on hyvä todeta, että reaalimuuttujan derivoituvan funktion derivaataan ei tarvitse olla jatkuva, puhumattakaan korkeampien kertalukujen derivaattojen olemassaolosta. Ja vaikka funktiolla olisi kaikkien kertalukujen derivaatat, funktion Taylorin sarjan summan ei tarvitse olla alkuperäinen funktio muualla kuin kehityspisteessä, tai Taylorin sarjan ei tarvitse supeta muualla kuin kehityspisteessä.

Kurssilla Kompleksianalyysi 1 Cauchyn integraalilauseen ja integraalikaavan todistamisessa hyödynnettään yksinkertaista geometrista päättelyä. Tuloksia kutsutaan integraalilauseen ja integraalikaavan lokaaleiksi versioiksi erotuksena kurssilla Kompleksianalyysi 2 todistettavista yleisistä versioista, joiden käsittely tukeutuu topologisempien apuvälineiden käyttöön. Kurssin Kompleksianalyysi 1 tulosten avulla on mahdollista laskea reaalisia määrättyjä integraaleja selvittämättä määräämätöntä integraalia eli primitiiviä. Osa kompleksianalyysin menetelmin laskettavista määrättyistä integraaleista on jopa sellaisia, että määräämätöntä integraalia ei voi esittää alkeisfunktioiden avulla. Kurssilla Kompleksianalyysi 2 määrättyjen integraalien laskemiseen saadaan tehokkaampi menetelmä sarjateorian avulla, residylause.

Kurssille Kompleksianalyysi 2 olen mukaan ottanut kaksi tunnettua erikoisfunktiota, gamma-funktion ja Riemannin zeeta-funktion. Gamma-funktion kohdalla on luonnollista perehtyä sarjateorialle sukua olevaan päättymättömien tulojen teoriaan. Kumpikin funktioista näyttää myös, miten residylausetta käytetään analyyttisten funktioiden ominaisuuksien tarkastelemisessa.

Moneen alkeis- ja erikoisfunktioon liittyy tunnettuja kaavoja. Esimerkiksi eksponenttifunktion perusominaisuus $e^{x+y} = e^x\, e^y$ tunnetaan *eksponenttifunktion funktionaaliyhtälönä* $f(x+y) = f(x)\, f(y)$. Tällainen funktionaaliyhtälö ei kuitenkaan välttämättä karakterisoi kyseisestä funktiota ilman lisäehtoja. Eksponenttifunktion kohdalla tällainen lisäominaisuus oivallettiin vasta 1905 (Georg Hamel): Jos f on jatkuva pisteessä $x = 0$ ja $f(1) = e$, niin $f(x) = e^x$. Gamma-funktion funktionaaliyhtälö on $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$. Lisäehdot, jotka tarvitaan tämän funktionaaliyhtälön lisäksi osoittamaan, että funktio on vakiotekijää vaille gamma-funktio, löydettiin vasta 1922 (reaalimuuttujan tapauksessa) ja 1939 (kompleksimuuttujan tapauksessa). Jälkimmäinen tulos, Helmut Wielandtin lause, on otettu mukaan esimerkkinä kompleksianalyysin tulosten soveltamisesta, ja osin siksi, että tulosta ei kirjallisuudesta helpolla löydä. (Wielandt ei tulostaan julkaissut; jotenkin se kulkeutui Konrad Knoppin kirjaan *Funktionentheorie II*, 1941.)

Kurssi Kompleksianalyysi 2 päätetään lyhyeen johdantoon konformikuvauksiin.

Kurssiparilla kompleksianalyysi 1&2 ei perehdytä lainkaan harmonisten funktioiden ominaisuuksiin, kompleksisiin dynaamisiin systeemeihin (eikä niihin liittyviin fraktaaleihin) eikä ”moderniin kompleksianalyysiin”, jollaiseksi voitaisiin määritellä usean kompleksimuuttujan funktioiden ja kompleksisten monistojen (esimerkiksi Riemannin pintojen) tutkimus topologisin apuvälinein (esimerkiksi lyhdeteoria).

Saimaan rannalla MM$\frac{01}{05}$XX
Ari Lehtonen

Osa 1

Kompleksianalyysi 1

LUKU 1

Kompleksitaso

1.1. Yleistä kompleksiluvuista

Jos rajoitutaan tarkastelemaan vain kokonaislukuja, vain joillakin ensimmäisen asteen yhtälöillä $a\,x + b = 0$ on ratkaisu x. Jotta yhtälö olisi ratkeava kaikille $a \neq 0$ ja $b \in \mathbb{Z}$, täytyy lukualue laajentaa rationaalilukujen joukoksi. Vastaavalla tavalla esimerkiksi yhtälöllä $x^2 + 1 = 0$ ei ole reaalista ratkaisua, mutta sopivalla lukualueen laajennuksella yhtälölle löydetään ratkaisu. Tarvittavan lukualueen konstruktion motivoinniksi tarkastellaan ongelmaa ensin muodollisesti.

Oletetaan, että on olemassa joukko C, joka sisältää osajoukkonaan reaaliakselin $\mathbb{R}$, jossa yhtälöllä $x^2+1 = 0$ on ratkaisu, ja jossa laskutoimitukset "toimivat normaalisti". Merkitään yhtälön $x^2 + 1 = 0$ ratkaisua symbolilla i. Tällöin joukon C luvuille $z := x + i\,y$ ja $w := u + i\,v$, missä $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$ ja $v \in \mathbb{R}$, on voimassa

$$\begin{aligned} z + w &= x + u + i\,(y + v) \quad \text{ja} \\ z\,w &= x\,u + i\,y\,u + i\,v\,x + i^2\,y\,v \\ &= x\,u - y\,v + i\,(y\,u + x\,v) \end{aligned}$$

Jotta yllä oleva "kuvitteellinen" (eli imaginaarinen) ratkaisu i saisi konkreettisen tulkinnan, asetetaan

Määritelmä 1.1. Reaalisen vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreille $z := (x, y)$ ja $w := (u, v)$ määritellään kertolasku kaavalla

$$z\,w := (x\,u - y\,v, y\,u + x\,v).$$

Kun joukko $\mathbb{R}^2$ varustetaan vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreiden yhteenlaskulla ja reaalilukukertolaskulla sekä yllä määritellyllä vektoreiden kertolaskulla, joukkoa $\mathbb{R}^2$ merkitään $\mathbb{C}$ ja kutsutaan *kompleksilukujen joukoksi* eli *kompleksitasoksi*. Joukon $\mathbb{C}$ alkioita kutsutaan *kompleksiluvuiksi*.

Vektoriavaruuden $\mathbb{C}$ standardikantavektoreita merkitään $\mathbf{1} := (1, 0)$ ja $i := (0, 1)$. Kompleksiluku i on *imaginaariyksikkö*.

Huomautus 1.2. Kompleksiluvuille $\mathbf{1} = (1, 0)$ ja $i = (0, 1)$ on voimassa (HT):

$$\mathbf{1}\,z = z \quad \text{kaikille } z \in \mathbb{C}, \text{ ja} \quad i^2 = i\,i = -\mathbf{1}.$$

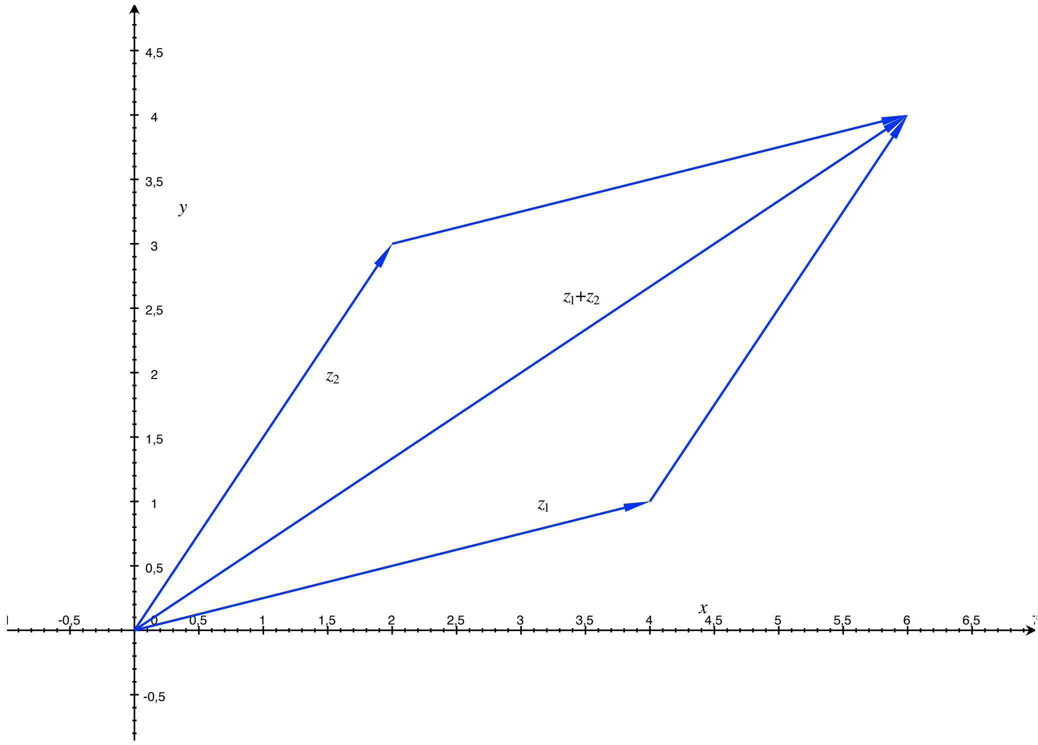
Lisäksi jokainen $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ voidaan esittää muodossa

$$z = x\,\mathbf{1} + y\,i.$$

Kertolaskua ei useinkaan tarvitse merkitä näkyviin symbolilla. Jos tällaiseen selvyyden vuoksi on tarvetta, käytetään samankaltaista merkitää kuin reaaliluvuille, $z\,w = z \cdot w$. Jotta ei olisi sekaantumisen vaaraa vektoreiden pistetulon (eli sisätulon)

[1]Viimeksi muutettu 24.1.2020.

kanssa, vektoreiden $z := (x, y)$ ja $w := (u, v)$ sisätuloa merkitään $(z|w) := x\,u + y\,v$. Huomaa: kompleksilukujen z ja w tulo $z\,w$ on kompleksiluku (eli vektori), kun vektoreiden sisätulo $(z|w)$ on aina reaaliluku.



Kompleksilukujen yhteenlasku on tason vektoreiden yhteenlaskua.

LAUSE 1.3. *Kompleksilukujen joukko* $\mathbb{C}$ *on kunta, t.s. kaikille kompleksiluvuilla* $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$ *ja* $z_3 \in \mathbb{C}$ *on voimassa*

(i) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ *ja* $z_1\,z_2 = z_2\,z_1$ (kommutatiivisuus)
(ii) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ *ja* $(z_1\,z_2)\,z_3 = z_1\,(z_2\,z_3)$ (assosiatiivisuus)
(iii) $z_1\,(z_2 + z_3) = z_1\,z_2 + z_1\,z_3$ (distributiivisuus)
(iv) $z_1 + \mathbf{0} = z_1$ *ja* $z_1 \cdot \mathbf{1} = z_1$ (yhteen- ja kertolaskun neutraalilalkiot)
(v) *luvulla* $z_1 = (x_1, y_1)$ *on* vastaluku $-z_1 = (-x_1, -y_1)$, *jolle* $z_1 + (-z_1) = \mathbf{0}$, *ja jos* $z_1 \neq \mathbf{0}$, *luvulla* z_1 *on* käänteisluku z_1^{-1}, *jolle* $z_1\,z_1^{-1} = \mathbf{1}$.

TODISTUS. Todetaan käänteisluvun olemassaolo; muut kohdat jäävät lukijan tarkistettavaksi. Yhteenlaskua koskevat väitteet seuraavat yleisistä vektoriavaruutta $\mathbb{R}^n$ koskevista tuloksista.

Olkoon $z := (x, y) \neq \mathbf{0}$. Tällöin $x \neq 0$ tai $y \neq 0$. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi oletetaan, että $x \neq 0$.

Kompleksiluvulle $w := (u, v)$ on $z\,w = \mathbf{1} = (1, 0)$, jos $x\,u - y\,v = 1$ ja $y\,u + x\,v = 0$. Jälkimmäisestä yhtälöstä saadaan $v = -y\,u/x$. Kun tämä sijoitetaan ensimmäiseen, saadaan $1 = x\,u + y^2\,u/x = u\,(x^2 + y^2)/x$, joten $u = x/(x^2 + y^2)$. Siis

$$z^{-1} = w = \Big(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\Big).$$

Lukija tarkistakoon, että saatu w käy myös tapauksessa $y \neq 0$. $\square$

Huomautus 1.4. Kun tarkastellaan muotoa $x\,\mathbf{1} = (x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, olevia kompleksilukuja, huomataan, että luvuille $z := x\,\mathbf{1}$ ja $w := u\,\mathbf{1}$ on

$$z + w = (x + u)\,\mathbf{1} \quad \text{ja} \quad z\,w = (x\,u)\,\mathbf{1}.$$

Muotoa $x\,\mathbf{1}$, $x \in \mathbb{R}$, olevat kompleksiluvut käyttäytyvät siis yhteen- ja kertolaskun suhteen kuten reaaliluvut. Kun määritellään $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) := x\,\mathbf{1}$, on f injektiivinen kuvaus, jolle $f(x+u) = f(x) + f(u)$ ja $f(x\,u) = f(x)\,f(u)$, eli (rengasteoriaa tuntevien termein) f on injektiivinen rengashomomorfismi. Kun $\mathbb{R}$ ja kuvajoukko $f(\mathbb{R})$ samaistetaan, voidaan reaaliluvut x tulkita kompleksiluvuiksi $x\,\mathbf{1}$. Jatkossa x ja $x\,\mathbf{1}$ samaistetaan eli merkitään lyhyyden vuoksi $x\,\mathbf{1} = x$. Tällöin jokainen $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ voidaan esittää muodossa

$$z = x + y\,i = x + i\,y.$$

Kompleksiluvun $z = x + i\,y$ käänteisluku on siis

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\,\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Kun $w \neq 0$, käytetään tuttua merkintää

$$\frac{z}{w} := z\,w^{-1}.$$

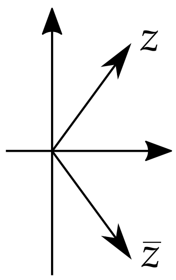
Määritelmä 1.5. Olkoon $z = (x, y) = x + i\,y \in \mathbb{C}$, missä $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}$.

Kompleksiluvun z *reaaliosa* on $\mathrm{Re}(z) := x$ ja *imaginaariosa* $\mathrm{Im}(z) := y$.

Kompleksiluvun $z = x + i\,y$ *kompleksikonjugaatti* on luku $\overline{z} := x - i\,y$.

Kompleksiluvun $z = x + i\,y$ *moduli* (eli *itseisarvo*) on luku $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$.

Kompleksitason osajoukkoa $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0\} = \{x + i\,0 \mid x \in \mathbb{R}\}$ (x-akselia) kutsutaan *reaaliakseliksi* ja vastaavasti joukkoa $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = 0\} = \{0 + i\,y \mid y \in \mathbb{R}\}$ (y-akselia) *imaginaariakseliksi*.



Kompleksiluku ja sen konjugaatti ovat toistensa peilikuvia x-akselin suhteen.

Esimerkki 1.6. Olkoot $z := 1 - 2\,i$ ja $w := 3 + 4\,i$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(z) &= 1, \quad \mathrm{Im}(w) = 4 \\
|z| &= \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \quad |w| = \sqrt{9 + 16} = 5 \\
z + w &= 4 + 2\,i \\
z\,w &= 3 - (-8) + (-6 + 4)\,i = 11 - 2\,i \\
\frac{z}{w} &= (1 - 2\,i)\left(\frac{3}{3^2 + 4^2} - i\,\frac{4}{3^2 + 4^2}\right) = \cdots = -\frac{1}{5} - i\,\frac{2}{5}
\end{aligned}$$

LAUSE 1.7. *Kaikille $z \in \mathbb{C}$ ja $w \in \mathbb{C}$ on voimassa*

(i) $\overline{\overline{z}} = z$

(ii) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

(iii) $\overline{z\,w} = \overline{z}\,\overline{w}$

(iv) $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$, *jos* $z \neq 0$

(v) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

(vi) $|\overline{z}| = |z|, \quad |z|^2 = z\,\overline{z}$

(vii) $|z\,w| = |z|\,|w|$

(viii) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

(ix) $|\operatorname{Re}(z)| \leqslant |z|, \quad |\operatorname{Im}(z)| \leqslant |z|$

(x) $|z + w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\,\overline{w}) + |w|^2$

(xi) $|z + w| \leqslant |z| + |w|, \quad \big||z| - |w|\big| \leqslant |z - w|$

TODISTUS. Todistetaan toiseksi viimeinen identiteetti (x):

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)\,\overline{(z + w)} = (z + w)\,(\overline{z} + \overline{w}) \\ &= z\,\overline{z} + z\,\overline{w} + w\,\overline{z} + w\,\overline{w} \\ &= |z|^2 + z\,\overline{w} + \overline{\overline{w}\,z} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\,\overline{w}) + |w|^2 \end{aligned}$$

□

HUOMAUTUKSIA 1.8. a) Kompleksiluvun $z = x + i\,y$ moduli on sama kuin tasovektorin (x, y) euklidinen normi. Kolmioepäyhtälöt (kohta (xi)) seuraavat siis normin ominaisuuksista. Jos kompleksiluku z on reaalinen eli $y = \operatorname{Im}(z) = 0$, on luvun z moduli $|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|$. Moduli siis yleistää reaalilukujen itseisarvon käsitteen kompleksiluvuille. Kompleksiluvuille ei kuitenkaan ole olemassa sellaista järjestysrelaatiota, joka säilyisi laskutoimituksissa.[2] Kompleksilukujen itseisarvoa ei siis voi määritellä järjestysrelaation avulla kuten reaalilukujen kohdalla tehdään.

b) Koska kompleksilukuja ei voi järjestää kuntana, merkintä $z \geqslant 0$ (tms) pitää sisällään erityisesti sen, että z on reaaliluku.

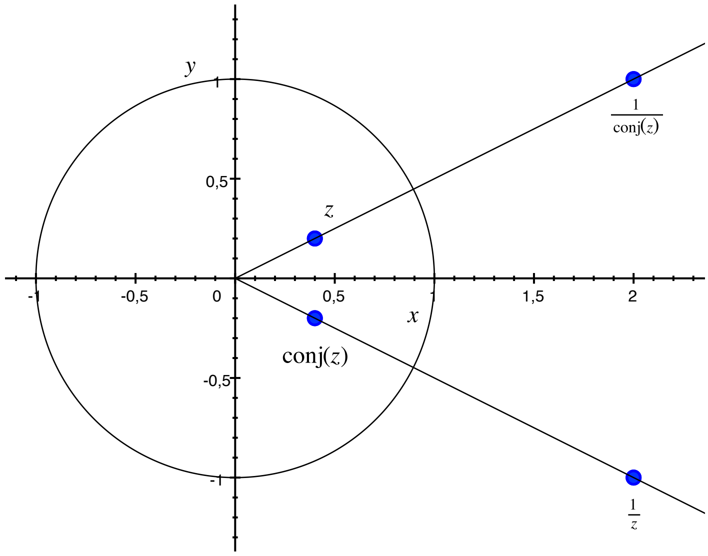
c) Kohdan (vii) kaava $|z\,w| = |z|\,|w|$, *normin multiplikatiivisuus*, on tuttu reaalilukujen itseisarvolle. Kompleksilukujen tulo on siis siitä erikoinen vektoreiden kertolasku, että se "sopii hyvin yhteen" kompleksilukujen normin kanssa.

d) Käänteisluvulle saatua kaavaa ei tarvitse muistaa; se on aina konstruoitavissa seuraavasti: Olkoon $z = x + i\,y \neq 0$. Luvun z käänteisluku on

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\,\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{z}}{z\,\overline{z}},$$

joten lukemalla takaperin: $z^{-1} = 1/z$ saadaan laventamalla osamäärä luvun z kompleksikonjugaatilla $\overline{z}$.

[2]Kompleksilukujen joukkoa ei siis voi varustaa sellaisella järjestysrelaatiolla $\preccurlyeq$, että $(\mathbb{C}, +, \cdot, \preccurlyeq)$ olisi *järjestetty kunta*. "Aakkosjärjestyksen" avulla jokaista kompleksilukuparia voidaan verrata ja se säilyy yhteenlaskussa, mutta ei kertolaskussa.



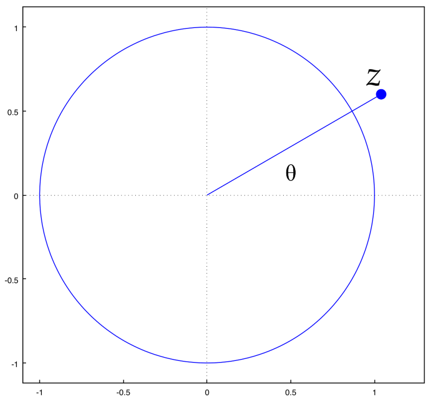
Kompleksiluku z, sen konjugaatti $\operatorname{conj}(z) := \overline{z}$ ja näiden käänteisluvut $1/z$ ja $1/\overline{z}$.

Kun $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, on luvun $z/|z|$ itseisarvo yksi, joten se sijaitsee yksikköympyrän kehällä. Koska jokainen yksikköympyrän kehän piste on muotoa $(\cos\theta, \sin\theta)$ ja yksikköympyrän kehän piste määrää napakulman θ luvun 2π kokonaislukumonikertaa lukuunottamatta yksikäsitteisesti (eli piste z määrää kulman θ ”yksikäsitteisesti modulo 2π”), saadaan

Lause 1.9 (Napakoordinaatit). *Jokainen $z \in \mathbb{C}$ voidaan esittää muodossa*

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta), \quad \textit{missä } \theta \in (-\pi, \pi].$$

Jos $z \neq 0$ ja luvulla z on myös esitys $z = |z|\,(\cos\psi + i\sin\psi)$, on $\psi = \theta + k\,2\pi$ jollekin $k \in \mathbb{Z}$. □



Kompleksiluvun z napakulma θ.

Määritelmä 1.10. Nollasta eroavan kompleksiluvun z *argumentin päähaara* $\operatorname{Arg}(z)$ on se luku $\theta \in \mathbb{R}$, jolle

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{ja} \quad -\pi < \theta \leqslant \pi. \tag{1.1}$$

Lause 1.11. *Olkoot $\theta_1 \in \mathbb{R}$, $\theta_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$ ja*

$$z_j := r_j\,(\cos\theta_j + i\sin\theta_j).$$

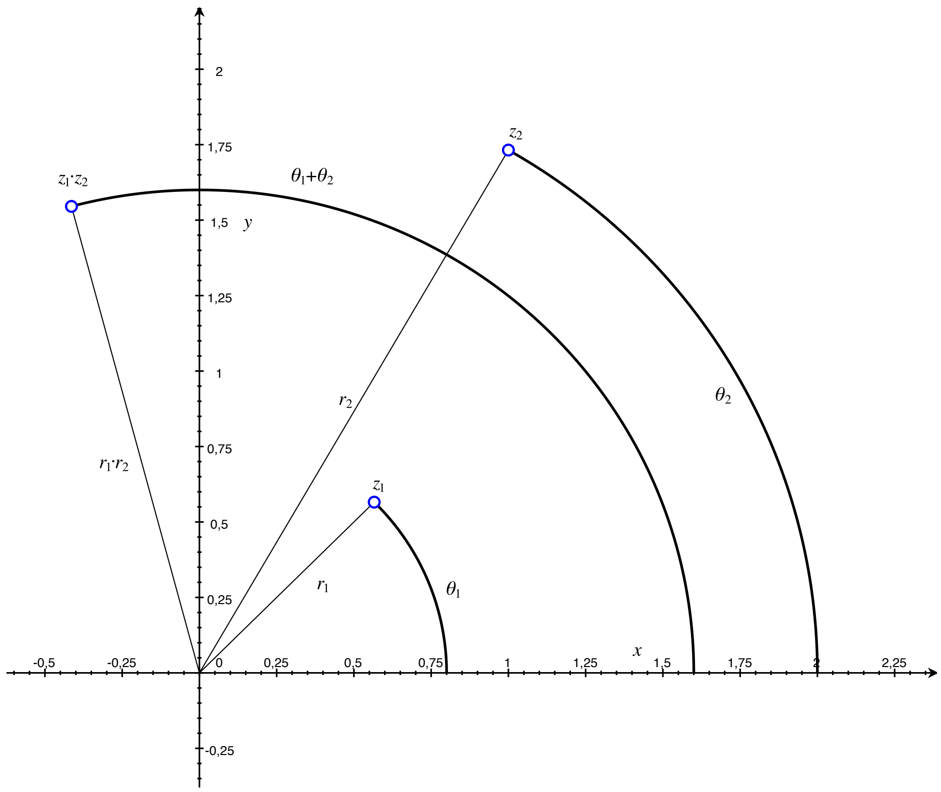
Tällöin

$$z_1\, z_2 = r_1\, r_2\, \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\right). \tag{1.2}$$

TODISTUS. Lasketaan (apuna sinin ja kosinin yhteenlaskukaavat)

$$\begin{aligned} z_1\, z_2 &= r_1\, r_2\, (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ &\qquad + i(\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \cos\theta_2 \sin\theta_1). \\ &= r_1\, r_2\, \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\right). \end{aligned}$$

□



Kompleksilukujen kertolasku.

Harjoitustehtäväksi jätetään lauseesta saatavan seurauksen todistaminen (huomaa tapaukset $n > 0$, $n = 0$ ja $n < 0$):

SEURAUS 1.12 (De Moivren kaava[3]). *Kaikille $\theta \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{Z}$ on voimassa*

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos(n\,\theta) + i \sin(n\,\theta).$$

□

HUOMAUTUS 1.13. Kun kaavassa (1.2) $r_j \geqslant 0$, on $|z_j| = r_j$. Koska $\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)$ on yksikkövektori, kaava (1.2) pitää sisällään lauseen 1.7 kohdan (vii). Sen sijaan kaavasta (1.2) **ei voida** päätellä, että $\operatorname{Arg}(z_1\, z_2) = \theta_1 + \theta_2$, ainoastaan $\operatorname{Arg}(z_1\, z_2) \equiv \theta_1 + \theta_2 \bmod 2\pi$ ($:\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Arg}(z_1\, z_2) = \theta_1 + \theta_2 + k\, 2\pi$ jollekin $k \in \mathbb{Z}$). Harjoitustehtäväksi jää osoittaa, että kun $z_1 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ja $z_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, niin

$$\operatorname{Arg}(z_1\, z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) + 2\pi\, k(z_1, z_2),$$

[3]LEONHARD EULER (1707–1783), Sveitsi, kaava 1748, 1749; ABRAHAM DE MOIVRE (1667–1754), Ranska ja Englanti, kaava 1707, 1730.

missä

$$k(z_1, z_2) := \begin{cases} 0, & \text{jos } -\pi < \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2) \leqslant \pi, \\ +1, & \text{jos } -2\pi < \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2) \leqslant -\pi, \\ -1, & \text{jos } \pi < \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2) \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

LAUSE 1.14. *Olkoot* $n \in \mathbb{Z}_+$ *ja* $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. *Tällöin yhtälöllä*

$$w^n = z$$

on täsmälleen n *eri ratkaisua* $w = w_k \in \mathbb{C}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. *Ratkaisut ovat*

$$w_k := \sqrt[n]{|z|}\,\Big(\cos\Big(\frac{\mathrm{Arg}(z) + k\,2\pi}{n}\Big) + i\,\sin\Big(\frac{\mathrm{Arg}(z) + k\,2\pi}{n}\Big)\Big)$$

TODISTUS. Olkoot $z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ ja $w = |w|\,(\cos\psi + i\sin\psi)$. Jos $w^n = z$, de Moivren kaavan nojalla saadaan

$$|w|^n\,(\cos(n\,\psi) + i\sin(n\,\psi)) = \big(|w|\,(\cos\psi + i\sin\psi)\big)^n = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Tästä saadaan $|w|^n = |z|$, joten $|w| = \sqrt[n]{|z|}$. Kulmia $n\,\psi$ ja θ vastaa sama piste $\cos(n\,\psi) + i\sin(n\,\psi) = \cos\theta + i\sin\theta$ yksikköympyrän kehällä, joten on olemassa $k \in \mathbb{Z}$ siten, että

$$n\psi = \theta + k\,2\pi$$

Siis

$$\psi = \frac{\theta + k\,2\pi}{n}.$$

Kun $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, saadaan eri ratkaisut $w = w_k$. Muille luvun k kokonaislukuarvoille saadaan jokin näistä ratkaisuista w_j ($w_j = w_k$, kun $j \equiv k \bmod n$). □

MÄÄRITELMÄ 1.15 (n. juuri). Olkoot $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Tällöin luku

$$\sqrt[n]{z} := \sqrt[n]{|z|}\,\Big(\cos\Big(\frac{\mathrm{Arg}(z)}{n}\Big) + i\,\sin\Big(\frac{\mathrm{Arg}(z)}{n}\Big)\Big)$$

on kompleksiluvun z *n. juuren päähaara*. Lisäksi asetetaan $\sqrt[n]{0} := 0$.

Asetetaan vielä $\sqrt{z} := \sqrt[2]{z}$, *neliöjuuren päähaara*.

Huomaa, että $\sqrt[1]{z} = z$ kaikille $z \in \mathbb{C}$. Lisäksi on hyvä huomata, että ei-negatiivisen reaaliluvun x argumentin päähaara $\mathrm{Arg}(x) = 0$, joten n. juuren päähaara $\sqrt[n]{x}$ on sama kuin aiemmin reaalimuuttujan funktioiden yhteydessä määritelty n. juuri. Negatiiviselle reaaliluvulle x on $\mathrm{Arg}(x) = \pi$, jolloin $\cos(\frac{\mathrm{Arg}(x)}{2}) + i\,\sin(\frac{\mathrm{Arg}(x)}{2}) = i$ ja neliöjuuren päähaara $\sqrt{x} = \sqrt{|x|}\,i$ sijaitsee positiivisella imaginaariakselilla.[4]

Edelleen määritelmän nojalla $\big(\sqrt[n]{z}\big)^n = z$ kaikille $z \in \mathbb{C}$. Sen sijaan "yleensä" $\sqrt[n]{z^n} \neq z$.

[4] Juuren päähaaran arvo riippuu argumentin päähaaran valinnasta. Kompleksianalyysin kirjallisuudessa argumentin päähaaran määritelmät vaihtelevat suuresti. Tavanomaisimmat vaihtoehtoiset rajoitteet ovat $-\pi \leqslant \mathrm{Arg}(z) < \pi$, $0 \leqslant \mathrm{Arg}(z) < 2\pi$ ja $0 < \mathrm{Arg}(z) \leqslant 2\pi$. Jos esimerkiksi vaadittaisiin, että $-\pi \leqslant \mathrm{Arg}(z) < \pi$, negatiiviselle reaaliluvulle x olisi $\mathrm{Arg}(x) = -\pi$ ja $\sqrt{x} = -\sqrt{|x|}\,i$. Myöhemmin määriteltävien logaritmin ja potenssifunktion arvot riippuvat valitusta argumentin päähaarasta.

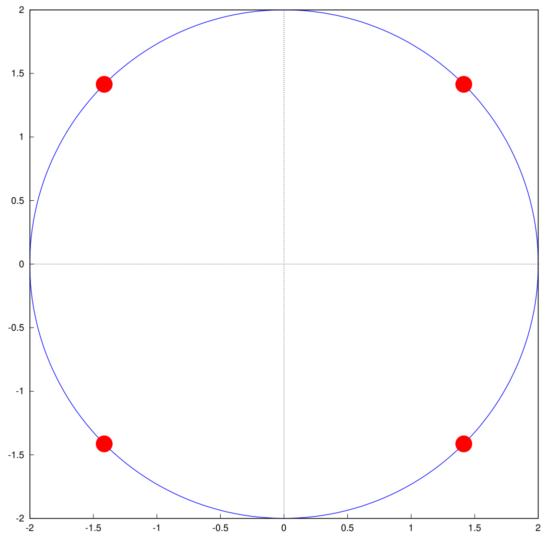
Esimerkkejä 1.16. a) Määrätään kaikki yhtälön $z^4 + 16 = 0$ ratkaisut.

Koska $\mathrm{Arg}(-16) = \pi$, lauseen 1.14 kaavassa esiintyvät kulmat ovat

$$\left\{ \frac{\pi + k\,2\pi}{4} \;\middle|\; k \in \{0,1,2,3\} \right\} = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

Koska $\sqrt[4]{|-16|} = 2$, saadaan juurille arvot (sinin ja kosinin arvot taulukosta)

$$\sqrt{2} + i\,\sqrt{2}, \quad -\sqrt{2} + i\,\sqrt{2}, \quad -\sqrt{2} - i\,\sqrt{2}, \quad \sqrt{2} - i\,\sqrt{2}.$$



Yhtälön $z^4 = -16$ ratkaisut.

b) Määrätään kaikki yhtälön $z^3 = -1$ ratkaisut.

Koska $\mathrm{Arg}(-1) = \pi$, lauseen 1.14 kaavassa esiintyvät kulmat ovat

$$\left\{ \frac{\pi + k\,2\pi}{3} \;\middle|\; k \in \{0,1,2\} \right\} = \left\{ \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \right\}$$

Koska $\sqrt[3]{|-1|} = 1$, saadaan juurille arvot (sinin ja kosinin arvot taulukosta)

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,i, \quad -1, \quad \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,i.$$

Huomaa, että kompleksisen kuutiojuuren päähaaralle on $\sqrt[3]{-1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$, **ei** $\sqrt[3]{-1} = -1$, kuten reaalimuuttujan tapauksessa.

1.2. Eksponenttifunktio

Reaalimuuttujan t eksponenttifunktiolla on koko reaaliakselilla suppeneva esitys Taylorin sarjana

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$$

Sijoitetaan tähän $t = i\,y$ ja lasketaan muodollisesti

$$\begin{aligned} e^{i\,y} &= 1 + i\,y - \frac{y^2}{2!} - i\,\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\,\frac{y^5}{5!} + \cdots \\ &= \Big(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots\Big) + i\,\Big(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \cdots\Big) \\ &= \cos y + i \sin y \end{aligned}$$

Kun lisäksi käytetään reaalisen eksponenttifunktion yhteenlaskuominaisuutta $e^{x+i\,y} = e^x\,e^{i\,y}$, päädytään asettamaan

Määritelmä 1.17 (Kompleksinen eksponenttifunktio). Kompleksiluvulle $z = x + i\,y$, missä $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}$, asetetaan

$$\exp(z) := e^z := e^x\,(\cos y + i \sin y).$$

Vaihtoehtoisesti kompleksisen eksponenttifunktion määritelmää voidaan perustella seuraavasti: Olkoon y reaalimuuttuja. Esitetään $e^{i\,y}$ reaali- ja imaginaariosien avulla muodossa $e^{i\,y} = g(y) + i\,h(y)$, missä g ja h ovat reaaliarvoisia. *Oletetaan*, että derivointi toimii kompleksiarvoisille funktioille kuten reaaliarvoisille (huomaa: i on vakio; vektoriarvoinen funktio derivoidaan komponenteittain; erityisesti oletetaan, että kompleksisen eksponenttifunktion derivointisääntö on samanlainen kuin reaalisessa tapauksessa). Tällöin

$$g'(y) + i\,h'(y) = \frac{d\,e^{i\,y}}{dy} = i\,e^{i\,y} = i\,(g(y) + i\,h(y)) = -h(y) + i\,g(y).$$

Koska g ja h ovat reaaliarvoisia, tulee olla $g'(y) = -h(y)$ ja $h'(y) = g(y)$. Derivoimalla ensimmäisen yhtälö puolittain, saadaan

$$g''(y) = -h'(y) = -g(y).$$

Tämän toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön ratkaisut ovat muotoa

$$g(y) = c_1 \cos y + c_2 \sin y.$$

Sijoittamalla $y = 0$, saadaan $1 = e^{i\,0} = g(0) + i\,h(0)$, joten $g(0) = 1$ ja $h(0) = 0$ eli $g'(0) = 0$. Näistä vakioille c_1 ja c_2 saadaan arvot $c_1 = g(0) = 1$ ja $c_2 = g'(0) = 0$. Siis

$$e^{i\,y} = g(y) + i\,h(y) = g(y) - i\,g'(y) = \cos y + i \sin y.$$

Huomaa: Kompleksisen eksponenttifunktion määritelmässä vasemmalla puolella käytetään samoja merkintöjä kuin reaaliselle eksponenttifunktiolle. Kun $z = x \in \mathbb{R}$, on kompleksisen eksponenttifunktion arvo e^z sama kuin reaalisen eksponenttifunktion arvo e^x. Tästä syystä saman merkinnän käyttö yleisemmässä tilanteessa ei aiheuta sekaannusta (tai: reaalinen eksponenttifunktio on kompleksisen eksponenttifunktion rajoittuma reaaliakselille).

Kompleksilukujen esitys napakoordinaattien avulla (lause 1.9) saa kompleksisen eksponenttifunktion avulla muodon

$$z = |z|\, e^{i\,\theta},$$

missä $\theta := \mathrm{Arg}(z)$, kun $z \neq 0$. (Jos $z = 0$, mikä tahansa $\theta \in \mathbb{R}$ käy).

De Moivren kaava (seuraus 1.12) saa kompleksisen eksponenttifunktion avulla erityisen yksinkertaisen muodon:

$$\left(e^{i\,\theta}\right)^n = e^{i\,n\,\theta}, \quad \text{kun } \theta \in \mathbb{R} \text{ ja } n \in \mathbb{Z}.$$

Osoitetaan, että eksponenttifunktion yhteenlaskukaava, jota käytettiin motivoimaan kompleksisen eksponenttifunktion määrittelevää kaavaa, pätee yleisesti:

LAUSE 1.18. *Kaikille $z \in \mathbb{C}$ ja $w \in \mathbb{C}$ on voimassa*

(i) $\left(e^{z}\right)^{-1} = e^{-z}$*; ja*
(ii) $e^{z+w} = e^{z}\, e^{w}$.

TODISTUS. ii): Olkoot $z = x + i\,y$ ja $w = u + i\,v$. Tällöin määritelmän ja sinin ja kosinin yhteenlaskukaavojen nojalla saadaan

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^{(x+u)+i\,(y+v)} \\ &= e^{x+u}\,(\cos(y+v) + i\sin(y+v)) \\ &= e^{x}\,e^{u}\,(\cos y \cos v - \sin y \sin v + i(\sin y \cos v + \cos y \sin v)). \end{aligned}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} e^{z}\,e^{w} &= e^{x}\,(\cos y + i\,\sin y)\,e^{u}\,(\cos v + i\sin v) \\ &= e^{x}\,e^{u}\,(\cos y \cos v - \sin y \sin v + i(\sin y \cos v + \cos y \sin v)). \end{aligned}$$

i): Valitaan kohdassa ii) $w := -z$. Tällöin $1 = e^0 = e^{z-z} = e^{z}\,e^{-z}$. Tästä seuraa, että luvut e^{z} ja e^{-z} ovat toistensa käänteislukuja. □

HUOMAUTUS 1.19. Olkoon $z = x + i\,y$. Koska piste $\cos y + i \sin y$ on yksikköympyrän kehällä, on

$$|e^{z}| = |e^{x}|\,|\cos y + i\sin y| = e^{x}.$$

Piste $e^{z} = e^{x+i\,y}$ sijaitsee siis origokeskisen, e^{x}-säteisen ympyrän kehällä. Lisäksi pisteellä e^{z} on napakulmana y, joten sen argumentin päähaaralle on $\mathrm{Arg}(e^{z}) = y + k\,2\pi$ jollekin $k \in \mathbb{Z}$ (eli $\mathrm{Arg}(e^{z}) \equiv \mathrm{Im}(z) \bmod 2\pi$). Näistä saadaan (yksityiskohdat: HT)

$$\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

ESIMERKKI 1.20. Lasketaan

$$\frac{(1+i)^3}{(1-i)^5}.$$

Koska $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$ ja $1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$, on

$$\frac{(1+i)^3}{(1-i)^5} = \frac{(\sqrt{2}\,e^{i\pi/4})^3}{(\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4})^5} = \frac{(\sqrt{2})^3\,e^{i\,3\pi/4}}{(\sqrt{2})^5\,e^{-i\,5\pi/4}} = \frac{e^{i\,3\pi/4+i\,5\pi/4}}{(\sqrt{2})^2} = \tfrac{1}{2}\,e^{i\,2\pi} = \tfrac{1}{2}.$$

Esimerkki 1.21. Ratkaistaan yhtälö $e^z = 1$.

Merkitään $z = x + i\,y$, jolloin $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ ja $|e^z| = e^x$. Siis $e^x = 1$, ja koska yhtälön $e^x = 1$ ainoa reaalinen ratkaisu on $x = 0$, on $z = i\,y$. Luvulle y on $1 = e^z = \cos y + i \sin y$. Siis $y = k\,2\pi$ jollekin $k \in \mathbb{Z}$, joten yhtälön $e^z = 1$ ratkaisut ovat $z = k\,2\pi\,i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lause 1.22. *Kompleksinen eksponenttifunktio on jaksollinen, jaksona $2\pi\,i$, t.s.*

$$e^z = e^w \iff z = w + k\,2\pi\,i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Todistus. Lauseen 1.18 nojalla $e^z = e^w \iff e^{z-w} = 1$. Edellisen esimerkin nojalla $e^{z-w} = 1 \iff z - w = k\,2\pi\,i$ jollekin $k \in \mathbb{Z}$. □

Huomautus 1.23. Jaksollisuuden takia kompleksisen eksponenttifunktion arvot määräytyvät täysin *jaksovyössä*

$$V := \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \mathrm{Im}(z) \leqslant \pi\}$$

saaduista arvoista (vertaa reaaliakselin siniin ja kosiniin).

Kiinnitetään $x_0 \in \mathbb{R}$ ja tarkastellaan imaginaariakselin suuntaista suoraa

$$L := \{x_0 + i\,y \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Kaikille $y \in \mathbb{R}$, on $z := x_0 + i\,y \in L$ ja $e^z = e^{x_0}(\cos y + i \sin y)$, jolloin $|e^z| = e^{x_0}$ ja $\mathrm{Arg}(z) = y + 2\pi\,i\,k$ jollekin $k \in \mathbb{Z}$. Kun y liikkuu 2π:n pituisen matkan suoralla L, piste e^z kiertää origokeskisen e^{x_0}-säteisen ympyrän kehän vastapäivään.

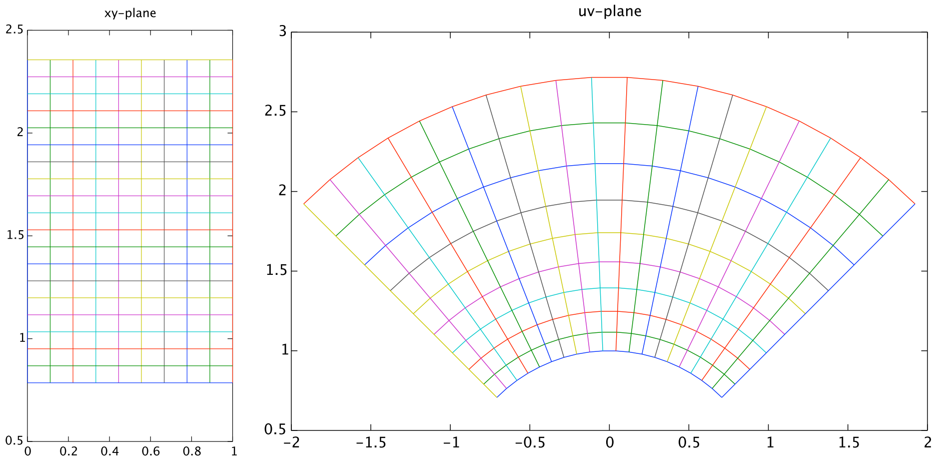
Koska $e^{x_0} > 0$ ja jokainen $r > 0$ on muotoa $r = e^{x_0}$ jollekin $x_0 \in \mathbb{R}$, on joukon

$$H := \{z = x + i\,y \in \mathbb{C} \mid x \leqslant x_0\}$$

kuvajoukko $\exp(H) = \overline{B}(0, e^{x_0}) \setminus \{0\}$. Yleisemmin suorakaiteen

$$R := \{z = x + i\,y \in \mathbb{C} \mid x_0 \leqslant x \leqslant x_1,\ y_0 \leqslant y < y_0 + 2\pi\}$$

kuvajoukko on $\exp(R) = \overline{B}(0, e^{x_1}) \setminus B(0, e^{x_0})$. Jos joukon R määrittelevä ehto muutetaan muotoon $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_1$, missä $y_1 - y_0 < 2\pi$, kuvajoukko on ympyrärenkaan $\overline{B}(0, e^{x_1}) \setminus B(0, e^{x_0})$ ja puolisuorien $\{r\,e^{i\,y_0} \mid r > 0\}$ ja $\{r\,e^{i\,y_1} \mid r > 0\}$ rajoittama joukko.

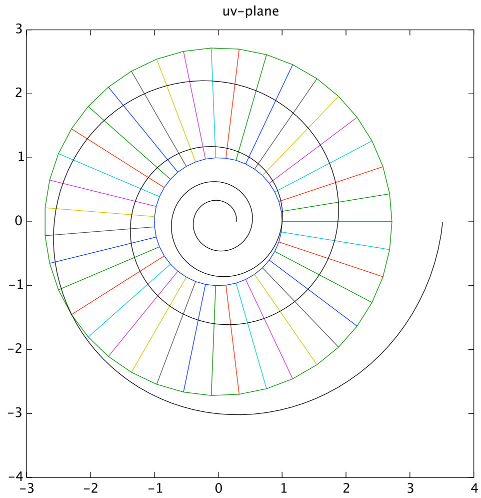


Vasen kuva: $z = x + i\,y$ -tason suorakaide S: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\frac{\pi}{4} \leqslant y \leqslant \frac{3\pi}{4}$.
Oikea kuva: $w = u + i\,v$ -tasossa suorakaiteen S kuvajoukko $\exp(S)$.

Kun $a \in \mathbb{R}$ ja $b \in \mathbb{R}$, on suoran $y = a\,x + b$ kuvajoukon pisteille $w = e^z$ voimassa

$$\begin{aligned} w &= e^{x+i\,y} = e^{x+i\,(a\,x+b)} = e^x\, e^{i\,(a\,x+b)} \\ &= e^x\,(\cos(a\,x+b) + i\sin(a\,x+b)). \end{aligned}$$

Siis $w = r\,e^{i\theta} = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$, missä $r = e^x$ ja $\theta = a\,x + b$. Jos $a > 0$, muuttujan x kasvaessa säde $r = e^x$ ja kulma $\theta = a\,x + b$ kasvavat, joten piste $w = e^{x+i\,(a\,x+b)}$ kiertyy vastapäivään origosta poispäin (ns. *logaritminen spiraali*). Jos $a < 0$, saadaan myötäpäivään origosta poispäin kiertävä spiraali.



Kuvassa suorakaiteen $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$ kuvajoukko eksponenttifunktiossa ja suoran $x = 0.1\,t$, $y = t$, $-4\pi \leqslant t \leqslant 4\pi$, kuvajoukko (=musta spiraali) eli pisteet $w = e^{0.1\,t}\,(\cos t + i\sin t)$, $-4\pi \leqslant t \leqslant 4\pi$.

1.3. Kompleksinen logaritmi

Reaaliakselin eksponenttifunktio $x \mapsto e^x$ on on aidosti kasvava bijektio $\mathbb{R} \to (0,\infty)$, joten sillä on käänteiskuvaus $(0,\infty) \to \mathbb{R}$, *luonnollinen logaritmi*, $u \mapsto \ln u$, jolle $x = \ln u \iff e^x = u$. Luonnolliselle logaritmille on siis $e^{\ln u} = u$, kun $u > 0$, ja $\ln u$ ei ole määritelty, kun $u \leqslant 0$.

Kompleksisella eksponenttifunktiolla käänteisfunktiota ei voi olla, koska eksponenttifunktio ei ole injektio. Jos eksponenttifunktion määrittelyjoukkoa rajoitetaan, käänteiskuvaus on kuitenkin löydettävissä.[5]

Lause 1.24. *Olkoon $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Tällöin yhtälöllä*

$$e^w = z$$

on ratkaisu $w \in \mathbb{C}$, ja yhtälön kaikki ratkaisut ovat

$$w = \ln|z| + i\,(\operatorname{Arg}(z) + 2\pi\,k), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Todistus. Luku z voidaan esittää muodossa $z = |z|\,e^{i\operatorname{Arg}(z)}$. Koska

$$e^{\ln|z|+i\,(\operatorname{Arg}(z)+2\pi\,k)} = e^{\ln|z|}\,e^{i\operatorname{Arg}(z)}\,e^{2\pi\,i\,k} = |z|\,e^{i\operatorname{Arg}(z)} = z,$$

on jokainen $w = w_k := \ln|z| + i\,(\operatorname{Arg}(z) + 2\pi\,k)$, $k \in \mathbb{Z}$, yhtälön $e^w = z$ ratkaisu.

Toisaalta, jos $w \in \mathbb{C}$ toteuttaa $e^w = z = e^{w_0}$, on lauseen 1.22 nojalla $w = w_0 + 2\pi\,i\,k = w_k$ jollekin $k \in \mathbb{Z}$. □

Määritelmä 1.25. Kompleksiluvun $z \neq 0$ *logaritmin päähaara* $\operatorname{Log}(z)$ määritellään kaavalla

$$\operatorname{Log}(z) := \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z).$$

[5] Vertaa tilannetta arkusfunktioihin. Esimerkiksi sini $x \mapsto \sin x$ kuvauksena $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ei ole injektio (eikä surjektio), mutta rajoittumalla välille $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ saadaan aidosti kasvava bijektio $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$. Arkussini on tämän rajoittuman käänteiskuvaus, ei sinin.

Määritelmän nojalla edellisen lauseen tulos voidaan ilmaista muodossa: Yhtälön $e^w = z$ ratkaisut ovat $w = \mathrm{Log}(z) + k\,2\pi\, i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Kompleksiluvun logaritmin päähaarasta on hyvä huomata, että positiiviselle reaaliluvulle x on $\mathrm{Log}(x) = \ln x$. Tässäkin tapauksessa kompleksiluvun z logaritmia voitaisiin merkitä $\log z$ kuten reaaliluvun logaritmiakin on tapana merkitä. [6]

Edelleen on hyvä huomata, että $\mathrm{Im}(\mathrm{Log}(z)) = \mathrm{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$.

HUOMAUTUS 1.26. Koska kompleksisella eksponenttifunktiolla ei ole käänteisfunktiota, ei eksponenttifunktion yhteenlaskukaavaa $e^{w_1+w_2} = e^{w_1} e^{w_2}$ voi "kääntää" logaritmin laskusäännöksi $\mathrm{Log}(z_1 z_2) = \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2)$. Tämän säännön paikalle tulee: Kun $z_1 \neq 0$ ja $z_2 \neq 0$, on

$$\mathrm{Log}(z_1 z_2) = \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2) + 2\pi\, i\, k \quad \text{jollekin } k \in \mathbb{Z}.$$

Luvuista z_1 ja z_2 riippuva kokonaisluku k selvitetään harjoituksissa.

HUOMAUTUS 1.27. Jos kompleksinen eksponenttifunktio rajoitetaan jaksovyöhön

$$V := \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \mathrm{Im}(z) \leqslant \pi\},$$

on $\exp|_V : V \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ bijektio ja logaritmin päähaara on tämän rajoittuman käänteiskuvaus, $\mathrm{Log} = (\exp|_V)^{-1}$.

1.4. Kompleksinen potenssifunktio

MÄÄRITELMÄ 1.28. Olkoon $\lambda \in \mathbb{C}$. *Kompleksisen potenssifunktion päähaara* (lyh. *kompleksinen potenssifunktio*) määritellään kaavalla

$$z^\lambda := e^{\lambda\,\mathrm{Log}(z)}, \quad \text{kun } z \in \mathbb{C},\ z \neq 0.$$

Määritelmästä on hyvä huomata seuraava: Kun $z \in \mathbb{R}$, $z > 0$, ja $\lambda \in \mathbb{R}$, on $e^{\lambda\,\mathrm{Log}(z)} = e^{\lambda \ln z} = z^\lambda$ aiempien reaalisen analyysin kurssien määritelmän mielessä. Määritelmä on siis siinä mielessä *hyvin asetettu*, että siinä aiemman reaalisen potenssifunktion $(z, \lambda) \mapsto z^\lambda$ määrittelyjoukko vain laajennetaan joukosta $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ joukoksi $\mathbb{C}\backslash\{0\} \times \mathbb{C}$.

HUOMAUTUS 1.29. Olkoot $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, ja $\lambda \in \mathbb{C}$ ja $\mu \in \mathbb{C}$. Tällöin kompleksiselle potenssifunktiolle **on voimassa** tuttu kaava

$$z^{\lambda+\mu} = e^{(\lambda+\mu)\,\mathrm{Log}(z)} = e^{\lambda\,\mathrm{Log}(z)}\, e^{\mu\,\mathrm{Log}(z)} = z^\lambda z^\mu.$$

Sen sijaan toinen reaaliselle potenssifunktiolle tuttu kaava **ei päde** yleisesti. Kun $n \in \mathbb{Z}$, on $(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n$ kaikille $z_1 \neq 0$ ja $z_2 \neq 0$. Sen sijaan, kun $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(z_1 z_2)^\lambda \quad \text{ja} \quad z_1^\lambda z_2^\lambda \quad \text{eivät välttämättä ole samat.}$$

ESIMERKKI 1.30. Olkoot $z := -1$, $w := i$ ja $\lambda := \frac{1}{2}$. Koska $\mathrm{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$, on

$$\begin{aligned}(z\,w)^\lambda &= (-i)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}(-i)} = e^{-i\,\frac{\pi}{4}} \\ &= \cos\left(-\tfrac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\tfrac{\pi}{4}\right) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{i}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

[6] "Il nous paraît utile, au moins pour un mathématicien débutant, de réserver l'usage des majuscules pour désigner les déterminations principales de l'argument, du logarithme, et des fonctions associées : par la suite on pourra négliger cette convention." [**12**, §VIII.10]

Toisaalta,

$$\begin{aligned} z^\lambda\, w^\lambda &= (-1)^{1/2}\, i^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}(-1)}\, e^{\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}(i)} = e^{i\,\frac{\pi}{2}}\, e^{i\,\frac{\pi}{4}} = e^{i\,\frac{3\pi}{4}} \\ &= \cos\bigl(\tfrac{3\pi}{4}\bigr) + i\sin\bigl(\tfrac{3\pi}{4}\bigr) \\ &= -\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

1.5. Kompleksitason topologiaa

1.5.1. Peruskäsitteet. Kompleksitason topologian määrittelee euklidinen metriikka

$$d(z,w) := |z-w| = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2},$$

kun $z = x + i\,y$ ja $w = u + i\,v$.

Koska topologian (avoimet joukot) määrää tavallinen euklidinen metriikka, pätevät kaikki yleisen euklidisen avaruuden tulokset myös kompleksitasossa.

Kerrataan joitakin käsitteitä, merkintöjä ja tuloksia.

Kun $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $r > 0$, on[7]

$B(z_0;r) := \{z \in \mathbb{C} \mid \lvert z - z_0\rvert < r\}$	z_0*-keskinen, r-säteinen avoin kiekko*
$\overline{B}(z_0;r) := \{z \in \mathbb{C} \mid \lvert z - z_0\rvert \leqslant r\}$	z_0*-keskinen, r-säteinen suljettu kiekko*
$B^*(z_0;r) := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \lvert z - z_0\rvert < r\}$	z_0*-keskinen, r-säteinen punkteerattu kiekko*
$S(z_0;r) := \{z \in \mathbb{C} \mid \lvert z - z_0\rvert = r\}$	z_0*-keskisen, r-säteisen kiekon reuna*

Muista: Piste a on *joukon $A \subset \mathbb{C}$ sisäpiste*, jos on olemassa $r > 0$ siten, että $B(a;r) \subset A$. *Joukko A on avoin*, jos sen jokainen piste on joukon A sisäpiste. Edelleen, *joukko A on suljettu*, jos sen komplementti $\complement A := \mathbb{C}\backslash A$ on avoin.

Piste $a \in \mathbb{C}$ on *joukon A reunapiste*, merkitään $a \in \partial A$, jos jokaiselle $r > 0$ on

$$B(a;r) \cap A \neq \varnothing \quad \text{ja} \quad B(a;r) \cap \complement A \neq \varnothing.$$

Joukon A sulkeuma on $\overline{A} := A \cup \partial A$.

Jono $(z_n)_{n=1}^\infty$ suppenee kohti pistettä $c \in \mathbb{C}$, merkitään

$$c = \lim_{n\to\infty} z_n \quad \text{tai} \quad z_n \to c, \quad \text{kun } n \to \infty, \quad \text{jos}$$

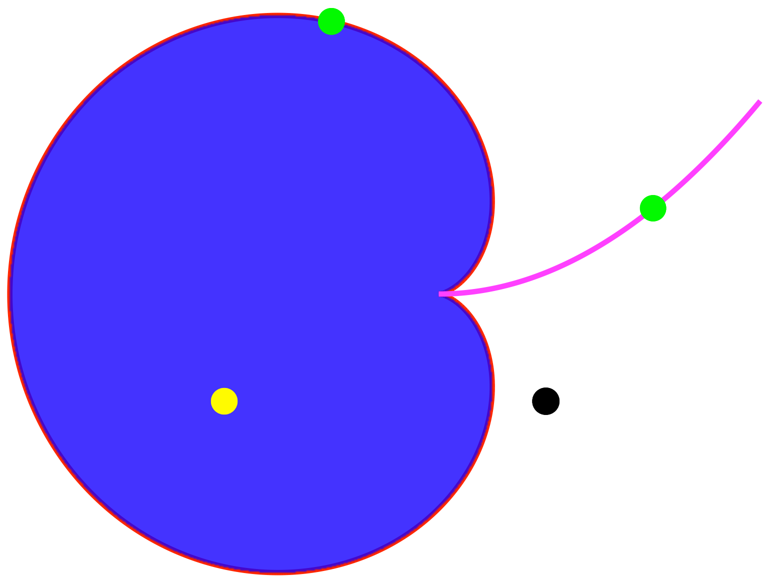
jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$ siten, että

$$|z_n - c| < \varepsilon \quad \text{kaikille } n \in \mathbb{Z}_+, \text{ joille } n \geqslant n_\varepsilon.$$

Jono $(z_n)_{n=1}^\infty$ on *Cauchyn jono*, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$ siten, että

$$|z_n - z_k| < \varepsilon \quad \text{kaikille } n \in \mathbb{Z}_+ \text{ ja } k \in \mathbb{Z}_+, \text{ joille } n \geqslant n_\varepsilon \text{ ja } k \geqslant n_\varepsilon.$$

[7] Yleisessä n-ulotteisessa euklidisessa avaruudessa kiekon tilalla käytetään kolmiulotteisesta avaruudesta lainattua termiä *pallo*. Termi *ympyrä* olisi muuten sopiva, mutta euklidisessa tasogeometriassa ympyrä tarkoittaa ympyrän kehää, ei kehän rajoittamaa aluetta (avointa tai suljettua). Kiekon reunan tilalla voi käyttää nimitystä ympyrän kehä.



Joukko (sininen ja violetti), sen reuna (punainen ja violetti) sekä sisäpiste (keltainen), ulkopiste (musta) ja kaksi reunapistettä (vihreät).

Lause 1.31. *Kompleksitaso* $\mathbb{C}$ *varustettuna euklidisella metriikalla on* täydellinen metrinen avaruus*, t.s. kun* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *on mikä tahansa kompleksitason Cauchyn jono, se suppenee, eli on olemassa piste* $c \in \mathbb{C}$ *siten, että* $z_n \to c$*, kun* $n \to \infty$*.*

Todistus. Jokaiselle $n \in \mathbb{Z}_+$ olkoot $x_n := \operatorname{Re}(z_n)$ ja $y_n := \operatorname{Im}(z_n)$. Tällöin jonot $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ ovat reaaliakselin $\mathbb{R}$ Cauchyn jonoja (miksi?). Koska reaaliakseli on täydellinen (eli sen jokainen Cauchyn jono suppenee), on olemassa luvut $a \in \mathbb{R}$ ja $b \in \mathbb{R}$ siten, että

$$x_n \to a, \quad \text{kun } n \to \infty, \quad \text{ja} \quad y_n \to b, \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Osoitetaan, että $z_n \to c := a + i\,b$, kun $n \to \infty$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa $k_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$ ja $m_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$ siten, että

$$\begin{aligned} |x_n - a| &< \varepsilon/2 \quad \text{kaikille } n \in \mathbb{Z}_+, \text{ joille } n \geqslant k_\varepsilon, \text{ ja} \\ |y_n - b| &< \varepsilon/2 \quad \text{kaikille } n \in \mathbb{Z}_+, \text{ joille } n \geqslant m_\varepsilon. \end{aligned}$$

Olkoon $n_\varepsilon := \max\{k_\varepsilon, m_\varepsilon\}$. Kun $n \geqslant n_\varepsilon$, on

$$\begin{aligned} |z_n - c| &= |x_n - a + i\,(y_n - b)| \leqslant |x_n - a| + |i\,(y_n - b)| \\ &= |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$ □

Käänteinen väite, että jokainen suppeneva kompleksilukujono on Cauchyn jono, on helppo todistaa (HT; tähän ei tarvita reaaliakselin täydellisyyttä).

Lukijan tehtäväksi jätetään osoittaa (Bolzanon ja Weierstrassin lause):[8]
Kun $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *on kompleksitason rajoitettu jono, t.s.* $\sup\{|z_n| \mid n \in \mathbb{Z}_+\} < \infty$*, on jonolla* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *suppeneva osajono, t.s. on olemassa aidosti kasvava positiivisten kokonaislukujen jono* $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ *siten, että jono* $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ *suppenee.*

---

[8] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897), Saksa; Bernhard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781–1848), Böömi.

Ideoita todistukseen: Poimi kompleksilukujonosta reaali- ja imaginaariosat jonoiksi $(x_n)_{n=1}^\infty$ ja $(y_n)_{n=1}^\infty$; osoita, että ne ovat reaaliakselin rajoitettuja jonoja; käytä Bolzanon ja Weierstrassin lausetta **ensin** toiseen jonoon, esimerkiksi reaaliosien muodostamaan jonoon. Näin löydät suppenevan osajonon $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$. Käytä Bolzanon ja Weierstrassin lausetta nyt jäljelle jääneestä konstruoituun osajonoon $(y_{n_k})_{k=1}^\infty$, ja osoita, että tämän jonon osajono antaa alkuperäiselle kompleksilukujonolle etsityn osajonon.

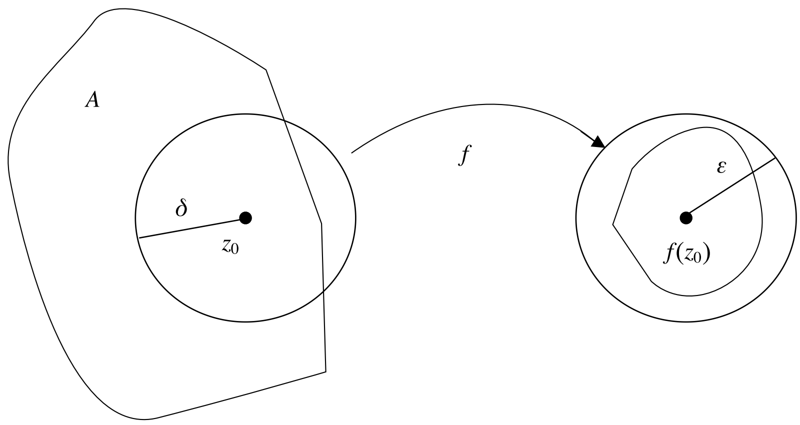
1.5.2. Jatkuvuus. Olkoot $A \subset \mathbb{C}$ annettu joukko, $z_0 \in A$ annettu piste ja $f\colon A \to \mathbb{C}$ annettu funktio. *Funktio f on jatkuva pisteessä* z_0, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta = \delta_{z_0,\varepsilon} > 0$ siten, että

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \text{kaikille } z \in A, \text{ joille } |z - z_0| < \delta.$$

Tälle yhtäpitävää on, että

$$f(A \cap B(z_0;\delta)) \subset B(f(z_0);\varepsilon).$$

Funktio $f\colon A \to \mathbb{C}$ on jatkuva, jos se on jatkuva jokaisessa pisteessä $z_0 \in A$.



Kuvaus $f\colon A \to \mathbb{C}$. Kuvajoukko $f(A \cap B(z_0;\delta))$ sisältyy kiekkoon $B(f(z_0);\varepsilon)$.

Kuten useampiulotteisten euklidisten avaruuksien tilanteessa $f\colon A \to \mathbb{C}$ on jatkuva (pisteessä $z_0 \in A$), jos ja vain jos $\operatorname{Re} f\colon A \to \mathbb{R}$ ja $\operatorname{Im} f\colon A \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia (pisteessä z_0). Sen sijaan funktion f ei tarvitse olla jatkuva pisteessä z_0, vaikka jokainen osittaiskuvaus

$$x \mapsto f(x + i\,y) \quad \text{ja} \quad y \mapsto f(x + i\,y)$$

olisi jatkuva pisteessä z_0. Esimerkkinä tällaisesta tarkastele funktiota f, jolle

$$f(x + i\,y) := \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2 + y^2}, & \text{kun } x + i\,y \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x + i\,y = 0, \end{cases} \qquad \text{ja pistettä } z_0 := 0.$$

Funktion jatkuvuuden selvittämiseen ei myöskään riitä tarkastella *radiaalisia* (eli *säteittäisiä*) *raja-arvoja* $\lim_{t\to 0} f(z_0 + t\,h)$, $h \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Esimerkkinä tällaisesta tarkastele funktiota f, jolle

$$f(x + i\,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2\,y}{x^4 + y^2}, & \text{kun } x + i\,y \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x + i\,y = 0, \end{cases} \qquad \text{ja pistettä } z_0 := 0.$$

Lause 1.32. *Funktio* $f\colon A \to \mathbb{C}$ *on jatkuva pisteessä* $z_0 \in A$*, jos ja vain jos jokaiselle joukon* A *jonolle* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$*, jolle* $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$*, on voimassa*

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0).$$

Todistus. $\Rightarrow$: Olkoon $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ joukon A jono, jolle $z_n \to z_0$, kun $n \to \infty$.
Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta > 0$ siten, että

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \text{kaikille } z \in A, \text{ joille } |z - z_0| < \delta.$$

Valitaan seuraavaksi $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$ siten, että

$$|z_n - z_0| < \delta \quad \text{kaikille } n \in \mathbb{Z}_+, \text{ joille } n \geqslant n_\varepsilon.$$

Kun nyt $n \geqslant n_\varepsilon$, on $z_n \in B(z_0; \delta)$, joten

$$|f(z_n) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$: Tehdään antiteesi: f ei ole jatkuva pisteessä z_0. Tällöin on olemssa $\varepsilon > 0$ siten, että jokaiselle $\delta > 0$ on olemassa $z_\delta \in A$ siten, että $|z_\delta - z_0| < \delta$ ja

$$|f(z_\delta) - f(z_0)| \geqslant \varepsilon.$$

Valitaan erityisesti $\delta := 1/n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin jokaiselle $n \in \mathbb{Z}_+$ löydetään piste $\tilde{z}_n \in A$, jolle $|\tilde{z}_n - z_0| < 1/n$, mutta

$$|f(\tilde{z}_n) - f(z_0)| \geqslant \varepsilon.$$

Tällöin $(\tilde{z}_n)_{n=1}^{\infty}$ olisi joukon A jono, jolle $\lim_{n\to\infty} \tilde{z}_n = z_0$, mutta $f(\tilde{z}_n) \not\to f(z_0)$, kun $n \to \infty$. Tämä on vastoin oletusta, joten antiteesi ei päde. $\square$

Muista: *Funktiolla* $f\colon A \to \mathbb{C}$ *on pisteessä* $z_0 \in \overline{A}$ *raja-arvo* $w_0 \in \mathbb{C}$, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \text{kaikille } z \in A, \text{ joille } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Tälle yhtäpitävää on, että jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$f(A \cap B^*(z_0; \delta)) \subset B(w_0; \varepsilon).$$

Esimerkkejä 1.33. a) Kun $n \in \mathbb{Z}_+$, on potenssifunktio $f\colon z \mapsto z^n$ jatkuva: Käytetään apuna binomikehitelmää

$$(z+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k = z^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k.$$

Tästä saadaan kolmioepäyhtälön avulla

$$|f(z+h) - f(z)| = \Big|\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |z^{n-k}|\,|h^k| = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |z|^{n-k}\,|h|^k.$$

Kun $|h| \leqslant \delta \leqslant 1$, on

$$|f(z+h) - f(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |z|^{n-k} \delta^k = \delta \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |z|^{n-k} \delta^{k-1} \leqslant \delta \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |z|^{n-k}.$$

Funktion f jatkuvuus pisteessä z seuraa tästä helposti.

b) Kompleksinen eksponenttifunktio $f\colon z \mapsto e^z$ on jatkuva. Käytetään apuna edellistä lausetta. Olkoon $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ kompleksilukujono, jolle $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$. Olkoot $x_n := \operatorname{Re} z_n$

ja $y_n := \operatorname{Im} z_n$. Tällöin $x_n \to x_0$ ja $y_n \to y_0$, kun $n \to \infty$. Reaalimuuttujan funktioiden jatkuvuuden nojalla $e^{x_n} \to e^{x_0}$, $\cos y_n \to \cos y_0$ ja $\sin y_n \to \sin y_0$, kun $n \to \infty$, joten tavanomaisten raja-arvolaskusääntöjen nojalla (HT: muotoile ja todista ne kompleksiseen tapaukseen tai kertaa Vektorianalyysistä)

$$e^{z_n} = e^{x_n}\,(\cos y_n + i \sin y_n) \to e^{x_0}\,(\cos y_0 + i \sin y_0) = e^{z_0},$$

kun $n \to \infty$. Näin ollen f on jatkuva pisteessä z_0.

Huomautus 1.34. Yleensä funktio todetaan jatkuvaksi tavanomaisten laskusääntöjen avulla ja "rakentamalla" annettu funktio yksinkertaisista, jatkuvaksi tunnetuista funktioista. Osoitetaan esimerkkinä kompleksinen eksponenttifunktio $f(z) := e^z = e^x\,(\cos y + i \sin y)$ jatkuvaksi pisteessä $z_0 = x_0 + i\,y_0 \in \mathbb{C}$. Projektiot $p_1 \colon x + i\,y \mapsto x$ ja $p_2 \colon x + i\,y \mapsto y$ ovat jatkuvia pisteessä z_0 (HT). Koska reaaliakselin eksponenttifunktio $x \mapsto e^x$ on jatkuva pisteessä x_0, on yhdistetty kuvaus $\exp \circ p_1 \colon x + i\,y \mapsto e^x$ jatkuva pisteessä z_0. Vastaavasti, koska sini ja kosini ovat jatkuvia pisteessä y_0, ovat yhdistetyt kuvaukset $\sin \circ p_2 \colon x + i\,y \mapsto \sin y$ ja $\cos \circ p_2 \colon x + i\,y \mapsto \cos y$ jatkuvia pisteessä z_0. Vakiolla i kertominen säilyttää jatkuvuuden, joten jatkuvien funktioiden summa $x + i\,y \mapsto \cos y + i \sin y$ on jatkuva pisteessä z_0. Kompleksinen eksponenttifunktio on pisteessä z_0 jatkuvien funktioiden $x + i\,y \mapsto e^x$ ja $x + i\,y \mapsto \cos y + i \sin y$ tulona jatkuva pisteessä z_0.

1.5.3. Kuvajoukko ja alkukuva. Funktion $f \colon A \to B$ *kuvajoukko* joukosta $A' \subset A$ on

$$f(A') := \{f(z) \mid z \in A'\}$$

ja joukon $B' \subset B$ *alkukuva* on[9]

$$f^{-1}(B') := \{z \in A \mid f(z) \in B'\}.$$

Funktion $f \colon A \to \mathbb{C}$ jatkuvuus pisteessä $z_0 \in A$ voidaan ilmaista seuraavissa yhtäpitävissä muodoissa (HT: osoita ehdot yhtäpitäviksi):

(i) jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ kaikille $z \in A$, joille $|z - z_0| < \delta$;

(ii) jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että $f(A \cap B(z_0;\delta)) \subset B(f(z_0);\varepsilon)$;

(iii) jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että $A \cap B(z_0;\delta) \subset f^{-1}(B(f(z_0);\varepsilon))$.

Lause 1.35. *Funktio $f \colon A \to \mathbb{C}$ on jatkuva, jos ja vain jos jokaisen avoimen joukon $V \subset \mathbb{C}$ alkukuva $f^{-1}(V)$ on* avoin joukon A suhteen, *t.s. jos ja vain jos $f^{-1}(V)$ on muotoa $f^{-1}(V) = A \cap U$ jollekin avoimelle joukolle U.*

Todistus. $\Leftarrow$: Oletetaan, että jokaiselle avoimelle joukolle $V \subset \mathbb{C}$ alkukuva $f^{-1}(V)$ on avoin joukon A suhteen. Osoitetaan, että f on jatkuva.

---

[9]Kirjoittajan mielestä on harmillistä, että kuvajoukon ja alkukuvan merkinnät ovat vakiintuneet tässä käytettävään muotoon. Kuvajoukolle parempi olisi $f^{\rightarrow}(A')$ ja alkukuvalle $f^{\leftarrow}(B')$. Vakiintuneiden merkintöjen kohdalla $f(Z)$ voi tarkoittaa kahta eri asiaa riippuen siitä, onko Z piste vai joukko: $f(Z)$ on funktion arvo pisteessä Z tai joukon Z kuvajoukko. Tilanne on vielä pahempi alkukuvan kohdalla: $f^{-1}(W)$ on joukolle W aina olemassa oleva joukon W alkukuva. Pisteelle W merkintä $f^{-1}(W)$ voi tarkoittaa yksipisteisen joukon $\{W\}$ alkukuvaa tai, jos funktio f on bijektio, pisteen W kuvapistettä kuvauksessa f^{-1}. Kun käyttöön otettaisiin merkinnät $f^{\rightarrow}(Z)$ ja $f^{\leftarrow}(W)$ tällaiset monitulkintaisuudet eivät olisi mahdollisia.

Olkoot $z_0 \in A$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin $V := B(f(z_0); \varepsilon)$ on avoin. Oletuksen nojalla on olemassa avoin joukko U siten, että $f^{-1}(V) = A \cap U$. Koska $f(z_0) \in V$, on $z_0 \in f^{-1}(V) = A \cap U$. Erityisesti $z_0 \in U$. Koska U on avoin, on olemassa $\delta > 0$ siten, että $B(z_0; \delta) \subset U$. Tällöin $A \cap B(z_0; \delta) \subset A \cap U = f^{-1}(V) = f^{-1}(B(f(z_0); \varepsilon))$. Lausetta edeltäneen jatkuvuuskarakterisaation nojalla f on jatkuva pisteessä z_0.

$\Rightarrow$: Kääntäen, oletetaan, että f on jatkuva. Olkoon $V \subset \mathbb{C}$ avoin. Osoitetaan, että alkukuva $f^{-1}(V)$ on avoin joukon A suhteen.

Olkoon $a \in f^{-1}(V)$. Tällöin $f(a) \in V$. Koska V on avoin, on olemassa $r_a > 0$ siten, että $B(f(a); r_a) \subset V$. Koska f on jatkuva pisteessä a, on olemassa $\delta_a > 0$ siten, että $f(A \cap B(a; \delta_a)) \subset B(f(a); r_a)$. Tällöin $A \cap B(a; \delta_a) \subset f^{-1}(B(f(a); r_a)) \subset f^{-1}(V)$.

Siis: jokaiselle $a \in f^{-1}(V)$ on olemassa $\delta_a > 0$ siten, että $A \cap B(a; \delta_a) \subset f^{-1}(V)$. Tällöin, kun asetetaan $U := \bigcup_{a \in f^{-1}(V)} B(a; \delta_a)$, on U avoin ja

$$A \cap U = \bigcup_{a \in f^{-1}(V)} (A \cap B(a; \delta_a)) \subset f^{-1}(V).$$

Toisaalta, $\{a\} \subset A \cap B(a; \delta_a)$, joten

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{a \in f^{-1}(V)} \{a\} \subset \bigcup_{a \in f^{-1}(V)} (A \cap B(a; \delta_a)) = A \cap U.$$

Siis $A \cap U = f^{-1}(V)$. Tämä tarkoittaa, että alkukuva $f^{-1}(V)$ on avoin joukon A suhteen. □

Huomautus. Edellistä todistusta olisi voinut hieman yksinkertaistaa määrittelemällä aluksi: *Piste a on joukon W sisäpiste joukon A suhteen*, jos on olemassa $r > 0$ siten, että *joukon A piste a-keskinen, r-säteinen kiekko*

$$B_A(a; r) := \{z \in A \mid |z - a| < r\} = A \cap B(z; r) \subset W.$$

Tämän jälkeen voidaan osoittaa (oleellisesti edellisen todistuksen loppuosa), että joukko $W = f^{-1}(V)$ on avoin joukon A suhteen, jos ja vain jos joukon W jokainen piste joukon W sisäpiste joukon A suhteen.

1.5.4. Yhtenäisyys.

Määritelmä 1.36 (Yhtenäisyys). *Joukko $A \subset \mathbb{C}$ on epäyhtenäinen*, jos on olemassa joukot $U \subset \mathbb{C}$ ja $V \subset \mathbb{C}$ siten, että

(i) U ja V ovat avoimia;
(ii) $A \cap U \neq \varnothing$ ja $A \cap V \neq \varnothing$;
(iii) $A \cap U \cap V = \varnothing$; ja
(iv) $A \subset U \cup V$.

Joukko A on yhtenäinen, jos se ei ole epäyhtenäinen.

Huomautus 1.37. Ehdot (i)–(iv) ovat yhtäpitäviä ehtojen (i), (ii), (iii′) ja (iv) kanssa, missä

(iii′) $U \cap V = \varnothing$.

Esimerkkejä 1.38. a) Jokainen polkuyhtenäinen joukko on yhtenäinen. Muista: *joukko A on polkuyhtenäinen*, jos kaikille $z_0 \in A$ ja $z_1 \in A$ on olemassa polku (eli kompaktilla välillä määritelty jatkuva kuvaus) $\gamma \colon [a, b] \to A$ siten, että $\gamma(a) = z_0$ ja $\gamma(b) = z_1$. (Todistus HT. Vihje: Tee antiteesi: On olemassa polkuyhtenäinen joukko, joka on epäyhtenäinen. Valitse määritelmän jaon joukoista U ja V pisteet $z_0 \in U$ ja $z_1 \in V$. Aseta $t_0 := \sup\{t \in [a,b] \mid \gamma(t) \in U\}$. Tarkastele pistettä $\gamma(t_0)$.)

b) Koko kompleksitaso on polkuyhtenäinen; pisteitä z_0 ja z_1 yhdistäväksi poluksi käy *janapolku* $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := (1-t)\, z_0 + t\, z_1$. Kompleksitaso on siis yhtenäinen.

c) Jokainen konveksi joukko on polkuyhtenäinen, joten sellainen on myös yhtenäinen. Muista: *joukko A on konveksi*, jos kaikille $z_0 \in A$ ja $z_1 \in A$ niitä yhdistävä jana $\{(1-t)\, z_0 + t\, z_1 \mid t \in [0,1]\}$ sisältyy joukkoon A. Pisteitä z_0 ja z_1 yhdistäväksi poluksi käy janapolku $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := (1-t)\, z_0 + t\, z_1$.

d) Jokainen kiekko $B(a;r)$ ja $\overline{B}(a;r)$ on konveksi (HT), joten kiekot ovat yhtenäisiä.

e) Joukko $A := \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}$ on epäyhtenäinen. Määritelmässä voidaan valita $U := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ ja $V := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < 0\}$.

Lause 1.39. *Olkoot A_j, $j \in J$, yhtenäisiä joukkoja.*
Jos $\bigcap_{j\in J} A_j \neq \varnothing$, niin $\bigcup_{j\in J} A_j$ yhtenäinen.

Todistus. Olkoon $A := \bigcup_{j\in J} A_j$.
Tehdään antiteesi: A on epäyhtenäinen.
Olkoot U ja V avoimet joukot kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä.
Koska

$$\varnothing = A \cap U \cap V = \bigcup_{j\in J} (A_j \cap U \cap V),$$

on $A_j \cap U \cap V = \varnothing$ kaikille $j \in J$.

Olkoon $z_0 \in \bigcap_{j\in J} A_j$. Koska $A \subset U \cup V$ ja $A \cap U \cap V = \varnothing$, on joko $z_0 \in A \cap U$ tai $z_0 \in A \cap V$. Oletetaan, että $z_0 \in A \cap U$. Tällöin $z_0 \in A_j \cap U$ kaikille $j \in J$.

Koska jokainen $A_j \subset A \subset U \cup V$ ja A_j on yhtenäinen, on oltava $V \cap A_j = \varnothing$.

Ehdosta $A \cap V \neq \varnothing$ seuraa kuitenkin $\bigcup_{j\in J}(A_j \cap V) \neq \varnothing$, joten jokin $A_{j_0} \cap V \neq \varnothing$. Tämä on ristiriita edellisen kanssa. □

Lause 1.40. *Olkoon $f\colon A \to \mathbb{C}$ jatkuva ja A yhtenäinen. Tällöin kuvajoukko $f(A)$ on yhtenäinen.*

Todistus. Jätetään lukijan tehtäväksi. □

Määritelmä 1.41. *Pisteitä $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $z_1 \in \mathbb{C}$ yhdistävä jana* on

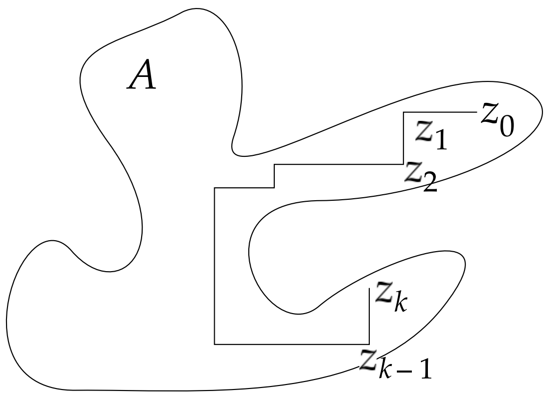
$$J(z_0, z_1) := \{(1-t)\, z_0 + t\, z_1 \mid t \in [0,1]\}.$$

Jana $J(z_0, z_1)$ on koordinaatiston suuntainen, jos $\mathrm{Re}\, z_0 = \mathrm{Re}\, z_1$ tai $\mathrm{Im}\, z_0 = \mathrm{Im}\, z_1$.
Pistejonon $(z_0, z_1, \ldots, z_k)$ määräämä murtoviiva on

$$M(z_0, z_1, \ldots, z_k) := J(z_0, z_1) \cup J(z_1, z_2) \cup \cdots \cup J(z_{k-1}, z_k).$$

Murtoviiva $M(z_0, z_1, \ldots, z_k)$ on koordinaatiston suuntainen, jos sen jokainen jana $J(z_j, z_{j+1})$, $j \in \{0, \ldots, k-1\}$, on koordinaatiston suuntainen.
Murtoviiva $M = M(z_0, z_1, \ldots, z_k)$ on *joukon $A \subset \mathbb{C}$ murtoviiva*, jos $M \subset A$.

Määritelmä 1.42. *Joukko $A \subset \mathbb{C}$ on murtoviivayhtenäinen*, jos kaikille $z' \in A$ ja $z'' \in A$ on olemassa murtoviiva $M(z_0, z_1, \ldots, z_k)$ siten, että $z' = z_0$, $z'' = z_k$ ja $M(z_0, z_1, \ldots, z_k) \subset A$.



Koordinaatiston suuntainen, pistejonon $(z_0, z_1, \dots, z_k)$ määräämä murtoviiva.

Huomaa, että murtoviivayhtenäinen joukko A on polkuyhtenäinen. Kun pisteille $z' \in A$ ja $z'' \in A$ valitaan murtoviiva $M(z_0, z_1, \dots, z_k)$ siten, että $z' = z_0$, $z'' = z_k$ ja $M(z_0, z_1, \dots, z_k) \subset A$, voidaan määritellä joukon A polku $\gamma \colon [0, k] \to A$ asettamalla $\gamma(t) := (1 - (t - j))\, z_j + (t - j)\, z_{j+1}$, kun $t \in [j, j + 1]$ ja $j \in \{0, \dots, k - 1\}$.

Määritelmä 1.43. Yhtenäinen avoin joukko on *alue*.

Lause 1.44. *Avoimelle joukolle $D \subset \mathbb{C}$ seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(i) *D on alue;*
(ii) *D on polkuyhtenäinen;*
(iii) *D on murtoviivayhtenäinen.*

Jos D on alue, on kaikille $z' \in D$ ja $z'' \in D$ olemassa koordinaatiston suuntainen murtoviiva $M(z_0, z_1, \dots, z_k)$ siten, että $z' = z_0$, $z'' = z_k$ ja $M(z_0, z_1, \dots, z_k) \subset D$.

Todistus. Jos mitkä tahansa kaksi pistettä $z' \in D$ ja $z'' \in D$ voidaan yhdistää koordinaatiston suuntaisella murtoviivalla, on D murtoviivayhtenäinen ja tällöin myös polkuyhtenäinen.

Lukijan tehtäväksi jätetään osoittaa implikaatio (ii)$\Rightarrow$(i).

Todistetaan viimeinen väite (i)$\Rightarrow$(iii).

Kiinitetään $z_0 \in D$, ja asetetaan

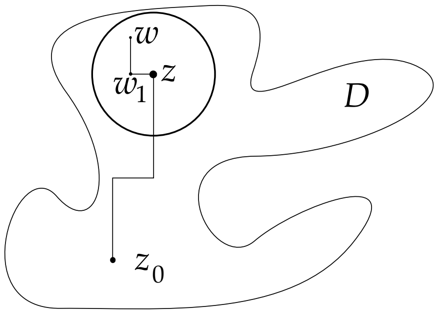
$$U := \{z \in D \mid \text{on olemassa koordinaatiston suuntainen joukon } D \text{ murtoviiva } M(z_0, z_1, \dots, z_k), \text{ missä } z_k = z\}.$$

Selvästi $z_0 \in U$, joten $U \neq \emptyset$.

Osoitetaan, että U ja $V := D \backslash U$ ovat avoimia. Koska $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = D$, $U \neq \emptyset$ ja D on yhtenäinen, on oltava $V = \emptyset$, mikä tarkoittaa, että D on murtoviivayhtenäinen vieläpä niin, että pisteitä yhdistäviksi murtoviivoiksi voidaan valita koordinaatiston suuntaisia murtoviivoja.

U on avoin: Olkoon $z \in U$. Joukon U määritelmän nojalla on olemassa koordinaatiston suuntainen joukon D murtoviiva $M := M(z_0, z_1, \dots, z_k)$, missä $z_k = z$. Koska $z \in D$ ja D on avoin, on olemassa $r > 0$ siten, että $B := B(z; r) \subset D$. Osoitetaan, että $B \subset U$ (jolloin jokainen joukon U piste on sen sisäpiste, ja U näin avoin). Tätä varten olkoon $w \in B$. Olkoon $w_1 := z + \operatorname{Re}(w - z)$ (katso kuvaa).

Murtoviiva $J(z, w_1) \cup J(w_1, w)$ on koordinaatiston suuntainen ja sisältyy kiekkoon B, joten $M \cup J(z, w_1) \cup J(w_1, w)$ on pisteitä z_0 ja w yhdistävä joukon D koordinaatiston suuntainen murtoviiva. Tästä seuraa, että $w \in U$.

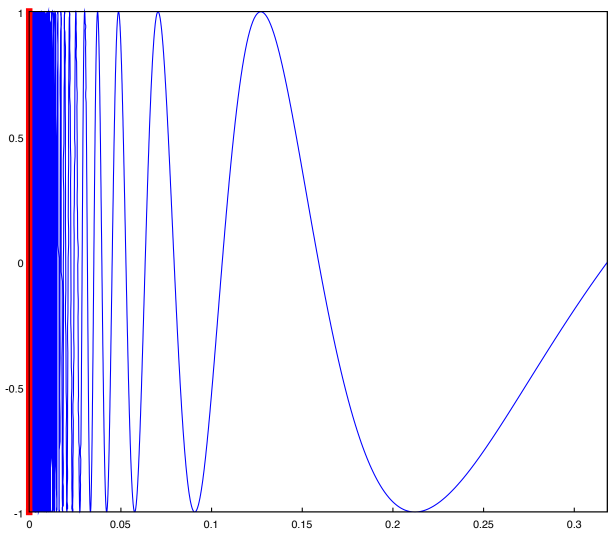


Koordinaatiston suuntainen joukon D murtoviiva $M(z_0, z_1, \ldots, z_{k-1}, z, w_1, w)$.

$V = D \backslash U$ *on avoin*: Jos $z \in V$, on olemassa $r > 0$ siten, että $B := B(z; r) \subset D$. Tällöin $B \subset V$. Muussa tapauksessa on olemassa piste $w \in B \cap U$. Kuten edellä nyt löydettäisiin pisteitä z_0 ja z yhdistävä joukon D koordinaatiston suuntainen murtoviiva (yhdistä piste z_0 ensin pisteeseen w ja sitten w pisteeseen z). Tämä kuitenkin tarkoittaisi, että $z \in U$, mikä on vastoin pisteen z valintaa. Näin ollen $B \subset V$, ja V on avoin. $\square$

Esimerkit joukoista, jotka ovat yhtenäisiä, mutta eivät polkuyhtenäisiä, eivät ole yksinkertaisia. Standardiesimerkki tällaisesta on ns. *topologin sinikäyrä*: [10]

$$S := \{i\, y \in \mathbb{C} \mid y \in [-1, 1]\} \cup \{x + i \sin \tfrac{1}{x} \mid x > 0\}.$$



Topologin sinikäyrä.

Esimerkkinä yhtenäisyyden käytöstä todistetaan:

[10] Serge Lang (1927–2005; Ranska ja USA) sanoo kirjassaan *Real and functional analysis* (kolmas laitos, Graduate Texts in Mathematics 142, Springer-Verlag, 1993) "... the sort of pathology which arises from $\sin(1/x)$ is just that: pathology."

Lause 1.45 (Rajanylityslause). *Olkoot $A \subset \mathbb{C}$ ja $C \subset \mathbb{C}$ yhtenäinen. Jos C kohtaa joukon A ja sen komplementin $\mathbb{C} \setminus A$, joukko C kohtaa myös reunan ∂A.*

Todistus. Olkoot U joukon A sisäpisteiden joukko ja V joukon A ulkopisteiden joukko (eli joukon $\mathbb{C} \setminus A$ sisäpisteiden joukko). Tällöin U ja V ovat avoimia, $U \cap V = \varnothing$ ja $U \cup V \cup \partial A = \mathbb{C}$. Antiteesi: C ei kohtaa reunaa ∂A eli $C \cap \partial A = \varnothing$. Tällöin on $C \subset U \cup V$. Lisäksi $U \cap C \neq \varnothing$ (koska $A \subset U \cup \partial A$ ja $C \cap A \neq \varnothing$) ja $V \cap C \neq \varnothing$ (koska $\mathbb{C} \setminus A \subset V \cup \partial A$ ja $C \cap (\mathbb{C} \setminus A) \neq \varnothing$). Tällöin C ei kuitenkaan olisi yhtenäinen. □

1.5.5. Yhtenäisyyskomponentit. Olkoon $A \subset \mathbb{C}$. Pisteille $z_0 \in A$ ja $z_1 \in A$ määritellään relaatio $z_0 \sim z_1$ (tai tarkemmin merkittynä $z_0 \sim_A z_1$), jos on olemassa yhtenäinen joukko $C \subset A$ siten, että $z_0 \in C$ ja $z_1 \in C$.

Relaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio, t.s. kaikille pisteille $z_0 \in A$, $z_1 \in A$ ja $z_2 \in A$

(i) $z_0 \sim z_0$ (refleksiivisyys; valitse $C := \{z_0\}$);
(ii) jos $z_0 \sim z_1$, niin $z_1 \sim z_0$ (symmetrisyys; relaation $\sim$ määritelmä on symmetrinen pisteiden z_0 ja z_1 suhteen);
(iii) jos $z_0 \sim z_1$ ja $z_1 \sim z_2$, niin $z_0 \sim z_2$ (transitiivisuus; valitse yhtenäiset C_1 ja C_2, joille $z_0 \in C_1$, $z_1 \in C_1$, $z_1 \in C_2$ ja $z_2 \in C_2$; koska $z_1 \in C_1 \cap C_2$, lauseen 1.39 nojalla $C := C_1 \cup C_2$ on yhtenäinen, jolle $z_0 \in C$ ja $z_2 \in C$).

Määritelmä 1.46. Joukon A *pisteen z_0 määräämä (yhtenäisyys-)komponentti* on pisteen z_0 ekvivalenssiluokka $[z_0] = [z_0]_A$ ekvivalenssirelaation $\sim_A$ suhteen.

Muista: Minkä tahansa ekvivalenssirelaation $\sim$ ekvivalenssiluokille on voimassa

(i) jokainen ekvivalenssiluokka $[z] \neq \varnothing$;
(ii) keskenään eri ekvivalenssiluokat ovat pistevieraat: joko $[z] = [w]$ (jos $z \sim w$) tai $[z] \cap [w] = \varnothing$ (jos $z \not\sim w$);
(iii) ekvivalenssiluokkien yhdiste on koko perusjoukko: $\bigcup_{z \in A} [z] = A$.

Joukon $A \subset \mathbb{C}$ yhtenäisyyskomponentit C_j, $j \in J$, muodostavat siis joukolle A *osituksen*: niiden yhdiste on A, ja kaksi eri yhtenäisyyskomponenttia ovat keskenään pistevieraat. Tässä indeksijoukko J voidaan ajatella muodostettavan pisteistä $z \in A$ seuraavasti: jokaisesta yhtenäisyyskomponentista C valitaan täsmälleen yksi edustaja $z_C \in A$. Nämä edustajat muodostavat indeksijoukon

$$J := \{z_C \mid C \text{ on } A\text{:n yhtenäisyyskomponentti}\}.$$

Vaihtoehtoisesti $J := A/\sim_A$ = kaikkien ekvivalenssiluokkien joukko ja indeksejä ovat ekvivalenssiluokat $j = [z]$.

Pisteiden määräämillä yhtenäisyyskomponenteilla on seuraava suoraan määritelmästä saatava maksimaalisuusominaisuus:

Lause 1.47. *Olkoot $A \subset \mathbb{C}$ ja $C \subset A$. Jos C on yhtenäinen ja $z_0 \in C$, on $C \subset [z_0]_A$ (= pisteen z_0 yhtenäisyyskomponentti joukon A suhteen).* □

Lauseen tulosta käytetään toisinaan määrittelemään pisteen z_0 yhtenäisyyskomponentti seuraavasti ("pisteen z_0 yhtenäisyyskomponentti joukon A suhteen on joukon A laajin yhtenäinen, pisteen z_0 sisältävä osajoukko"): Joukko C' on pisteen z_0 yhtenäisyyskomponentti joukon A suhteen, jos ja vain jos

(i) $C' \subset A$;

(ii) $z_0 \in C'$;
(iii) C' on yhtenäinen; ja
(iv) jos C toteuttaa vastaavat ehdot (i)–(iii) kuin C', niin $C \subset C'$.

LAUSE 1.48. *Avoimen joukon $G \subset \mathbb{C}$ yhtenäisyyskomponentit ovat avoimia.*

TODISTUS. Tehdään antiteesi: Joukolla G on ei-avoin yhtenäisyyskomponentti C. Olkoon C pisteen z_0 määräämä yhtenäisyyskomponentti.

Koska C ei ole avoin, on olemassa $z \in C$ siten, että $B(z; r) \not\subset C$ millekään $r > 0$

Koska G on avoin ja $z \in G$, on olemassa $\varrho > 0$ siten, että $B(z; \varrho) \subset G$.

Koska C ja $B(z; \varrho)$ ovat yhtenäisiä ja $z \in C \cap B(z; \varrho)$, on $C \cup B(z; \varrho)$ yhtenäinen (lause 1.39). Edellisen lauseen nojalla $C \cup B(z; \varrho) \subset [z_0]_G = C$, jolloin $B(z; \varrho) \subset C$. Tehdyn antiteesin nojalla pitäisi kuitenkin olla $B(z; \varrho) \not\subset C$. $\square$

LUKU 2

Holomorfiset funktiot

Matemaattisen analyysin, reaalisen ja kompleksisen, kekskeisiä ongelmia on selvittää funktioiden käyttäytymistä derivaatan ja integraalin avulla. Tässä luvussa tarkastellaan kompleksimuuttujan kompleksiarvoisen funktion derivaattaa.

2.1. Kompleksinen derivaatta

MÄÄRITELMÄ 2.1. Olkoot $G \subset \mathbb{C}$ avoin joukko, $z_0 \in G$ ja $f\colon G \to \mathbb{C}$ annettu funktio. Sanotaan, että *funktiolla f on pisteessä z_0 kompleksinen derivaatta* tai että *funktio f on kompleksisesti differentioituva pisteessä z_0*, jos raja-arvo

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

on olemassa. Jos f on kompleksisesti differentioituva pisteessä z_0, merkitään

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

ja sanotaan, että $f'(z_0)$ on *funktion f kompleksinen derivaatta pisteessä z_0*.

Jos funktiolla f on kompleksinen derivaatta **avoimen** joukon G jokaisessa pisteessä sanotaan, että *funktio f on holomorfinen joukossa G*.[2]

Kompleksisen derivaatan olemassaololle yhtäpitävää on, että raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

on olemassa. Tässä raja-arvon muodossa tärkeää on, että muuttujan h pitää voida lähestyä nolla miten tahansa, t.s. sen ”liikkumista” ei saa rajata millekään käyrälle tai kokoelmalle käyriä, esimerkiksi koordinaattiakseleille ja origon kautta kulkeville suorille.

Kompleksisen derivaatan ja differentioituvuuden käsittelemiseksi usein hyödyllinen on seuraava ehto: *Funktio f on kompleksisesti differentioituva pisteessä z_0, jos ja vain jos on olemassa luku $c \in \mathbb{C}$ ja origon jossakin ympäristössä $B(0; r)$ määritelty funktio E siten, että*

$$(\mathbb{C}\mathrm{D}) \qquad f(z_0 + h) = f(z_0) + c\,h + E(h) \quad \textit{ja} \quad \frac{E(h)}{|h|} \to 0, \quad \textit{kun } h \to 0,$$

Lisäksi, jos ehto ($\mathbb{C}$D) *toteutuu, on $f'(z_0) = c$.*

---

[1]Viimeksi muutettu 4.1.2020.

[2]Nimityksen holomorfinen sijasta käytetään usein nimitystä *analyyttinen funktio*. Tämä nimitys varataan kuitenkin toiseen käyttöön kurssille $\mathbb{C}$An2.

TODISTUS. $\Rightarrow$: Oletetaan, että $f'(z_0)$ on olemassa. Olkoon $r > 0$ siten, että $B(z_0; r) \subset G$. Määritellään

$$E(h) := \begin{cases} f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0)\, h, & \text{kun } 0 < |h| < r, \text{ ja} \\ 0, & \text{kun } h = 0. \end{cases}$$

Tällöin $f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)\, h + E(h)$, kun $|h| < r$, ja

$$\Big|\frac{E(h)}{|h|}\Big| = \Big|\frac{E(h)}{h}\Big| = \Big|\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0)\Big| \to 0, \quad \text{kun } h \to 0.$$

Siis ehto ($\mathbb{C}$D) toteutuu, kun $c := f'(z_0)$.

$\Leftarrow$: Kääntäen, yhtälöstä ($\mathbb{C}$D) saadaan

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = c + \frac{E(h)}{h} \to c, \quad \text{kun } h \to 0,$$

joten $f'(z_0)$ on olemassa ja $= c$. □

ESIMERKKI 2.2. Funktio $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := z^2$, on holomorfinen ja $f'(z) = 2z$ kaikille $z \in \mathbb{C}$. Nimittäin, $f(z + h) = (z + h)^2 = z^2 + 2z\, h + h^2 = f(z) + c\, h + E(h)$, kun $c := 2z$ ja $E(h) := h^2$. Funktiolle E on voimassa $\big|E(h)/|h|\big| = |h^2/|h|| = |h| \to 0$, kun $h \to 0$, joten väite seuraa ehdosta ($\mathbb{C}$D).

Yleisemmin, olkoon $f(z) := z^n$, missä $n \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin f on holomorfinen ja $f'(z) = n\, z^{n-1}$ kaikille $z \in \mathbb{C}$. Käytetään apuna binomikehitelmää

$$(z + h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k}\, h^k = z^n + n\, z^{n-1}\, h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k}\, h^k.$$

Saatu kehitelmä on muotoa ($\mathbb{C}$D), missä $c := n\, z^{n-1}$ ja

$$E(h) := \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k}\, h^k = h^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k}\, h^{k-2}.$$

Kun $|h| < 1$, on

$$\Big|\frac{E(h)}{|h|}\Big| \leqslant |h| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \big|z^{n-k}\, h^{k-2}\big|. \leqslant |h| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \big|z^{n-k}\big| \to 0,$$

kun $h \to 0$.

ESIMERKKI 2.3. Funktio $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \overline{z}$, ei ole kompleksisesti differentioituva missään pisteessä. Funktion f erotusosamäärä pisteessä z on

$$\frac{f(z + h) - f(z)}{h} = \frac{\overline{z + h} - \overline{z}}{h} = \frac{\overline{h}}{h} = \begin{cases} 1, \text{kun } h > 0, \text{ ja} \\ -1, \text{kun } h = i\, t, \text{ missä } t > 0. \end{cases}$$

Tästä seuraa, että funktion f erotusosamäärällä ei ole raja-arvoa, kun $h \to 0$, joten f ei ole kompleksisesti differentioituva pisteessä z.

LAUSE 2.4. *Jos funktio f on kompleksisesti differentioituva pisteessä $z_0 \in G$, niin f on jatkuva pisteessä z_0.*

TODISTUS. Jätetään lukijan tehtäväksi. □

Lause 2.5 (Derivointisääntöjä). *Olkoot $G \subset \mathbb{C}$ avoin joukko, $z_0 \in G$, $\lambda \in \mathbb{C}$ vakio ja $f\colon G \to \mathbb{C}$ ja $g\colon G \to \mathbb{C}$ pisteessä z_0 kompleksisesti differentioituvia funktioita. Tällöin λf, $f+g$ ja $f\,g$ ovat kompleksisesti differentioituvia pisteessä z_0. Jos lisäksi $g(z_0) \neq 0$, on $\frac{f}{g}$ kompleksisesti differentioituvia pisteessä z_0.*

Lisäksi

(i) $(\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0)$

(ii) $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$

(iii) $(f\,g)'(z_0) = f'(z_0)\,g(z_0) + f(z_0)\,g'(z_0)$

(iv) $\displaystyle\Big(\frac{f}{g}\Big)'(z_0) = \frac{f'(z_0)\,g(z_0) - f(z_0)\,g'(z_0)}{g(z_0)^2}$

Todistus. Todistetaan malliksi kohta (iii). Käytetään apuna kehitelmää ($\mathbb{C}$D):

$$f(z_0+h) = f(z_0) + c_f\,h + E_f(h) \quad \text{ja} \quad g(z_0+h) = g(z_0) + c_g\,h + E_g(h),$$

missä $c_f = f'(z_0)$, $c_g = g'(z_0)$, $E_f(h)/h \to 0$ ja $E_g(h)/h \to 0$, kun $h \to 0$.

Näiden avulla tulolle saadaan

$$\begin{aligned} f(z_0+h)\,g(z_0+h) &= f(z_0)\,g(z_0) + c_f\,g(z_0)\,h + E_f(h)\,g(z_0) \\ &\quad + f(z_0)\,c_g\,h + c_f\,c_g\,h^2 + E_f(h)\,c_g\,h \\ &\quad + f(z_0)\,E_g(h) + c_f\,h\,E_g(h) + E_f(h)\,E_g(h) \\ &= f(z_0)\,g(z_0) + c_f\,g(z_0)\,h + f(z_0)\,c_g\,h + E(h), \end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned} E(h) := E_f(h)\,g(z_0) &+ c_f\,c_g\,h^2 + E_f(h)\,c_g\,h \\ &+ f(z_0)\,E_g(h) + c_f\,h\,E_g(h) + E_f(h)\,E_g(h). \end{aligned}$$

Lukijan tehtäväksi jätetään osoittaa, että $E(h)/h \to 0$, kun $h \to 0$. Kehitelmän ($\mathbb{C}$D) nojalla tulo $f\,g$ on kompleksisesti differentioituva pisteessä z_0 ja

$$(f\,g)'(z_0) = c_f\,g(z_0) + f(z_0)\,c_g. \qquad \square$$

Esimerkkejä 2.6. a) Jokainen polynomi $p(z) = a_n\,z^n + a_{n-1}\,z^{n-1} + \cdots + a_1\,z + a_0$, missä $n \in \mathbb{N}$ ja jokainen $a_j \in \mathbb{C}$, on kompleksisesti differentioituva koko kompleksitasossa ja sen derivaatalle on voimassa tavanomainen polynomin derivointikaava.

b) Kun $q(z) = b_m\,z^m + b_{m-1}\,z^{m-1} + \cdots + b_1\,z + b_0$ on toinen polynomi, $N := \{z \in \mathbb{C} \mid q(z) = 0\}$ ja $f\colon \mathbb{C}\backslash N \to \mathbb{C}$, $f(z) := p(z)/q(z)$, on f osamäärän derivointisäännön nojalla kompleksisesti differentioituva kaikissa pisteissä $z \in \mathbb{C}\backslash N$ ja sen derivaatta saadaan tavanomaisella osamäärän derivointikaavalla.

c) Olkoot $D := \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ ja $f\colon D \to \mathbb{C}$,

$$f(z) := \sqrt{z} = \sqrt{|z|}\,e^{i\,\mathrm{Arg}(z)/2}.$$

Määritelmän 1.15 kaavan nojalla f on jatkuva jokaisessa pisteessä $z \in D$. Erotusosamäärälle pisteessä $z_0 \in D$ saadaan

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\sqrt{z} - \sqrt{z_0}}{z - z_0} = \frac{\sqrt{z} - \sqrt{z_0}}{(\sqrt{z} - \sqrt{z_0})\,(\sqrt{z} + \sqrt{z_0})} = \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{z_0}} \to \frac{1}{2\sqrt{z_0}},$$

kun $z \to z_0$. Siis f on kompleksisesti differentioituva pisteessä z_0 ja $f'(z_0) = 1/(2\sqrt{z_0})$.

Lause 2.7 (Ketjusääntö). *Olkoot $G \subset \mathbb{C}$ ja $G' \subset \mathbb{C}$ avoimia joukkoja, $z_0 \in G$, $f\colon G \to \mathbb{C}$ ja $g\colon G' \to \mathbb{C}$ annettuja funktioita. Oletetaan, että*

(i) *$f(G) \subset G'$;*
(ii) *f on kompleksisesti differentioituvia pisteessä z_0; ja*
(iii) *g on kompleksisesti differentioituvia pisteessä $w_0 := f(z_0)$.*

Tällöin $g \circ f$ on kompleksisesti differentioituva pisteessä z_0 ja

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0).$$

Todistus. Kehitelmän ($\mathbb{C}$D) nojalla

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = f'(x_0)\, h + E_f(h) \quad \text{ja} \quad g(w_0 + k) - g(w_0) = g'(w_0)\, k + E_g(k),$$

missä $E_f(h)/h \to 0$, kun $h \to 0$, ja $E_g(k)/k \to 0$, kun $k \to 0$.

Asetetaan $k := f(z_0 + h) - f(z_0) = f'(z_0)\, h + E_f(h)$. Tällöin

$$|k| \leqslant |f'(z_0)|\, |h| + |E_f(h)|$$

ja $w_0 + k = f(z_0 + h)$, joten

$$(g \circ f)(z_0 + h) - (g \circ f)(z_0) = g'(w_0)\, f'(x_0)\, h + E_{g\circ f}(h)$$

missä

$$E_{g\circ f}(h) := g'(w_0)\, E_f(h) + E_g(k)$$

toteuttaa ehdon $E_{g\circ f}(h)/h \to 0$, kun $h \to 0$. Ensimmäisen termin osalta tämä on selvää. Termiä $E_g(k)$ varten valitaan aluksi $\delta_1 > 0$ siten, että $\delta_1 \leqslant 1$ ja $|E_f(h)/h| \leqslant 1$, kun $0 < |h| \leqslant \delta_1$. Tällöin $|k/h| \leqslant |f'(z_0)| + |E_f(h)/h| \leqslant |f'(z_0)| + 1$. Koska f on jatkuva pisteessä z_0, on $k = f(z_0 + h) - f(z_0) \to 0$, kun $h \to 0$. Siis

$$\Big|\frac{E_g(k)}{h}\Big| = \Big|\frac{E_g(k)}{k}\Big|\Big|\frac{k}{h}\Big| \leqslant \Big|\frac{E_g(k)}{k}\Big| (|f'(z_0)| + 1) \to 0,$$

kun $h \to 0$. □

Esimerkki 2.8. Olkoon

$$h(z) := \Big(\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}\Big)^{10}, \quad \text{kun } z \notin \{i, -i\}.$$

Tällöin $h = g \circ f$, missä

$$f(z) := \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \quad \text{ja} \quad g(w) := w^{10}.$$

Osamäärän derivointisäännön (lause 2.5, kohta (iv)) f on kompleksisesti differentioituva pisteissä $z \notin \{i, -i\}$. Vastaavasti g on kompleksisesti differentioituva kaikkialla. Ketjusäännön nojalla h on kompleksisesti differentioituva pisteissä $z \notin \{i, -i\}$. Derivaatan laskeminen jätetään lukijan tehtäväksi.

2.2. Cauchyn ja Riemannin yhtälöt

Selvitetään seuraavaksi, miten kompleksinen differentioituvuus liittyy osittaisderivaattoihin ja reaalianalyysissä käytettyyn derivaattaan.

Olkoot $G \subset \mathbb{C}$ avoin, $z_0 \in G$ ja $f = u + i\,v\colon G \to \mathbb{C}$ annettu funktio, missä u ja v ovat reaaliarvoisia,

$$u(x, y) := \mathrm{Re}(f(x + i\,y)) \quad \text{ja} \quad v(x, y) := \mathrm{Im}(f(x + i\,y)).$$

Palautetaan kurssista Vektorianalyysi 1[3] mieleen funktion differentioituvuuden käsite, jota erotukseksi kompleksisesta differentioituvuudesta kutsutaan tässä reaaliseksi differentioituvuudeksi: Funktio f on *reaalisesti differentioituva pisteessä* z_0, jos on olemassa lineaarikuvaus $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ja jossakin origon ympäristössä $B(0; r)$ määritelty funktio E siten, että

$$(\mathbb{R}\mathrm{D}) \qquad f(z_0 + h) = f(z_0) + Ah + E(h) \quad \text{ja} \quad \frac{E(h)}{|h|} \to 0, \quad \text{kun } h \to 0.$$

Tässä lineaarikuvaus A, *funktion f derivaatta $Df(z_0)$ pisteessä* z_0, samaistetaan sen standardikannan suhteen määrätyn 2×2-matriisinsa eli *Jacobin matriisin* kanssa,[4]

$$A = Df(z_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{bmatrix}.$$

Seuraava lause selvittää reaalisen ja kompleksisen differentioituvuuden välisen yhteyden:

Lause 2.9 ($\mathbb{R}\mathrm{D}\mathbb{C}\mathrm{D}$). *Funktio $f = u + i\,v$ on kompleksisesti differentioituva pisteessä $z_0 \in G$, jos ja vain jos f on reaalisesti differentioituva pisteessä z_0 ja sen reaali- ja imaginaariosa toteuttavat* Cauchyn ja Riemannin yhtälöt

$$(\mathrm{CR}) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

Pisteessä z_0 kompleksisesti differentioituvalle funktiolle f on

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\,\frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

Todistus. $\Rightarrow$: Oletetaan, että f on kompleksisesti differentioituva pisteessä z_0.

Kehitelmän ($\mathbb{C}$D) nojalla on olemassa origon ympäristössä määritelty funktio E siten, että

$$(\mathbb{C}\mathrm{D}) \qquad f(z_0 + h) = f(z_0) + c\,h + E(h) \quad \text{ja} \quad \frac{E(h)}{|h|} \to 0, \quad \text{kun } h \to 0,$$

missä $c := f'(z_0)$. Koska kuvaus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h \mapsto c\,h$, on lineaarinen, on f reaalisesti differentioituva pisteessä z_0 ja $Df(z_0)h = c\,h$.

---

[3]Aiempia relevantteja kursseja ovat Vektorifunktioiden analyysi 1B ja Differentiaalilaskenta 1.

[4]Karl Weierstrass (1874): "Wir Deutsche gebrauchen statt dessen nach Jacobi's Vorgange für partielle Ableitungen das runde ∂." Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) otti pyöreän d:n ∂ osittaisderivaatan merkinnäksi artikkelissa *De determinantibus Functionalibus*, Crelle's Journal 22 (1841).

Cauchyn ja Riemannin yhtälöiden osoittamiseksi määrätään funktion f osittaisderivaatat. Valitaan $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$. Tällöin

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = c + \frac{E(h)}{h} \to c, \quad \text{kun } h \to 0.$$

Koska toisaalta $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \to \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$, kun $h \to 0$, on $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = c$.

Valitaan seuraavaksi $h \in i\mathbb{R}\setminus\{0\}$ eli $h = i\,t$, missä $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tällöin

$$\frac{f(z_0+it)-f(z_0)}{t} = i\,c + i\,\frac{E(i\,t)}{i\,t} \to i\,c, \quad \text{kun } t \to 0.$$

Koska toisaalta $\frac{f(z_0+it)-f(z_0)}{t} \to \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$, kun $t \to 0$, on $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\,c$.

Yhdistämällä nämä tiedot saadaan $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = c = -i\,\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$. Koska $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial y}(z_0)$, saadaan

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = -i\,\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(z_0).$$

Cauchyn ja Riemannin yhtälöt seuraavat tästä.

$\Leftarrow$: Oletetaan nyt, että f on reaalisesti differentioituva pisteessä z_0 ja sen reaali- ja imaginaariosa toteuttavat Cauchyn ja Riemannin yhtälöt. Olkoon $A = Df(z_0)$ funktion f Jacobin matriisi pisteessä z_0. Tällöin on olemassa origon ympäristössä määritelty funktio E siten, että

$$(\mathbb{R}\mathrm{D}) \qquad f(z_0+h) = f(z_0) + Ah + E(h) \quad \text{ja} \quad \frac{E(h)}{|h|} \to 0, \quad \text{kun } h \to 0.$$

Cauchyn ja Riemannin yhtälöiden nojalla

$$A = Df(z_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) \end{bmatrix}.$$

Kun $h = h_1 + i\,h_2 = (h_1, h_2)$, on

$$\begin{aligned} Ah &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)\,h_1 - \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\,h_2 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\,h_1 + \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)\,h_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)\,h_1 - \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\,h_2 + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\,h_1 + \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)\,h_2\right) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\right)(h_1 + i\,h_2) \end{aligned}$$

Funktion f reaalinen differentioituvuuskehitelmä $(\mathbb{R}\mathrm{D})$ on siis muotoa $(\mathbb{C}\mathrm{D})$, missä $c := \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$, joka takaa funktion f kompleksisen differentioituvuuden. $\square$

Lause 2.10. *Oletetaan, että funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ reaali- ja imaginaariosilla u ja v on osittaisderivaatat $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ ja $\frac{\partial v}{\partial y}$ joukossa G, ne ovat jatkuvia pisteessä $z_0 \in G$ ja toteuttavat Cauchyn ja Riemannin yhtälöt*

$$(\mathrm{CR}) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad \textit{ja} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

Tällöin f on kompleksisesti differentioituva pisteessä z_0.

Todistus. Vedotaan kurssissa Vektorianalyysi 1 todistettuun tulokseen: Lauseen oletuksilla osittaisderivaattojen jatkuvuudesta pisteessä z_0 (ilman Cauchyn ja Riemannin yhtälöitä) seuraa funktion f reaalinen differentioituvuus pisteessä z_0. Edellisen lauseen $\mathbb{R}$D$\mathbb{C}$D nojalla reaalinen differentioituvuus yhdessä Cauchyn ja Riemannin yhtälöiden kanssa takaa kompleksisen differentioituvuuden. $\square$

Huomautus 2.11. Pelkät Cauchyn ja Riemannin yhtälöt eivät riitä! Olkoon

$$f(z) := \begin{cases} e^{-1/z^4}, & \text{kun } z \neq 0, \\ 0, & \text{kun } z = 0. \end{cases}$$

Koska $g(z) := e^z$ on holomorfinen koko kompleksitasossa ja $h(z) := -1/z^4$, kun $z \neq 0$, on holomorfinen joukossa $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, on $f = g \circ h$ ketjusäännön nojalla holomorfinen joukossa $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Tarkastellaan seuraavaksi origoa. Kun $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, on

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{-1/x^4}}{x} \overset{(*)}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{t^{1/4}}{e^t} \overset{(**)}{=} 0,$$

missä kohdassa $(*)$ on sijoitettu $t = 1/x^4$. Raja-arvon laskemisessa, kohta $(**)$, voidaan käyttää epäyhtälöä $e^t \geqslant 1 + t$ (joka saadaan esimerkiksi eksponenttifunktion Taylorin kehitelmästä $e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}\, e^{\xi}\, t^2$ jollekin $\xi \in (0, t)$, kun $t > 0$).

Vastaavalla tavalla saadaan

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0,$$

joten funktiolla $f = u + i\,v$ on osittaisderivaatta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(0) = 0.$$

Edelleen vastaavalla tavalla funktiolle $f = u + i\,v$ saadaan osittaisderivaatta (HT)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0) = \frac{\partial u}{\partial y}(0) + i\,\frac{\partial v}{\partial y}(0) = 0.$$

Näistä seuraa, että f toteuttaa Cauchyn ja Riemannin yhtälöt origossa. Funktio f ei kuitenkaan ole kompleksisesti differentioituva origossa, koska f ei ole jatkuva origossa:

$$f(r\, e^{i\pi/4}) = e^{1/r^4} \to \infty, \quad \text{kun } r \to 0.$$

Esimerkkejä 2.12. a) Olkoon $f(z) := e^z$. Kun $f = u + i\,v$ ja $z = x + i\,y$, on

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad \text{ja} \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= e^x \cos y, & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= -e^x \sin y, \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= e^x \sin y \quad \text{ja} & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &= e^x \cos y. \end{aligned}$$

Cauchyn ja Riemannin yhtälöt toteutuvat siis kaikkialla. Koska funktioiden u ja v osittaisderivaatat ovat kaikkialla jatkuvia, funktio f on holomorfinen lauseen 2.10 nojalla.

b) Olkoon $f(z) := \mathrm{Log}(z)$. Tällöin f on holomorfinen joukossa $G := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Logaritmin päähaaralle $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ ja $v(x,y) = 2\arctan\frac{y}{x+|z|}$ joukossa G. Cauchyn ja Riemannin yhtälöiden toteutuminen ja funktioiden u ja v osittaisderivaattojen jatkuvuuden selvittäminen jätetään lukijan tehtäväksi. (Logaritmin holomorfisuus joukossa G saadaan myöhemmin selville helpommin.)

c) Olkoon $f(z) := x$. Tällöin $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y}$, joten f ei ole holomorfinen.

2.3. Cauchyn ja Riemannin yhtälön seurauksia

LAUSE 2.13. *Olkoot $D \subset \mathbb{C}$ alue ja $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorfinen. Jos $f'(z) = 0$ kaikille $z \in D$, niin f on vakio alueessa D.*

TODISTUS. Kun $u := \mathrm{Re}\, f$ ja $v := \mathrm{Im}\, f$, saadaan Cauchyn ja Riemannin yhtälöiden nojalla

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\,\frac{\partial u}{\partial y}(z).$$

Koska oletuksen nojalla $f'(z) = 0$ kaikille $z \in D$, on $\frac{\partial u}{\partial x}(z) = 0$ ja $\frac{\partial u}{\partial y}(z) = 0$ kaikille $z \in D$. Osoitetaan, että u on vakio. Imaginaariosa v osoitetaan vakioksi vastaavalla tavalla. Näistä yhdessä seuraa, että f on vakio.

Kiinnitetään $z_0 \in D$. Lauseen 1.44 nojalla jokaiselle $z \in D$ on olemassa koordinaatiston suuntainen murtoviiva $M(z_0, z_1, \ldots, z_k) \subset D$ siten, että $z_k = z$.

Reaalimuuttujan funktioiden väliarvolauseen nojalla jokaisella janalla $J(z_j, z_{j-1})$, $j \in \{1, \ldots, k\}$, on piste ζ_j niin, että

$$u(z_j) - u(z_{j-1}) = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(\zeta_j)\,(\mathrm{Re}\, z_j - \mathrm{Re}\, z_{j-1}), & \text{jos } \mathrm{Im}\, z_j = \mathrm{Im}\, z_{j-1}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\zeta_j)\,(\mathrm{Im}\, z_j - \mathrm{Im}\, z_{j-1}), & \text{jos } \mathrm{Re}\, z_j = \mathrm{Re}\, z_{j-1}. \end{cases}$$

Koska $\frac{\partial u}{\partial x}(z) = 0$ ja $\frac{\partial u}{\partial y}(z) = 0$ kaikille $z \in D$, on siis $u(z_j) = u(z_{j-1})$ kaikille $j \in \{1, \ldots, k\}$. Tästä saadaan

$$u(z) = u(z_k) = u(z_{k-1}) = \cdots = u(z_1) = u(z_0).$$

Funktiolla u on siis jokaisessa alueen D pisteessä sama arvo kuin pisteessä z_0. □

LAUSE 2.14. *Olkoot $D \subset \mathbb{C}$ alue ja $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorfinen. Jos jokin funktioista*

$$u := \mathrm{Re}(f), \quad v := \mathrm{Im}(f) \quad \textit{tai} \quad |f|$$

on vakio, niin f on vakio.

TODISTUS. Jätetään lukijan tehtäväksi. □

2.4. Trigonometriset funktiot

Kun $t \in \mathbb{R}$, on

$$e^{i\,t} = \cos t + i \sin t \quad \text{ja} \quad e^{-i\,t} = \cos t - i \sin t,$$

joten

$$\cos t = \tfrac{1}{2}\,(e^{i\,t} + e^{-i\,t}) \quad \text{ja} \quad \sin t = \tfrac{1}{2i}\,(e^{i\,t} - e^{-i\,t}).$$

Käytetään näitä kaavoja yleistämään sinin ja kosinin määritelmät kompleksisille muuttujan arvoille.

Määritelmä 2.15. Kaikille $z \in \mathbb{C}$ määritellään *kompleksinen sini* ja *kompleksinen kosini* kaavoilla

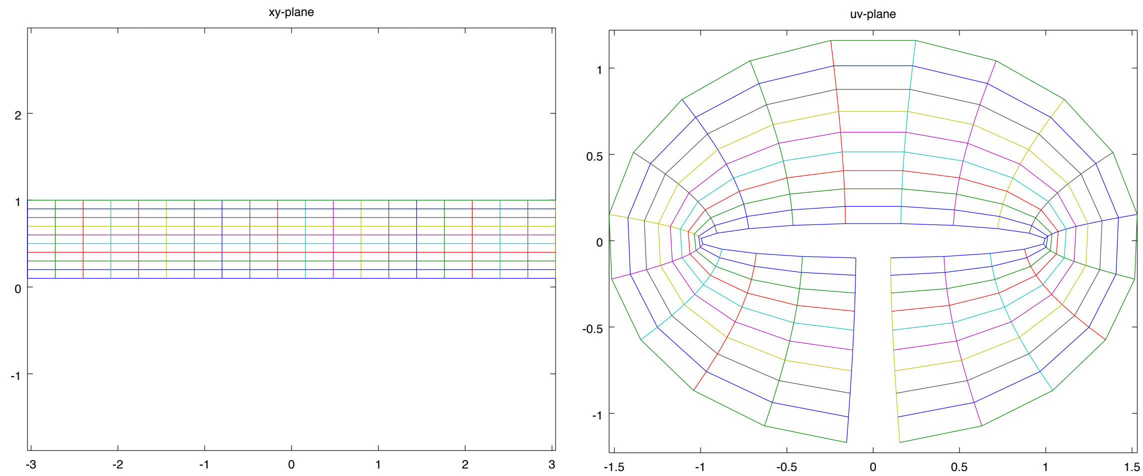
$$\cos z := \tfrac{1}{2}\,(e^{i\,z} + e^{-i\,z}) \quad \text{ja} \quad \sin z := \tfrac{1}{2i}\,(e^{i\,z} - e^{-i\,z}).$$

Kun $z \in \mathbb{C}$ ja $\cos z \neq 0$, määritellään *kompleksinen tangentti* kaavalla

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}.$$

Kun $z \in \mathbb{C}$ ja $\sin z \neq 0$, määritellään *kompleksinen kotangentti* kaavalla

$$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}.$$



Vasen kuva: $z = x + i\,y$ -tason suorakaide S: $-\pi + \frac{1}{10} \leqslant x \leqslant \pi - \frac{1}{10}$, $\frac{1}{10} \leqslant y \leqslant 1$.
Oikea kuva: $w = u + i\,v$ -tasossa suorakaiteen S kuvajoukko $\sin(S)$.

Lause 2.16. *Kompleksinen sini ja kosini ovat koko kompleksitasossa holomorfisia funktioita ja*

$$\sin'(z) = \cos z \quad \textit{ja} \quad \cos'(z) = -\sin z \quad \textit{kaikille } z \in \mathbb{C}.$$

Todistus. Seuraa kompleksisen eksponenttifunktion holomorfisuudesta, tavallisista derivointisäännöistä (lause 2.5) ja ketjusäännöstä (lause 2.7). □

Huomautuksia 2.17. a) Tässä määritellyt kompleksinen sini, kosini, tangentti ja kotangentti saavat reaaliakselilla (pisteissä, joissa a.o. funktio on määritelty) samat arvot kuin aiemmin reaalianalyysissä määritellyt sini, kosini, tangentti ja kotangentti.

b) Suuri osa reaalimuuttujille voimassa olevista trigonometrista kaavoista pätee samassa muodossa kompleksisille muuttujien arvoille (katso seuraavaa huomautusta). Mutta esimerkiksi kaavasta $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ **ei voida** päätellä, että $|\sin z| \leqslant 1$ ja $|\cos z| \leqslant 1$. Itse asiassa on voimassa $\sin(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ ja $\cos(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ (HT).

Huomautus 2.18. Koska ekspontenttifunktio on $2\pi\, i$-jaksoinen, ovat sini ja kosini 2π-jaksoisia. Lisäksi seuraavat tutut trigonometriset kaavat ovat voimassa kaikille $z \in \mathbb{C}$ ja $w \in \mathbb{C}$ (HT):

$$
\begin{aligned}
\sin^2 z + \cos^2 z &= 1 \\
\sin(z+w) &= \sin z \cos w + \cos z \sin w, \\
\sin(2z) &= 2 \sin z \cos z \\
\sin(\pi - z) &= \sin z, \quad \sin(\pi/2 - z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z \\
\cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w, \\
\cos(2z) &= 2\cos^2 z - 1 = 1 - 2\sin^2 z = \cos^2 z - \sin^2 z \\
\cos(\pi - z) &= -\cos z, \quad \cos(\pi/2 - z) = \sin z, \quad \cos(-z) = \cos z
\end{aligned}
$$

Esimerkki 2.19. Määrätään kosinin kompleksiset nollakohdat.
Merkitään $z = x + i\,y$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
0 = 2\cos z &= e^{i\,z} + e^{-i\,z} = e^{i\,x - y} + e^{-i\,x + y} \\
&= e^{-y} (\cos x + i \sin x) + e^{y} (\cos x - i \sin x) \\
&= \cos x\, (e^{-y} + e^{y}) - i \sin x\, (e^{y} - e^{-y}).
\end{aligned}
$$

Siis $\cos x\,(e^{-y} + e^{y}) = 0$ ja $\sin x\,(e^{y} - e^{-y}) = 0$. Koska $e^{-y} + e^{y} \neq 0$ kaikille $y \in \mathbb{R}$, on $\cos x = 0$. Tällöin $\sin x = \pm 1$, joten $e^{y} - e^{-y} = 0$ ja edelleen $y = 0$. Kosinin kompleksiset nollakohdat ovat siis samat kuin reaaliakselilla eli $z = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.5. Käänteisfunktioiden haarat

Olkoot $G \subset \mathbb{C}$ avoin joukko ja $f \colon G \to \mathbb{C}$ holomorfinen funktio. Jos on olemassa holomorfinen funktio $g \colon D \to G$, jolle

$$
f(g(w)) = w \quad \text{kaikille } w \in D,
$$

niin ketjusäännön nojalla $f'(g(w))\, g'(w) = 1$ kaikille $w \in D$. Erityisesti siis $f'(z) \neq 0$ kaikille $z \in G(D)$.

Yleisemmässä n reaalimuuttujan funktion tapauksessa ($G \subset \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$) jatkuvasti differentioituville kuvauksille f ja g ehdosta $f(g(w)) = w$ saadaan ketjusäännön nojalla $Df(g(w))\, Dg(w) = \mathbb{I} =$ yksikkömatriisi. Erityisesti siis Jacobin determinantille pitää olla $\det Df(z) \neq 0$. Tämä jatkuvasti differentioituville kuvauksille välttämätön determinattiehto on yleisessä usean reaalimuuttujan funktion tapauksessa myös riittävä takaamaan jatkuvasti differentioituvan käänteisfunktion *lokaalin* olemassaolon. Holomofisen funktion $f = u + i\,v$ Jacobin determinantti on Cauchyn ja Riemannin yhtälöiden nojalla

$$
\det Df(z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) \end{vmatrix} = \Big(\frac{\partial u}{\partial x}(z)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial x}(z)\Big)^2 = |f'(z)|^2.
$$

Lause (Käänteiskuvauslause). *Olkoot $G \subset \mathbb{C}$ avoin joukko, $z_0 \in G$ ja $f : G \to \mathbb{C}$ kompleksisesti jatkuvasti differentioituva funktio. Oletetaan, että $f'(z_0) \neq 0$.*

Tällöin on olemassa pisteen $w_0 := f(z_0)$ avoin ympäristö W, pisteen z_0 avoin ympäristö Z ja yksi ja vain yksi kompleksisesti jatkuvasti differentioituva funktio $g \colon W \to Z$, jolle

$$g(w_0) = z_0, \quad g(f(z)) = z \text{ kaikille } z \in Z, \text{ ja } \quad f(g(w)) = w \text{ kaikille } w \in W.$$

Todistusta ei tässä esitetä. Lukijalle jätetään osoitettavaksi, että jos $f : G \to \mathbb{C}$ on kompleksisesti jatkuvasti differentioituva ja sillä on reaalisesti jatkuvasti differentioituva käänteisfunktio g, niin myös g kompleksisesti differentioituva, t.s. jos $f : G \to \mathbb{C}$ ja $g \colon D \to G$ ovat reaalisesti jatkuvasti differentioituvia, joille $f(g(w)) = w$ kaikille $w \in D$, niin g toteuttaa Cauchyn ja Riemannin yhtälöt, jos f toteuttaa ne.

Käänteiskuvauslauseen todistuksessa ongelma on seuraava: Derivaatan jatkuvuudesta ja oletuksesta $f'(z_0) \neq 0$ seuraa, että $f'(z) \neq 0$ jossakin pisteen z_0 ympäristössä. Reaalimuuttujan tilanteessa tästä voitaisiin päätellä, että f on aidosti monotoninen jossakin pisteen z_0 ympäristössä. Tällainen funktio on injektio ja siis bijektio kuvajoukolleen. Riittää näyttää, että kuvajoukko on avoin. Vastaavaa päättelyä ei voi tehdä kahden muuttujan funktioille.

On hyvä huomata, että vaikka G olisi yhtenäinen ja $f'(z) \neq 0$ kaikille $z \in G$, ei funktion f tarvitse olla injektio. Esimerkiksi, jos $G := \mathbb{C}$ ja $f(z) := e^z$, on $f'(z) = e^z \neq 0$ kaikille $z \in \mathbb{C}$, mutta $f(z + 2\pi i\, k) = f(z)$ kaikille $k \in \mathbb{Z}$. Jos f rajoitetaan mihin tahansa joukkoon

$$G_{y_0} := \{x + i\,y \mid x \in \mathbb{R},\ y_0 - \pi < y < y_0 + \pi\},$$

on f injektio, kuvajoukko

$$f(G_{y_0}) = \{w \in \mathbb{C} \mid w \neq r\, e^{i\,(y_0 \pm \pi)},\ r \geqslant 0\} = \mathbb{C} \setminus \{-r\, e^{i\,y_0} \mid r \geqslant 0\}$$

on avoin ja $f^{-1} \colon f(G_{y_0}) \to G_{y_0}$ on holomorfinen. Tämä seuraa kohta todistettavasta lauseesta 2.22.

Määritelmä 2.20. Olkoot $G \subset \mathbb{C}$ avoin, $f \colon G \to \mathbb{C}$ holomorfinen ja $D \subset f(G)$ alue. Sanotaan, että funktio $g \colon D \to G$ on *funktion f käänteiskuvauksen haara alueessa D*, jos g on jatkuva ja $f(g(w)) = w$ kaikille $w \in D$.

Huomautuksia 2.21. • Funktion f käänteiskuvauksen haara g on siis ”oikeanpuoleinen käänteiskuvaus”. Aito käänteiskuvaus on ”molemminpuolinen” eli sen tulee lisäksi toteuttaa ”vasemmanpuoleinen” ehto $g(f(z)) = z$ kaikille $z \in G$. Se, että käänteiskuvauksen haaran ei tarvitse olla oikea käänteiskuvaus, nähdään vaikka juurifunktiosta: n. juuren päähaara määriteltiin kaavalla $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\, \exp(i\,\mathrm{Arg}(z)/n)$, jolloin kyseinen juuri on jatkuva joukossa $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$. Suora lasku näyttää, että $\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = z$, mutta $\sqrt[n]{z^n}$ ei välttämättä ole sama kuin z (tarkastele argumentteja). Ongelma piilee nyt siinä, että potenssifunktio $z \mapsto z^n$ ei ole injektio missään origon ympäristössä.

• On hyvä muistaa, että jos funktion f käänteiskuvauksen haara g on kompleksisesti differentioituva pisteessä w_0, niin $f'(z_0) \neq 0$, kun $z_0 = g(w_0)$.

• Usein käänteiskuvauksen haaraa kannattaa selvittää tarkastelemalla funktion rajoittumaa sopivaan osajoukkoon. Esimerkiksi juurifunktiolle $\sqrt[n]{z^n} = z$ kaikille $z \in G$, jos G on riittävän pieni positiivisen reaaliakselin ympäristö (HT).

• Vaikka käänteisfunktion haaran käsite saattaa aluksi vaikuttaa hämmentävältä, kyse ei ole juuri sen kummemmasta ongelmasta kuin arkusfunktioiden kohdalla. Koska esimerkiksi kosini kuvauksena $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ei ole injektio, arkuskosinin määrittelemiseksi rajoitutaan välille $[0, \pi]$, jolla kosini on aidosti vähenevä. Bijektiivisen kuvauksen $\cos|_{[0,\pi]} : [0, \pi] \to [-1, 1]$ käänteiskuvaus nimetään arkuskosiniksi. Jos kosinin rajoittuma otettaisiin välille $[-\pi, 0]$, saataisiin toinen kosinin käänteiskuvauksen haara, "vaihtoehtoinen arkuskosini", eli funktio g, joka annetulle $w \in [-1, 1]$ antaa ratkaisun yhtälölle $\cos g(w) = w$. Kun arkuskosinin antamat ratkaisut ovat välillä $[0, \pi]$, saadaan kuvauksella g ratkaisut väliltä $[-\pi, 0]$.

LAUSE 2.22 (Käänteiskuvauksen haaran derivaatta). *Olkoot $f : G \to \mathbb{C}$ holomorfinen ja $g : D \to G$ funktion f käänteiskuvauksen haara alueessa $D \subset f(G)$.*

Jos pisteessä $z_0 \in G$ on $f'(z_0) \neq 0$, on g kompleksisesti differentioituva pisteessä w_0, jolle $g(w_0) = z_0$, ja

$$g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

TODISTUS. Käänteiskuvauksen haaran g määritelmästä seuraa välittömästi, että g on injektio. Erityisesti jokaiselle $w \in D$, jolle $w \neq w_0$, on $g(w) \neq g(w_0) = z_0$. Siis, kun merkitään $z := g(w)$, on

$$\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{g(w) - g(w_0)}{f(g(w)) - f(g(w_0))} = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}} \to \frac{1}{f'(z_0)},$$

kun $w \to w_0$, sillä funktion g jatkuvuuden nojalla tällöin $z = g(w) \to g(w_0) = z_0$. Funktion g kompleksinen differentioituvuus pisteessä w_0 seuraa tästä. □

ESIMERKKEJÄ. a) **Juurien haarat.** Kun $f(z) := z^n$, missä $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 2$, on $f'(z_0) = n\, z_0^{n-1} \neq 0$, kun $z_0 \neq 0$. Kun $w_0 \neq 0$ ja pisteelle z_0 on $z_0^n = w_0$, on $z_0 \neq 0$, jolloin funktion f käänteiskuvauksen haara g on differentioituva jossakin pisteen w_0 ympäristössä. Funktion f käänteiskuvauksen haara on n. juurifunktio ja määritelmän 1.15 kaavan mukaan jokainen juurista $g_k : w \mapsto \sqrt[n]{|w|}\, \exp(i(\operatorname{Arg}(w) + 2\pi\, k)/n)$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, on jatkuva joukossa $\mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$ (harjoituksissa käsitellyn tehtävän mukaan argumentin päähaara on jatkuva kaikissa joukon $\mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$ pisteissä). Siis juurien haarat g_k ovat holomorfisia joukossa $\mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$. Vaikka juurien haarat ovat jatkuvia origossa, kompleksista derivaattaa niillä ei ole, koska $f'(0) = 0$.

b) **Logaritmin haarat.** Kun $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := e^z$, on $f'(z) = e^z \neq 0$ kaikille $z \in \mathbb{C}$. Jos siis $g : D \to \mathbb{C}$, missä $D \subset \mathbb{C} \backslash \{0\}$, on funktion f käänteiskuvauksen mikä tahansa haara, jokin *logaritmin haara*, on $e^{g(w)} = w$, g on holomorfinen ja (lauseen 1.24 seurauksena) jollekin jatkuvalle funktiolle $\theta = \theta(w)$,

$$g(w) = \ln |w| + i\, \theta(w)$$

Edelleen lauseen 2.22 nojalla pisteessä $z = g(w)$ on

$$g'(w) = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}.$$

Jos $\tilde{g}\colon D \to \mathbb{C}$ on jokin toinen logaritmin haara, on $g'(w) = 1/w = \tilde{g}'(w)$, joten $g(w) = \tilde{g}(w) + \text{vakio}$ (lause 2.13). Koska $e^{\tilde{g}(w)} = w = e^{g(w)} = e^{\tilde{g}(w)}\, e^{\text{vakio}}$, on $e^{\text{vakio}} = 1$, joten vakio on $2\pi i\, k$ jollekin $k \in \mathbb{Z}$.

c) **Areasini.** *Hyperbolinen sini* määritellään koko kompleksitasoon kaavalla

$$\sinh z := \tfrac{1}{2}\,(e^z - e^{-z}).$$

Reaaliakselilla hyperbolinen sini on aidosti kasvava, joten sillä on aito käänteiskuvaus, *areasini*, $\operatorname{ar\,sinh}$. Kompleksitasossa hyperbolinen sini on jaksollinen, joten sillä on useita käänteiskuvauksen haaroja.

Yhtälöstä $\sinh z = w$ saadaan $e^{2z} - 2w\, e^z - 1 = 0$, joten

$$e^z = w \pm \sqrt{1 + w^2}.$$

Reaalisia ratkaisuja varten pitää valita merkki ”+”, juureksi neliöjuuren päähaara ja logaritmiksi logaritmin päähaara, joka positiivisella reaaliakselilla yhtyy luonnolliseen logaritmiin. Siis

$$w \mapsto \operatorname{Log}(w + \sqrt{1 + w^2})$$

on se hyperbolisen sinin käänteisfunktion haara, joka reaaliakselilla antaa reaalisen areasinin.

LUKU 3

Kompleksinen integrointi

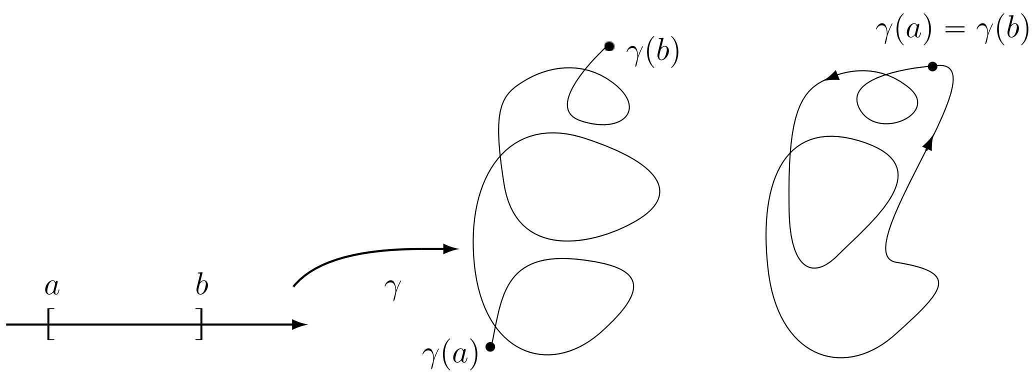
3.1. Tieintegraali

MÄÄRITELMÄ 3.1. Kompleksitason *polku* on kompaktin välin $[a, b] \subset \mathbb{R}$ jatkuva kuvaus $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$. Piste $\gamma(a)$ on polun γ *lähtöpiste* (tai *alkupiste*) ja $\gamma(b)$ *päätepiste* (tai *loppupiste*). *Polun* $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ *jälki* $|\gamma|$ on sen kuvajoukko, $|\gamma| := \gamma([a, b])$.

Kuvaus γ on sen jäljen $|\gamma|$ *parametriesitys*.

Sanotaan, että polku γ on *joukon A polku* (tai *polku joukossa A*), jos $|\gamma| \subset A$.

Jos polulle $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ on $\gamma(a) = \gamma(b)$, on γ *umpinainen*.



Polku γ ja sen jälki $|\gamma| = \gamma([a, b]) \subset \mathbb{C}$, ja umpinaisen sileän polun jälki.

MÄÄRITELMÄ 3.2. Olkoot $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ kompleksitason polku, $x(t) := \mathrm{Re}(\gamma(t))$ ja $y(t) := \mathrm{Im}(\gamma(t))$.

Polku γ on

(i) *jatkuvasti differentioituva*, jos funktiot $x\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ja $y\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvasti derivoituvia (päätepisteissä toispuoleiset derivaatat $\gamma'_+(a)$ ja $\gamma'_-(b)$);

(ii) *sileä*, jos se on jatkuvasti differentioituva ja $\gamma'(t) = x'(t) + i\,y'(t) \neq 0$ kaikille $t \in [a, b]$; jos γ on umpinainen, vaaditaan lisäksi $\gamma'_-(b) = \gamma'_+(a)$;

(iii) *paloittain jatkuvasti differentioituva*, jos on olemassa välin $[a, b]$ jako $\{t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}, t_k\}$, missä $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$ siten, että $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ on jatkuvasti differentioituva kaikille $j \in \{1, \ldots, k\}$;

(iv) *paloittain sileä*, jos se on paloittain jatkuvasti differentioituva ja $\gamma|'_{[t_{j-1}, t_j]}(t) \neq 0$ kaikille $t \in [t_{j-1}, t_j]$ ja $j \in \{1, \ldots, k\}$.

[1]Viimeksi muutettu 02.02.2020.

Määritelmä 3.3. *Joukon A tie γ* (tai *γ on tie joukossa A*, jos γ) on joukon A paloittain jatkuvasti differentioituva polku. Umpinainen polku on *silmukka* ja umpinainen tie on *piiri*.[2]

Huomautus 3.4. Englanninkielisessä kirjallisuudessa umpinainen polku on usein closed path (tai closed curve). Koska polku on jatkuva ja väli $[a, b]$ kompakti, on polun jälki $|\gamma| = \gamma([a, b])$ suljettu joukko. Käännös suljettu polku voitaisiin siis tulkita tarkoittavan kahta eri asiaa. Umpinainen on suomenkielessä mainio tilannetta kuvaava termi, jolle ei tässä asiayhteydessä voi tulkita väärin.

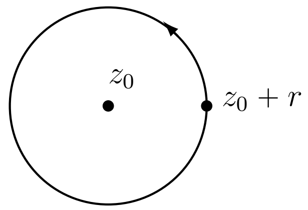
Englanninkielisessä kirjallisuudessa nimityksen path sijasta käytetään usein termiä curve, jolle luonteva suomennos olisi käyrä. Termi käyrä on kuitenkin hyvä jättää tarkemmin määrittelemättä ja säästää se yleiskieliseksi termiksi, joka viittaisi enemmän polun jälkeen kuin itse polkuun. (Vaihtoehtoisesti polun jälkeä voitaisiin nimittää *polun käyräksi*, jolloin pelkkä *käyrä* jäisi edelleen määrittelemättä.) Nimitystä *kaari* käytetään toisinaan tarkoittamaan injektiivistä polkua tai sellaisen kuvajoukkoa.

Esimerkkejä 3.5. a) Olkoot $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\eta\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$ ja $\vartheta\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$,

$$\gamma(t) := e^{2\pi i t}, \quad \eta(t) := e^{4\pi i t} \quad \text{ja} \quad \vartheta(t) := e^{2\pi i t^2}.$$

Tällöin γ, η ja ϑ ovat jatkuvasti differentoituvia umpinaisia polkuja, siis piirejä. Kaikilla on sama jälki $= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Polut γ ja η ovat sileitä, mutta polku ϑ ei ole: $\vartheta'(t) = 4\pi i t e^{2\pi i t^2}$ saa eri arvot pisteissä $t = 0$ ja $t = 1$; lisäksi $\vartheta'(0) = 0$.

b) Olkoot $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $r > 0$. Tällöin $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := z_0 + r e^{it}$, on z_0-keskisen r-säteisen ympyrän kehän parametriesitys.



Ympyräpolku $t \mapsto z_0 + r e^{it}$.

c) Olkoot z_0 ja z_1 kompleksitason pisteitä. Polku $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$,

$$\gamma(t) := (1 - t) z_0 + t z_1,$$

on *pisteitä z_0 ja z_1 yhdistävä janapolku*. Sen kuvajoukko on pisteitä z_0 ja z_1 yhdistävä jana, $|\gamma| = J(z_0, z_1)$.

d) Olkoot z_0, z_1 ja z_2 kompleksitason pisteitä. Asetetaan $\gamma\colon [0, 2] \to \mathbb{C}$,

$$\gamma(t) := \begin{cases} (1 - t) z_0 + t z_1, & \text{kun } t \in [0, 1], \text{ ja} \\ (1 - (t - 1)) z_1 + (t - 1) z_2, & \text{kun } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

[2]Sanastoa (suomi—englanti—ranska): polku—path—chemin, jälki—trace—support, umpinainen—closed—fermé, silmukka—loop—lacet, tie—road—route, piiri—circuit—circuit, käyrä—curve—courbe.

Tällöin γ on tie, jolle

$$\gamma'(t) = \begin{cases} z_1 - z_0, & \text{kun } t \in (0,1), \\ z_2 - z_1, & \text{kun } t \in (1,2), \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma'_+(0) = z_1 - z_0, \\ \gamma'_-(1) = z_1 - z_0, \\ \gamma'_+(1) = z_2 - z_1, \\ \gamma'_-(2) = z_2 - z_1. \end{cases}$$

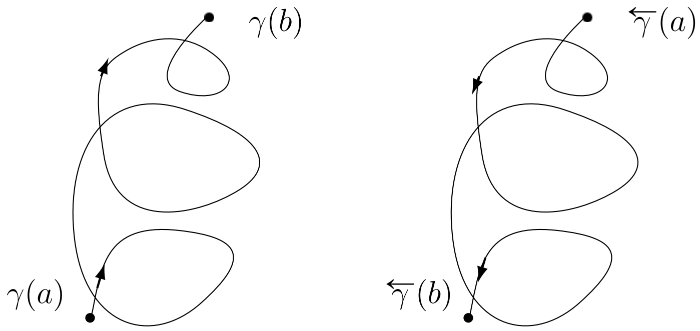
Polku γ ei siis ole differentoituva pisteessä $t = 1$ paitsi tapauksessa, jossa $z_1 - z_0 = z_2 - z_1$. (HT: mitä tämä tapaus vastaa geometrisesti?)

Määritelmä 3.6. Olkoot $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ja $\eta\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ annettuja polkuja.

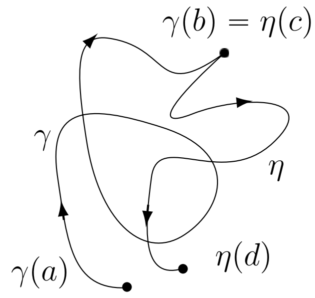
Polun γ *vastapolku* (tai käänteispolku tai paluupolku) on polku $\overleftarrow{\gamma}\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, jolle $\overleftarrow{\gamma}(t) := \gamma(b - (t - a))$.

Oletetaan, että $\gamma(b) = \eta(c)$. Polkujen γ ja η *yhdistetty polku* on polku $\gamma \vee \eta$, jolle

$$\gamma \vee \eta\colon [a, b + d - c] \to \mathbb{C}, \quad (\gamma \vee \eta)(t) := \begin{cases} \gamma(t), & \text{kun } t \in [a,b], \text{ ja} \\ \eta(c + t - b), & \text{kun } t \in [b, b + d - c]. \end{cases}$$



Polku γ ja sen vastapolku $\overleftarrow{\gamma}$.



Polkujen γ ja η yhdistetty polku $\gamma \vee \eta$.

Huomautus 3.7. Polkujen γ ja η yhdistetyn polun kohdalla ehto $\gamma(b) = \eta(c)$ takaa, että määritelmän kuvaus $\gamma \vee \eta$ on polku (eli jatkuva kuvaus; tarkista tämä hetkeen $t = b$ liittyen). Ehto $\gamma(b) = \eta(c)$ on siis *polkujen γ ja η yhdistettävyysehto.* (Huomaa myös nimitys: $\gamma \vee \eta$ on polkujen yhdistetty polku, **ei** yhdiste.)

Kirjallisuudessa merkinnät polun vastapolulle tai polkujen yhdistetylle polulle eivät ole lainkaan standardoituneet. Tähän valitut merkinnät ovat toisaalta intuitiota tukevia eivätkä toisaalta ole juurikaan vakiintuneet muuhun käyttöön (ainakaan analyysissä; väkää $\vee$ käytetään logiikassa ja hilateoriassa, analyysissä joskus harvoin merkityksessä $a \vee b := \max\{a, b\}$).

Huomaa myös, että vaikka γ ja η ovat kuvauksia, yhdistetyn polun $\gamma \vee \eta$ kohdalla kyse ei ole kuvausten yhdistämisestä. Englanniksi polkujen yhdistäminen tunnetaan nimellä *juxtaposition of paths* tai *concatenation of paths*, kuvausten yhdistäminen *composition of mappings*, ja että polkujen yhdistäminen menee "kirjoitusjärjestyksessä" (γ kuljetaan ensin, vasta sitten η) toisin kuin kuvausten f ja g yhdistäminen: yhdistetyssä kuvauksesssa $f \circ g$ jälkimmäinen kuvaus g operoi ensin.

Jos γ ja η ovat teitä, myös $\gamma \vee \eta$ on tie. Erityisesti siis, jos γ ja η ovat jatkuvasti differentioituvia, yhdistetty polku $\gamma \vee \eta$ on tie.

Jos γ_j, $j \in \{1, \dots, k\}$, ovat janapolkuja, joille polun γ_j päätepiste on aina sama kuin polun γ_{j+1} lähtöpiste (siis $\gamma_j(t) = (1-t)\, z_j + t\, z_{j+1}$), polku

$$\gamma_1 \vee (\gamma_2 \vee (\cdots \vee \gamma_k)) =: \gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_k$$

on tie, jonka jälki on pistejonon $(z_1, \dots, z_{k+1})$ määräämä murtoviiva.

MÄÄRITELMÄ 3.8. Olkoot $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ ja $\eta\colon [c, d] \to \mathbb{C}$ jatkuvasti differentioituvia polkuja. Sanotaan, että *polku γ on ekvivalentti polun η kanssa*, jos on olemassa jatkuvasti derivoituva bijektio $h\colon [c, d] \to [a, b]$ siten, että

(i) $h'(u) \neq 0$ kaikille $u \in [c, d]$ ja
(ii) $\gamma(h(u)) = \eta(u)$ kaikille $u \in [c, d]$.

Kuvaus h on ekvivalenssin välittävä *parametrinvaihto*.

Jos $h'(u) > 0$ kaikille $u \in [c, d]$, parametrinvaihto h on *suunnan säilyttävä*, ja jos $h'(u) < 0$ kaikille $u \in [c, d]$, parametrinvaihto h on *suunnan kääntävä*.

ESIMERKKEJÄ 3.9. a) Olkoot $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_0$, sekä $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := (1-t)\, z_0 + t\, z_1$, pisteitä z_0 ja z_1 yhdistävä janapolku. Kun määritellään $h(u) := \frac{u}{|z_1 - z_0|}$ ja $\eta(u) := \gamma(h(u))$, kun $u \in [0, |z_1 - z_0|]$, on $h\colon [0, |z_1 - z_0|] \to [0, 1]$ aidosti kasvava bijektio, jolle $h'(u) = \frac{1}{|z_1 - z_0|} \neq 0$. Määritelmän nojalla η ja γ ovat ekvivalentteja ja h suunnan säilyttävä parametrin vaihto. Polulle η on $\eta'(u) = \gamma'(h(u))\, h'(u) = \frac{z_1 - z_0}{|z_1 - z_0|}$, joten $|\eta'(u)| = 1$.

b) Olkoot $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $r > 0$ sekä $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := z_0 + r\, e^{i\,t}$, z_0-keskinen, r-säteinen ympyrän kehä. Kun määritellään $h(u) := \frac{u}{r}$ ja $\eta(u) := \gamma(h(u))$, kun $u \in [0, 2\pi\, r]$, on $h\colon [0, 2\pi\, r] \to [0, 2\pi]$ aidosti kasvava bijektio, jolle $h'(u) = \frac{1}{r} \neq 0$. Määritelmän nojalla η ja γ ovat ekvivalentteja ja h suunnan säilyttävä parametrin vaihto. Polulle η on $\eta'(u) = \gamma'(h(u))\, h'(u) = \frac{r\, i\, e^{i\, u/r}}{r} = i\, e^{i\, u/r}$, joten $|\eta'(u)| = 1$.

Muista: Jatkuvasti differentioituvan *polun $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ pituus* on

$$\ell(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

Polun γ kaarenpituusparametri $s\colon [a, b] \to [0, \ell(\gamma)]$ määritellään kaavalla

$$s(t) := \int_a^t |\gamma'(\tau)|\, d\tau.$$

Lause 3.10 (Kaarenpituusparametrisointi). *Olkoot* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *sileä polku ja* $s\colon [a,b] \to [0,\ell(\gamma)]$ *sen kaarenpituusparametri. Tällöin* s *on suunnan säilyttävä parametrinvaihto polkujen* γ *ja* $\eta := \gamma \circ s^{-1}$ *välillä. Polku* η *on* yksikkövauhtinen, *t.s.* $|\eta'(u)| = 1$ *kaikille* $u \in [0,\ell(\gamma)]$. *Sanotaan, että* polku η on saatu polusta γ parametrisoimalla γ kaarenpituuden suhteen.

Todistus. Koska γ on jatkuvasti differentioituva, on s jatkuvasti differentioituva ja $s'(t) = |\gamma'(t)|$. Oletuksen nojalla $s'(t) > 0$ kaikille $t \in [a,b]$, joten s on aidosti kasvava. Koska $s(0) = 0$ ja $s(b) = \ell(\gamma)$, on s aidosti kasvava bijektio $[a,b] \to [0,\ell(\gamma)]$.

Olkoot $h := s^{-1}\colon [0,\ell(\gamma)] \to [a,b]$ ja $\eta\colon [0,\ell(\gamma)] \to \mathbb{C}$, $\eta(u) := \gamma(h(u))$.

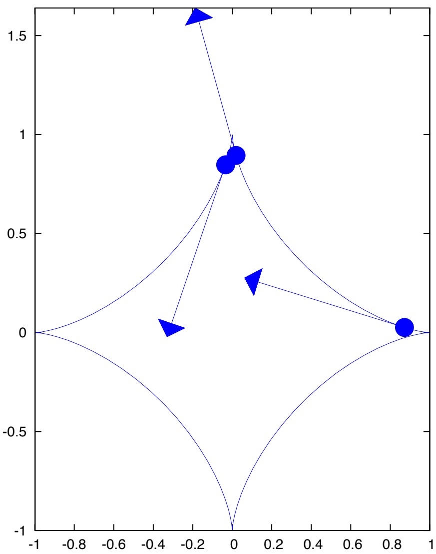
Tällöin $h'(u) = 1/s'(t) > 0$, kun $s(t) = u$ eli $t = h(u)$, joten h on suunnan säilyttävä parametrinvaihto, γ ja η ovat ekvivalentteja, ja

$$\eta'(u) = \gamma'(h(u))\,h'(u) = \frac{\gamma'(t)}{s'(t)}.$$

Siis $|\eta'(u)| = |\gamma'(t)|/s'(t) = 1$. $\square$

Huomautus 3.11 (Kaarenpituusparametrisointi paloittain sileälle polulle.). Myös paloittain sileä polku γ on mahdollista parametrisoida kaarenpituuden avulla, mutta tällöin polkujen ekvivalenttisuuden ja parametrinvaihdon käsitteitä pitäisi yleistää. Esimerkiksi parametrinvaihdolle h pitäisi sallia muuttujanarvoja u, joissa h ei ole derivoituva. Tarkastellaan esimerkkinä *astroidipolkua*

$\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := \cos^3 t + i\,\sin^3 t$.



Polku γ on jatkuvasti differentioituva, mutta ei sileä, koska $\gamma'(t) = 0$, kun $t = k\,\frac{\pi}{2}$, $k \in \{0,1,2,3,4\}$. Polun rajoittuman $\gamma|_{[0,\frac{\pi}{2}]}$ pituus on $\frac{3}{2}$ (HT) ja kaarenpituusparametri $s(t) = \frac{3}{2}\sin^2 t$ (HT). (Tässä funktiolle s sallitaan $s'(0) = 0$ ja $s'(\frac{\pi}{2}) = 0$; s on nytkin aidosti kasvava.) Kun kaarenpituutta jatketaan, pitää välillä $[\frac{\pi}{2},\pi]$ asettaa $s(t) := \frac{3}{2} + \int_{\pi/2}^t |\gamma'(\tau)|\,d\tau = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos^2 t$ (HT). Edelleen $s(t) := 3 + \int_\pi^t |\gamma'(\tau)|\,d\tau = 3 + \frac{3}{2}\sin^2 t$, kun $t \in [\pi,\frac{3\pi}{2}]$, ja $s(t) := \frac{9}{2} + \int_{3\pi/2}^t |\gamma'(\tau)|\,d\tau = \frac{9}{2} + \frac{3}{2}\cos^2 t$, kun $t \in [\frac{3\pi}{2},2\pi]$. Näin saadaan kaarenpituusparametri $s\colon [0,2\pi] \to [0,4\cdot\frac{3}{2}] = [0,6]$.

Huomaa, että yksikkövektoriksi normeeratulla tangenttivektorilla $\gamma'(t)/|\gamma'(t)|$ on raja-arvot

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = i \quad \text{ja} \quad \lim_{t\to\frac{\pi}{2}+} \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = -i.$$

Määritelmä 3.12. Olkoot $g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio ja $u(t) := \operatorname{Re} g(t)$ ja $v(t) := \operatorname{Im} g(t)$, kun $t \in [a,b]$. *Funktion g integraali välin $[a,b]$ suhteen* määritellään kaavalla

$$\int_a^b g(t)\,dt := \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt.$$

Määritelmä 3.13 (Tieintegraali). Olkoot $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ jatkuvasti differentioituva polku ja $f\colon |\gamma| \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio. *Funktion f kompleksinen käyräintegraali polun γ suhteen* määritellään kaavalla

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

Yleisemmin, jos $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ on tie, valitaan välin $[a,b]$ jako $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$ siten, että $\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$ on jatkuvasti differentioituva kaikille $j \in \{1,\ldots,k\}$. Tällöin *funktion f kompleksinen käyräintegraali tien γ suhteen* on

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \sum_{j=1}^k \int_{\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

Jos γ on umpinainen, merkitään

$$\oint_\gamma f(z)\,dz := \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Huomautus 3.14. Merkintää $\oint_\gamma f(z)\,dz$ ei siis käytetä muille kuin umpinaisten teiden eli piirien suhteen lasketuille kompleksisille käyräintegraaleille. Kompleksisen käyräintegraalin englanninkielinen nimitys on contour integral (joskus complex line integral), kun reaalisen vektorikentän käyräintegraalista käytettävä nimitys on curve integral.

Vektoricalculuksessa käsitelty reaaliarvoisen funktion käyräintegraali kaarenpituuden suhteen voidaan laajentaa kompleksiarvoisille funktioille:

Määritelmä 3.15. Olkoot $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ jatkuvasti differentioituva polku ja $f\colon |\gamma| \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio. *Funktion f käyräintegraali polun γ kaarenpituuden suhteen* määritellään kaavalla

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| := \int_\gamma f(z)\,ds := \int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt.$$

Kun $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ on tie, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$ välin $[a,b]$ jako siten, että $\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$ on jatkuvasti differentioituva kaikille $j \in \{1,\ldots,k\}$, ja $f\colon |\gamma| \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio, *funktion f käyräintegraali tien γ kaarenpituuden suhteen* määritellään kaavalla

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| := \int_\gamma f(z)\,ds := \sum_{j=1}^k \int_{\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}} f(z)\,|dz|.$$

Esimerkki 3.16. Olkoot $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ja $\eta\colon [0,1] \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$,

$$f(z) := \frac{1}{z}, \quad \gamma(t) := 3\,e^{2\pi i t} \quad \text{ja} \quad \eta(t) := 3\,e^{-4\pi i t}.$$

Tällöin polut γ ja η ovat sileitä, umpinaisia polkuja, joille on sama jälki $|\gamma| = |\eta| = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$, mutta

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_0^1 \frac{3\cdot 2\pi\, i\, e^{2\pi i t}}{3\, e^{2\pi i t}}\,dt = 2\pi\, i \quad \text{ja}\\ \int_\eta f(z)\,dz &= \int_0^1 \frac{3\cdot(-4\pi\, i)\, e^{-4\pi i t}}{3\, e^{-4\pi i t}}\,dt = -4\pi\, i.\end{aligned}$$

Lause 3.17. *Olkoot $\gamma\colon [a,b] \to A$ ja $\eta\colon [c,d] \to A$ teitä joukossa $A \subset \mathbb{C}$, $f\colon A \to \mathbb{C}$ ja $g\colon A \to \mathbb{C}$ jatkuvia funktioita ja $c \in \mathbb{C}$. Tällöin*

(i) $\int_\gamma (f(z) + g(z))\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\gamma g(z)\,dz$;
(ii) $\int_\gamma c\, f(z)\,dz = c\int_\gamma f(z)\,dz$;
(iii) $\int_{\overleftarrow{\gamma}} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$;
(iv) *jos yhdistetty polku $\gamma \vee \eta$ on määritelty, on*

$$\int_{\gamma\vee\eta} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\eta f(z)\,dz;$$

(v) *jos polut γ ja η ovat ekvivalentit suunnan säilyttävällä parametrinvaihdolla, on $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\eta f(z)\,dz$, ja jos polut γ ja η ovat ekvivalentit suunnan kääntävällä parametrinvaihdolla, on $\int_\gamma f(z)\,dz = -\int_\eta f(z)\,dz$;*
(vi) *jos $|f(z)| \leqslant |g(z)|$ kaikille $z \in |\gamma|$, on*

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz\Big| \leqslant \int_\gamma |g(z)|\,|dz|.$$

Erityisesti $\big|\int_\gamma f(z)\,dz\big| \leqslant \int_\gamma |f(z)|\,|dz|$.

Todistus. Kohdat (i) ja (ii) HT.

(iii): Koska $\overleftarrow{\gamma}(t) = \gamma(a+b-t)$, on $\overleftarrow{\gamma}'(t) = -\gamma'(a+b-t)$, joten

$$\begin{aligned}\int_{\overleftarrow{\gamma}} f(z)\,dz &= -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))\,\gamma'(a+b-t)\,dt \overset{(*)}{=} \int_b^a f(\gamma(u))\,\gamma'(u)\,du\\ &\overset{(**)}{=} -\int_a^b f(\gamma(u))\,\gamma'(u)\,du = -\int_\gamma f(z)\,dz,\end{aligned}$$

missä kohdassa $(*)$ on käytetty muuttujanvaihtoa $a+b-t =: u$ (huomaa integrointirajojen muuttuminen) ja kohdassa $(**)$ sopimusta $\int_b^a \cdots = -\int_a^b \cdots$.

(iv): Oletetaan merkintöjen yksinkertaistamiseksi, että γ ja η ovat jatkuvasti differentioituvia (yleinen tapaus: HT). Tällöin yhdistetyn polun $\gamma \vee \eta$ mahdollinen eiderivoituvuuskohta on $t = b$ ja välille $[a, b+d-c]$ voidaan käyttää jakoa $t_0 := a$, $t_1 := b$ ja $t_2 := b+d-c$. Koska $(\gamma \vee \eta)'(t) = \gamma'(t)$, kun $t \in [a,b]$, ja $(\gamma\vee\eta)'(t) = \eta'(c+t-b)$, kun $t \in [b, b+d-c]$ (päätepisteissä toispuoleiset derivaatat), on

$$\int_{\gamma \vee \eta} f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt + \int_b^{b+d-c} f(\eta(c+t-b))\,\eta'(c+t-b)\,dt$$

$$\overset{(*)}{=} \int_\gamma f(z)\,dz + \int_c^d f(\eta(u))\,\eta'(u)\,du = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\eta f(z)\,dz,$$

missä kohdassa $(*)$ on käytetty muuttujanvaihtoa $c+t-b =: u$.

(v): Oletaan, että $\gamma(h(u)) = \eta(u)$, missä $h\colon [c,d] \to [a,b]$ on jatkuvasti derivoituva bijektio, jolle $h'(u) > 0$ kaikille $u \in [c,d]$. Tällöin ketjusäännön nojalla

$$\int_\eta f(z)\,dz = \int_c^d f(\eta(u))\,\eta'(u)\,du = \int_c^d f(\gamma(h(u)))\,\gamma'(h(u))\,h'(u)\,du$$

$$\overset{(*)}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\;dt = \int_\gamma f(z)\,dz,$$

missä kohdassa $(*)$ on käytetty muuttujanvaihtoa $h(u) =: t$. Huomaa, että kasvavalle funktiolle h on $h(c) = a$ ja $h(d) = b$.

Jos h on vähenevä, on $h(c) = b$ ja $h(d) = a$, joten edellisen laskun loppuosa muuttuu muotoon

$$\overset{(*)}{=} \int_b^a f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\;dt = -\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\;dt = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

(vi): Olkoon $\int_\gamma f(z)\,dz = r\,e^{i\theta}$, missä $r \geqslant 0$ ja $\theta \in (-\pi, \pi]$. Tällöin

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz\Big| = r = e^{-i\theta}\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma e^{-i\theta} f(z)\,dz = \int_a^b e^{-i\theta} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

Olkoon $e^{-i\theta} f(\gamma(t))\,\gamma'(t) = u(t) + i\,v(t)$, missä u ja v ovat reaaliarvoisia. Koska

$$r = \int_a^b e^{-i\theta} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$$

ja r on reaalinen, on $\int_a^b v(t)\,dt = 0$. Siis

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz\Big| = \int_a^b u(t)\,dt \leqslant \int_a^b |u(t)|\,dt \leqslant \int_a^b \big|e^{-i\theta} f(\gamma(t))\,\gamma'(t))\big|\,dt$$

$$= \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t))|\,dt \leqslant \int_a^b |g(\gamma(t))|\,|\gamma'(t))|\,dt = \int_\gamma |g(z)|\,|dz|. \qquad \square$$

Huomautuksia 3.18. a) Kompleksinen käyräintegraali on tavallisen reaalimuuttujan funktion integraalin yleistys: Kun f on määritelty reaaliakselin välillä $[a,b]$ ja $\gamma(t) := t$, kun $t \in [a,b]$, on $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(x)\,dx$. Lisäksi $\int_{\overleftarrow{\gamma}} f(z)\,dz = \int_b^a f(x)\,dx$. Kohdan (iv) kaava vastaa reaalimuuttujan funktion integraalien kaavaa $\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$, kun $\{x_0, x_1, x_2\} \subset [a,b]$. (Huomaa: lukujen x_0, x_1 ja x_2 ei tässä tarvitse olla suuruusjärjestyksessä).

b) Käyräintegraalista kaarenpituuden suhteen on syytä muistaa, että jos polut γ ja η ovat ekvivalentit, on $\int_\gamma f(z)\,ds = \int_\eta f(z)\,ds$ riippumatta siitä, onko parametrinvaihto suunnan säilyttävä vai suunnan kääntävä. Sen sijaan kohdan (iv) kaava ja kohdan (vi) epäyhtälö pätevät myös käyräintegraaleille kaarenpituuden suhteen: jos yhdistetty polku $\gamma \vee \eta$ on määritelty, on

$$\int_{\gamma\vee\eta} f(z)\,ds = \int_\gamma f(z)\,ds + \int_\eta f(z)\,ds;$$

ja jos $|f(z)| \leqslant |g(z)|$ kaikille $z \in |\gamma|$, on

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,ds\Big| \leqslant \int_\gamma |g(z)|\,ds;$$

erityisesti $\big|\int_\gamma f(z)\,ds\big| \leqslant \int_\gamma |f(z)|\,ds$.

c) Kohdasta (vi) saadaan toisinaan hyödyllinen arvio: Jos $|f(z)| \leqslant M$ kaikille $z \in |\gamma|$, on

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz\Big| \leqslant M\,\ell(\gamma).$$

Esimerkki 3.19 (Tärkeä). Olkoon $f(z) := e^{i\,z^2}$, kun $z \in \mathbb{C}$, ja $\gamma(t) := r\,e^{i\,t}$, kun $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Tässä r on positiivinen vakio. Osoitetaan, että

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz\Big| \leqslant \frac{\pi\,(1-e^{-r^2})}{4\,r}.$$

Merkitään $z = x + i\,y$. Tällöin

$$|e^{i\,z^2}| = |e^{i\,(x^2-y^2)-2\,x\,y}| = e^{-2\,x\,y}.$$

Kun $z = \gamma(t) = r\cos t + i\,r\sin t$, on

$$|f(z)| = |e^{i\,\gamma(t)^2}| = e^{-2\,r^2\cos t\,\sin t} = e^{-r^2\,\sin(2t)}.$$

Koska $|\gamma'(t)| = r$, saadaan edellisen lauseen kohdan (vi) nojalla

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz\Big| \leqslant \int_\gamma |f(z)|\,|dz| = \int_0^{\pi/4} e^{-r^2\,\sin(2t)}\,r\,dt \overset{(*)}{=} \frac{r}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-r^2\,\sin u}\,du,$$

missä kohdassa $(*)$ on käytetty sijoitusta $2t =: u$. Välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$ on voimassa $\sin u \geqslant \frac{2u}{\pi}$ (HT), joten

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,ds\Big| \leqslant \frac{r}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-r^2\,2u/\pi}\,du = \frac{\pi\,(1-e^{-r^2})}{4\,r}.$$

3.2. Primitiivit eli kantafunktiot

MÄÄRITELMÄ 3.20. Olkoot $G \subset \mathbb{C}$ avoin joukko ja $f\colon G \to \mathbb{C}$ annettu funktio. Jos on olemassa kompleksisesti differentioituva funktio $F\colon G \to \mathbb{C}$ siten, että $F'(z) = f(z)$ kaikille $z \in G$, on F *funktion f primitiivi* (tai *kantafunktio*) *joukossa G*.

HUOMAUTUKSIA 3.21. a) Jos F on funktion f primitiivi joukossa G, myös $F + c$ on funktion f primitiivi joukossa G jokaiselle vakiolle $c \in \mathbb{C}$. Kääntäen, jos F_1 ja F_2 ovat funktion f primitiivejä *alueessa* D, on $F_1 - F_2 =$ vakio (lause 2.13).

b) Primitiivi on kompleksisesti differentioituvana funktiona aina holomorfinen.

c) Funktiolla f voi olla primitiivi avoimessa joukossa G, mutta laajemmassa joukossa $G' \supset G$ välttämättä ei. (Esimerkki tällaisesta on seuraavan lauseen jälkeen.) Primitiivin olemassaolo on siis *globaali ominaisuus* (eli se riippuu funktion f **koko** määrittelyjoukosta) toisin kuin esimerkiksi differentioituvuus.

ESIMERKKEJÄ 3.22. a) Jokaisella polynomilla on primitiivi koko kompleksitasossa. Polynomin $p(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ primitiiviksi käy $P(z) := \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} z^n + \cdots + \frac{a_1}{2} z^2 + a_0 z$.

b) Eksponenttifunktion $z \mapsto e^z$ primitiiviksi käy e^z.

Seuraava lause yleistää analyysin peruslauseen ("derivaatan integraali on päätearvosijoitus") holomorfisten funktioiden käyräintegraaleille:

LAUSE 3.23. *Olkoot $G \subset \mathbb{C}$ avoin joukko, $f\colon G \to \mathbb{C}$ jatkuva ja $\gamma\colon [a, b] \to G$ joukon G tie. Oletetaan, että on olemassa holomorfinen funktio $F\colon G \to \mathbb{C}$, jolle $F'(z) = f(z)$ kaikille $z \in G$. Tällöin*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Erityisesti, jos jatkuvalla funktiolla f on primitiivi joukossa G ja γ on joukon G umpinainen tie, on

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

TODISTUS. Oletetaan, että γ on jatkuvasti differentioituva. Vektorifunktioiden ketjusäännön nojalla

$$(F \circ \gamma)'(t) = DF(\gamma(t))\gamma'(t),$$

missä $DF(z)$ on funktion F Jacobin matriisi pisteessä z. Kompleksisesti differentioituvalle funktiolle $DF(z)h = F'(z)h$ kaikille $h \in \mathbb{C}$ (eli Jacobin matriisin $DF(z)$ ja vektorin $h \in \mathbb{R}^2$ tulo on Cauchyn ja Riemannin yhtälöiden perusteella sama kuin kompleksilukujen $F'(z)$ ja h tulo; katso lauseen 2.9 eli $\mathbb{R}D\mathbb{C}D$ todistuksesta). Siis $(F \circ \gamma)'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$, joten analyysin peruslauseen nojalla

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)\, dt = \Big|_a^b (F \circ \gamma)(t). \qquad \square$$

ESIMERKKI 3.24. Olkoot $G := \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ ja $G' := \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Logaritmin päähaara $z \mapsto \operatorname{Log} z$ on kompleksisesti differentioituva joukossa G ja $\frac{d \operatorname{Log} z}{dz} = \frac{1}{z}$, joten logaritmin päähaara on funktion $z \mapsto 1/z$ primitiivi joukossa G.

Mutta joukossa G' funktiolla $z \mapsto 1/z$ ei ole primitiiviä. Nimittäin, jos F olisi primitiivi, olisi edellisen lauseen nojalla

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z} = 0$$

jokaiselle umpinaiselle tielle γ, jolle $|\gamma| \subset G'$. Kun valitaan $\gamma(t) := e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$, on γ joukon G' umpinainen tie, jolle

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{i\,e^{i\,t}}{e^{i\,t}}\,dt = 2\pi\,i \neq 0.$$

Edellisen lauseen jälkimmäinen osa, käyräintegraalin häviäminen kaikille umpinaisille teille, on myös riittävä ehto primitiivin olemassaololle yhtenäisessä avoimessa joukossa:

Lause 3.25 (Primitiivin karakterisointi). *Olkoon $f\colon D \to \mathbb{C}$ **alueen** $D \subset \mathbb{C}$ jatkuva funktio. Tällöin seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitäviä:*

(i) *funktiolla f on primitiivi alueessa D;*
(ii) *funktion f käyräintegraali $\int_\gamma f(z)\,dz$ riippuu vain tien $\gamma\colon [a,b] \to D$ päätepisteistä $\gamma(a)$ ja $\gamma(b)$;*
(iii) *funktion f käyräintegraali $\oint_\gamma f(z)\,dz$ häviää jokaiselle umpinaiselle tielle γ.*

Todistus. (i)⇒(ii) ja (i)⇒(iii): Seuraavat edellisestä lauseesta 3.23.

(iii)⇒(ii): Olkoot $\gamma\colon [a,b] \to D$ ja $\eta\colon [c,d] \to D$ teitä, joille $\gamma(a) = \eta(c)$ ja $\gamma(b) = \eta(d)$. Tällöin $\vartheta := \gamma \vee \overleftarrow{\eta}$ on joukon D umpinainen tie. Oletuksen (iii) nojalla on $\oint_\vartheta f(z)\,dz = 0$. Siis

$$0 = \oint_\vartheta f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz - \int_\eta f(z)\,dz$$

Kohdan (ii) väite seuraa tästä.

(ii)⇒(i): Jos käyräintegraali $\int_\gamma f(z)\,dz$ riippuu vain polun γ päätepisteistä, voidaan primitiivi määritellä kaavalla[3]

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(z)\,dz,$$

missä $\gamma_z\colon [a,b] \to D$ on murtoviivapolku, jolle $\gamma_z(b) = z$ ja $\gamma_z(a) = z_0 \in D$ on kiinnitetty.

Osoitetaan, että $F'(z) = f(z)$ kaikille $z \in D$.

Koska D on avoin, on jokaiselle $z \in D$ olemassa $\delta > 0$ siten, että $B(z;\delta) \subset D$. Olkoon $h \in \mathbb{C}$, $h \neq 0$ ja $|h| < \delta$. Olkoon γ_z murtoviivapolku pisteestä z_0 pisteeseen z.

[3]Koska D on alue, voidaan sen mikä tahansa piste z yhdistää pisteeseen z_0 murtoviivalla; katso lause 1.44. Integraalia $\int_{\gamma_z} f(z)\,dz$ voi käyttää määrittelemään funktion ilman oletusta, että käyräintegraali riippuu vain polun päätepisteistä. Määritelty funktio ei tällöin kuitenkaan ole pelkästään pisteen z funktio, vaan muuttujana on koko polku γ_z, t.s. funktion määrittelyjoukko olisi kaikkien pisteestä z_0 alkavien joukon D teiden muodostama joukko. Kohdan (ii) oletus takaa sen, että integraalin arvo määrittelee muuttujan z funktion $D \to \mathbb{C}$.

Olkoon η janapolku pisteestä z pisteeseen $z+h$. Tällöin yhdistetty polku $\vartheta := \gamma_z \vee \eta$ on murtoviivapolku pisteestä z_0 pisteeseen $z+h$. Koska oletuksen nojalla käyräintegraali $\int_\gamma f(z)\,dz$ riippuu vain polun γ päätepisteistä, voidaan arvo pisteessä $z+h$ laskea siis polun ϑ avulla eli

$$F(z+h) = \int_\vartheta f(z)\,dz = \int_{\gamma_z} f(z)\,dz + \int_\eta f(z)\,dz = F(z) + \int_\eta f(z)\,dz.$$

Janapolulla on parametriesitys $\eta(t) = (1-t)\,z + t\,(z+h) = z + t\,h$, $t \in [0,1]$, joten

$$\int_\eta f(z)\,dz = \int_0^1 f(z+t\,h)\,h\,dt.$$

Funktion F erotusosamäärälle saadaan

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_\eta f(z)\,dz = \int_0^1 f(z+t\,h)\,dt.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska f on jatkuva pisteessä z, on olemassa $\delta' >$ siten, että $\delta' < \delta$ ja $|f(z') - f(z)| \leqslant \varepsilon$, kun $|z'-z| \leqslant \delta'$. Erityisesti $|f(z+t\,h) - f(z)| \leqslant \varepsilon$ kaikille $t \in [0,1]$ ja kaikille $h \in \mathbb{C}$, joille $0 < |h| \leqslant \delta'$. Tällöin

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \int_0^1 f(z+t\,h)\,dt = \int_0^1 (f(z+t\,h) - f(z))\,dt + \int_0^1 f(z)\,dt,$$

joten

$$\Big|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\Big| = \Big|\int_0^1 (f(z+t\,h)-f(z))\,dt\Big| \leqslant \int_0^1 |f(z+t\,h)-f(z)|\,dt \leqslant \varepsilon.$$

Tämä tarkoittaa, että funktion F erotusosamäärällä on raja-arvo ja että raja-arvo on $f(z)$. Implikaatio (ii)$\Rightarrow$(i) on näin todistettu. $\square$

Yhtäpitävien ehtojen listaan voitaisiin vielä lisätä:

(iv) *Funktion f käyräintegraali $\oint_\gamma f(z)\,dz$ häviää jokaiselle umpinaiselle murtoviivapolulle γ;*

(v) *funktion f käyräintegraali $\oint_\gamma f(z)\,dz$ häviää jokaiselle koordinaatiakselien suuntaiselle umpinaiselle murtoviivapolulle γ.*

Koska jokainen murtoviivapolku on tie, implikaatiot (iii)$\Rightarrow$(iv) ja (iv)$\Rightarrow$(v) ovat selviä. Implikaatio (iv)$\Rightarrow$(i) seuraa edellisen lauseen todistuksesta; todistuksessa määritelty primitiivi F määriteltiin murtoviivapolkujen avulla. Implikaation (v)$\Rightarrow$(vi) selvittäminen jätetään lukijan tehtäväksi (muista lause 1.44 ja sen todistus).

Edellinen lause osoittaa suunnan, josta primitiivin *olemassaolo* löytyy: funktion f käyräintegraalin pitää hävitä jokaiselle umpinaiselle tielle (tai jokaiselle umpinaiselle murtoviivapolulle). Jos tämä ehto toteutuu, lause antaa myös primitiivin (lisännäistä vakiota vaille):

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(z)\,dz,$$

missä $\gamma_z\colon [a,b] \to D$ on murtoviivapolku pisteestä z_0 pisteeseen z. Ehtojen (ii) ja (iii) yhtäpitävyyden nojalla murtoviivapolun sijasta primitiivi voidaan konstruoida myös minkä tahansa muun pisteet z_0 ja z yhdistävän tien γ_z avulla.

Myöhemmin ($\rightarrow$ Cauchyn integraalilause kolmioille) osoitetaan, että käyräintegraali häviää ainakin riittävän yksikertaisten alueiden tapauksessa. Tämän käsittelyyn siirrytään seuraavan syrjähypyn jälkeen.

Kurssin Vektoricalculus 2 käyneet tuntevat *vektorikentän potentiaalin* käsitteen: Olkoon $V = (V_1, V_2)\colon D \to \mathbb{R}^2$ annettu kuvaus eli alueen D *vektorikenttä*. Funktio $u\colon D \to \mathbb{R}$ on *vektorikentän V potentiaali alueessa D*, jos $\nabla u(z) = V(z)$ kaikille $z \in D$, t.s. $\frac{\partial u}{\partial x}(z) = V_1$ ja $\frac{\partial u}{\partial y}(z) = V_2$ kaikille $z \in D$.

Eulerin ja Schwarzin lauseesta[4] seuraa: Jos V on jatkuvasti differentioituva ja sillä alueessa D on potentiaali u, on

$$\frac{\partial V_1}{\partial y}(z) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}(z) = \frac{\partial V_2}{\partial x}(z).$$

Välttämätön ehto potentiaalin olemassaololle on siis ns. *integroituvuusehto*

$$\frac{\partial V_1}{\partial y}(z) = \frac{\partial V_2}{\partial x}(z).$$

Tätä on hyvä verrata kompleksisen primitiivin käsitteeseen: Jos $F = u + i\,v$ on funktion f primitiivi alueessa D, on F holomorfinen, joten sen reaali- ja imaginaariosa toteuttavat Cauchyn ja Riemannin yhtälöt

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z).$$

Vektorikenttäkielellä Cauchyn ja Riemannin yhtälöt voidaan ilmaista sanomalla, että kumpikin vektorikentistä $\overline{F} = u - i\,v$ ja $i\,\overline{F} = v + i\,u$ toteuttaa integroituvuusehdon.

Lisäksi on hyvä huomata, että funktion $f = u + i\,v$ kompleksinen käyräintegraali polun $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ suhteen reaalisten vektorikenttien käyräintegraalien avulla esitettynä on

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b \big(u(\gamma(t))\,\gamma_1'(t) - v(\gamma(t))\,\gamma_2'(t)\big)\,dt + i\int_a^b \big(u(\gamma(t))\,\gamma_2'(t) + v(\gamma(t))\,\gamma_1'(t)\big)\,dt \\ &= \int_\gamma \big(u\,dx - v\,dy\big) + i\int_\gamma \big(u\,dy + v\,dx\big) = \int_\gamma V\cdot d\vec{s} + i\int_\gamma W\cdot d\vec{s},\end{aligned}$$

missä $V(z) := (u(z), -v(z))$, $W(z) := (v(z), u(z))$.

Vastaavalla tavalla kuin kompleksisen primitiivin kohdalla, aina potentiaalia ei ole olemassa vaikka välttämätön ehto, integroituvuusehto toteutuisi. Esimerkiksi, kun $D := \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ ja $V\colon D \to \mathbb{R}^2$,

$$V(x,y) := \Big(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\Big),$$

---

[4] Tulos $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}(z)$ tunnetaan *Schwarzin lauseena* tai *Eulerin ja Schwarzin lauseena*, harvemmin *Clairaut'n lauseena*; Leonhard Euler (1707–1783), Hermann Amandus Schwarz (1843–1921; sama kuin Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälön Schwarz) ja Alexis Claude Clairaut (1713–1765). Tuloksen on varmaan ensimmäisenä oivaltanut Euler (*Institutiones calculi differentialis*, 1755), tosin varsin heuristisin perusteluin; Schwarzin todistus 1873 lienee ensimmäinen nykystandardien mukainen.

integroituvuusehto toteutuu (tod: HT), mutta potentiaalia ei ole olemassa: Olkoon $\gamma\colon [0,2\pi] \to D$, $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$. Tällöin γ on umpinainen ja

$$\int_\gamma V \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \Big(\frac{-\sin t\,(-\sin t)}{\cos^2 t + \sin^2 t} + \frac{\cos t \cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \Big)\, dt = 2\pi.$$

Se, että potentiaalia tällaisessa tilanteessa ei ole, on seurausta tuloksesta:

Lause (Potentiaalin karakterisointi). *Olkoon $V\colon D \to \mathbb{R}^2$ alueen $D \subset \mathbb{R}^2$ jatkuva vektorikenttä. Tällöin seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitäviä:*

(i) *vektorikentällä V on potentiaali alueessa D;*
(ii) *vektorikentän V käyräintegraali $\int_\gamma V \cdot d\vec{s}$ riippuu vain tien $\gamma\colon [a,b] \to D$ päätepisteistä $\gamma(a)$ ja $\gamma(b)$;*
(iii) *vektorikentän V käyräintegraali $\int_\gamma V \cdot d\vec{s}$ häviää jokaiselle umpinaiselle tielle $\gamma\colon [a,b] \to D$;*
(iv) *vektorikentän V käyräintegraali $\int_\gamma V \cdot d\vec{s}$ häviää jokaiselle umpinaiselle murtoviivapolulle $\gamma\colon [a,b] \to D$.*

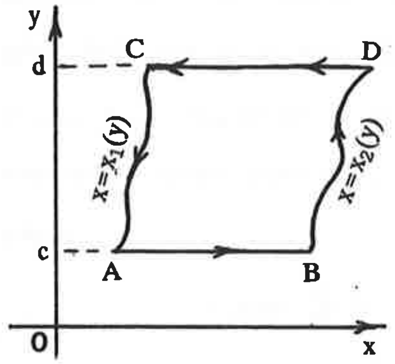
Jos γ on paloittain jatkuvasti differentioituva, positiivisesti suunnistettu Jordan-polku ja A polun γ rajoittama alue niin, että $\overline{A} \subset D$, saadaan Greenin lauseen avulla

$$\int_\gamma \big(u\,dx - v\,dy\big) + i \int_\gamma \big(u\,dy + v\,dx\big) = -\int_A \Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big)\, d(x,y) + i \int_A \Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)\, d(x,y).$$

Jos funktio $f = u + i\,v$ on jatkuvasti differentioituva ja holomorfinen alueessa D, sen reaali- ja imaginaarisosa toteuttavat Cauchyn ja Riemannin yhtälöt, joten

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \big(u\,dx - v\,dy\big) + i \int_\gamma \big(u\,dy + v\,dx\big) = 0.$$

Seuraavaksi on tarkoitus osoittaa tämä *Cauchyn integraalilauseena* tunnettu tulos vetoamatta reaalisten käyräintegraalien teoriaan ja Greenin lauseeseen (katso sivuja 57→56→55). Aluksi (kurssilla Kompleksianalyysi 1) tarkastellaan Cauchyn integraalilauseen ns. lokaalia versiota, jossa rajoitutaan kiekossa ja muissa yksinkertaisissa alueissa määriteltyihin funktioihin. Cauchyn integraalilauseen pätevyyttä yleisemmille alueille selvitellään kurssilla Kompleksianalyysi 2.



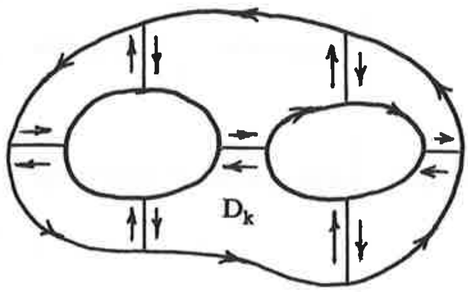
באופן דומה לא׳ נקבל

$$\text{(3)} \quad \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy = \int_{ABCDA} Q(x,y)dy$$

שלב ג׳: מקרה כללי.

אם תחום D מקיים את התנאים א׳ וב׳ אזי מנוסחאות (2) ו-(3) מקבלים את (1).

נניח עכשיו שאת תחום D ניתן לחלק למספר סופי של תחומים D_k המקיימים את התנאים א׳ וב׳.



הנוסחה (1) נובעת מהשיקולים הבאים:

לתחום D_k בעל שפה Γ_k מתקיימת נוסחה (1), זאת אומרת:

$$\iint_{D_k} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy = \int_{\Gamma_k} Pdx+Qdy$$

מתכונות האינטגרלים נובע כי

$$\sum_k \iint_{D_k} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy = \int_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy$$

מצד שני סכום האינטגרלים הקוויים $\sum_k \int_{\Gamma_k} Pdx+Qdy$ שווה ל- $\int_\Gamma Pdx+Qdy$

משום שאינטגרלים לפי חלקים משותפים של השפה Γ_k מצטמצמים, כי הם מחושבים לפי כיוונים מנוגדים (ראה ציור). זה משלים את ההוכחה.

הוכחת המקרה כאשר תחום D לא ניתן לפירוק לסכום התחומים המקיימים את התנאים א׳ וב׳ יוצאת ממסגרת הקורס. ■

בדוגמאות הבאות נשתמש בנוסחת גרין לחישוב אינטגרלים קוויים.

דוגמה 12: חשב $\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r}$ כאשר

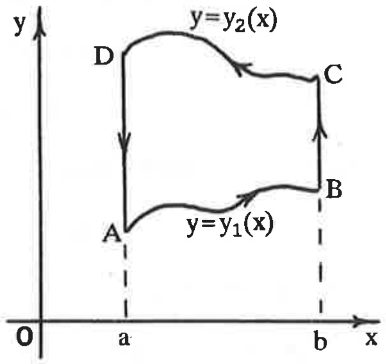
א. $\vec{F} = (e^{x^2} - x^2y)\hat{i} + (xy^2 - e^{y^2})\hat{j}$ ו-$L: x^2+y^2 = R^2$ בכיוון החיובי.

Greenin lause ja sille todistus yksinkertaisessa tapauksessa. (Todistus päättyy tähän ja alkaa parin sivun päästä; katso alkuperäisiä sivunumeroita).

הוכחה: נוכיח את המשפט בשלבים:

שלב א': נניח ש- D הוא תחום הנימצא בין הקווים $y=y_1(x)$ ו- $y=y_2(x)$ ו- $x=a$, $x=b$, ובנוסף כל קו ישר המקביל לציר y חותך את השפה של D בלא יותר משתי נקודות (ראה ציור).

נחשב:



$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy =$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy =$$

$$= \int_a^b P(x,y_2(x))dx - \int_a^b P(x,y_1(x))dx$$

קל לראות ש- $\int_a^b P(x,y_2(x))dx$ הוא אינטגרל קווי לאורך המסלול $y_2(x)$

בכיוון מנקודה D לנקודה C ולכן $\int_a^b P(x,y_2(x))dx = -\int_{CD} P(x,y)dx$

באופן דומה $\int_a^b P(x,y_1(x))dx = \int_{AB} P(x,y)dx$ לאורך המסלול $y=y_1(x)$

והיות ו- $\int_{BC} P(x,y)dx=0$ ו- $\int_{DA} P(x,y)dx=0$ לאורך הקווים $x=b$ ו-$x=a$

בהתאמה, נקבל לבסוף ש:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = -\int_{AB} Pdx - \int_{BC} Pdx - \int_{CD} Pdx - \int_{DA} Pdx = -\int_{ABCDA} P(x,y)dx \qquad (2)$$

שלב ב': נניח עתה ש-D הוא תחום הנימצא בין הקווים $x=x_1(y)$, $x=x_2(y)$ ו-$y=c$, $y=d$, וכל קו ישר המקביל לציר x חותך את התחום בלא יותר משתי נקודות (ראה ציור).

.9 חשב $\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r}$ כאשר $\vec{F}(x,1,z^2)$, $L:\{x^2+y^2+z^2=16,\quad x^2+y^2=4x,\quad z\geq 0\}$

.10 חשב $\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r}$ כאשר $\vec{F}=2y\hat{i}+3y\hat{j}$ ו-L הוא קו, $y=\sin x$

מנקודה $(0,0)$ עד $(\frac{\pi}{2},1)$.

.11 חשב $\int_C xydx+yzdy+zxdz$ כאשר C הוא חצי המעגל $z=x$, $x^2+y^2+z^2=8x$,

$y>0$ בכיוון החיובי.

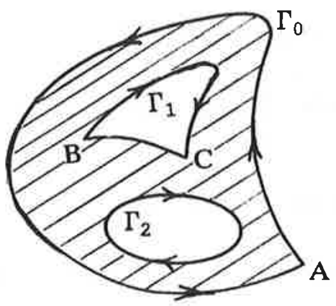
.12 הוכח כי $\left|\int_L Pdx+Qdy\right|\leq M\cdot l$ כאשר $M=\max_L \sqrt{[P(x,y)]^2+[Q(x,y)]^2}$

ו-l הוא אורך הקשת של L.

.3 משפט גרין (G. Green)

בסעיף זה נמצא קשר בין אינטגרל קווי במישור ואינטגרל כפול.

יהי D תחום קשיר בעל שפה Γ (מורכב ממספר סופי של קווים סגורים וחלקים במקוטעין*) בכיוון החיובי, זאת אומרת בכיוון כזה שבמשך התנועה לאורך Γ התחום D ישאר מצד שמאל.



דוגמה 11: בציור D בתחום קשיר ו-Γ מורכב משלושת החלקים סגורים וחלקים במקוטעין $\Gamma_2,\Gamma_1,\Gamma_0$ עם נקודת סינגולריות A,B,C בעל כיוון חיובי המודגש על ידי החיצים.

משפט 1: יהי D תחום (קשיר ופתוח) בעל שפה Γ בכיוון החיובי. יהיה שדה וקטורי $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\hat{i}+Q(x,y)\hat{j}$ שייך למחלקה C^1 ב- $\bar{D}$ (ראה הגדרה 2 בסעיף 13.1), אזי מתקיים

$$\int_\Gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \tag{1}$$

---

* קו הוא חלק בקיטעון אם יש בו רק מספר סופי של נקודות סינגולריות (ראה סעיף 14.2).

Greenin lauseen todistus alkaa tästä. Greenin lauseen kaava on (1); $\Gamma := \partial D$

LUKU 4

Lokaali Cauchyn integraalilause

Merkintöjä: Kun z_1, z_2 ja z_3 ovat kompleksitason keskenään eri pisteitä, jotka eivät ole samalla suoralla, merkitään

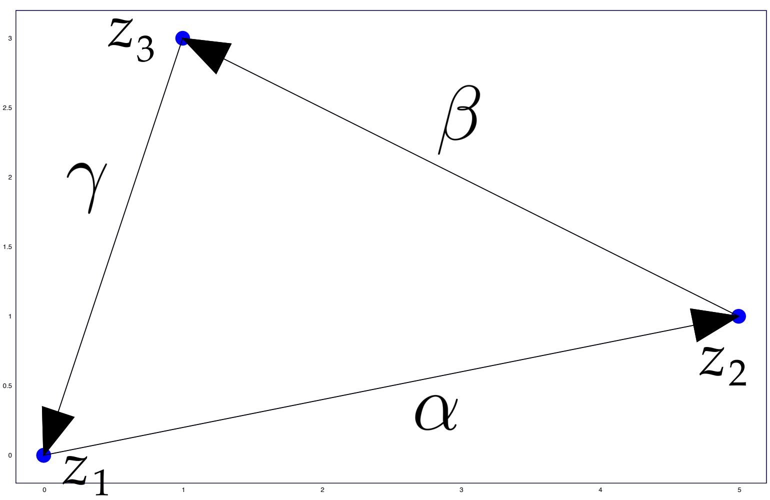
$$\Delta(z_1, z_2, z_3) := \{t_1\, z_1 + t_2\, z_2 + t_3\, z_3 \mid t_1 \geqslant 0,\ t_2 \geqslant 0,\ t_2 \geqslant 0 \ \text{ ja } \ t_1 + t_2 + t_3 = 1\},$$

pisteiden z_1, z_2 ja z_3 määräämä kolmio. Kolmion kärjet z_j oletetaan indeksoidun niin, että kiertojärjestys $z_1 \to z_2 \to z_3 \to z_1$ on positiivinen (eli vastapäivään). Kolmioon $\Delta = \Delta(z_1, z_2, z_3)$ liittyen olkoot $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $\beta\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ ja $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ kolmion reunojen janapolkuparametrisoinnit,

$$\alpha(t) := (1-t)\, z_1 + t\, z_2, \quad \beta(t) := (1-t)\, z_2 + t\, z_3 \quad \text{ja} \quad \gamma(t) := (1-t)\, z_3 + t\, z_1.$$

Edelleen olkoon $\delta\colon [0,3] \to \mathbb{C}$ kolmion Δ reunan $\partial\Delta$ parametrisointi, $\delta := \alpha \vee \beta \vee \gamma$. Kun $f\colon \Delta \to \mathbb{C}$ on jatkuva, merkitään[2]

$$\oint\limits_{\partial^+\Delta} f(z)\, dz := \oint\limits_{\delta} f(z)\, dz$$



Kuva 1. Kolmio Δ ja sen reunan $\partial\Delta$ parametrisoivat janapolut α, β ja γ.

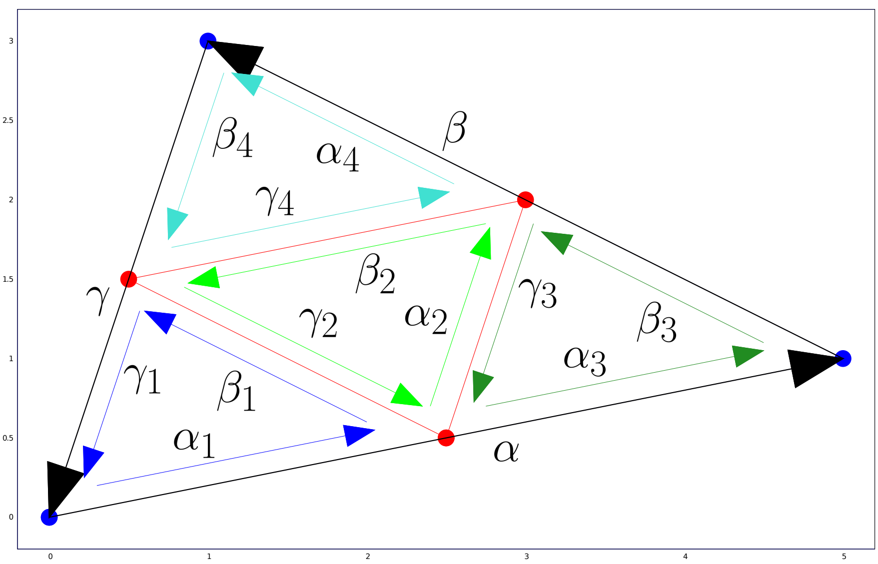
[1]Viimeksi muutettu 02.02.2020.

[2]Cauchyn integraalilause kolmioille ei muotoilunsa puolesta välttämättä tarvitse reunalle $\partial\Delta$ polun δ määräämää kiertosuuntaa. Lauseen todistuksessa syntyvien kolmioiden Δ_j ja $\Delta_{(n)}$ reunojen kiertosuunta pitää kuitenkin valita alkuperäisen kolmion Δ reunan kiertosuunnan mukaiseksi. Tämän takia kaikki kiertosuunnat valitaan positiivisiksi. Merkintä $\partial^+\Delta$ muistuttaa reunan suunnasta.

Lemma 4.1 (Cauchyn integraalilause kolmioille). *Olkoot $G \subset \mathbb{C}$ avoin joukko, $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorfinen funktio ja $\Delta \subset G$ kolmio. Tällöin*

$$\oint_{\partial^+\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

Todistuksen ideat. Olkoot z_1', z_2' ja z_3' janojen $J(z_1, z_2)$, $J(z_2, z_3)$ ja $J(z_3, z_1)$ keskipisteet, ja Δ_1, Δ_2, Δ_3 ja Δ_4 pisteiden z_1, z_2, z_3, z_1', z_2' ja z_3' avulla muodostetut kolmiot, $\Delta_1 := \Delta(z_1, z_1', z_3')$, $\Delta_2 := \Delta(z_1', z_2', z_3')$, $\Delta_3 := \Delta(z_1', z_2, z_2')$ ja $\Delta_4 := \Delta(z_2', z_3, z_3')$.



Kuva 2. Kolmiot Δ_j ja niiden reunojen $\partial\Delta_j$ janapolkuparametrisoinnit α_j, β_j ja γ_j. Kuvan mukaisin merkinnöin $\gamma_2 = \overleftarrow{\beta}_1$, $\gamma_3 = \overleftarrow{\alpha}_2$ ja $\gamma_4 = \overleftarrow{\beta}_2$. Edelleen polut α ja $\alpha_1 \vee \alpha_3$ ovat ekvivalentteja, polut β ja $\beta_3 \vee \alpha_4$ ovat ekvivalentteja ja polut γ ja $\beta_4 \vee \gamma_1$ ovat ekvivalentteja.

Olkoot α_j, β_j ja γ_j kolmion Δ_j reunojen janapolkuparametrisoinnit, ja $\delta_j := \alpha_j \vee \beta_j \vee \gamma_j$. Kun käytetään kompleksisen käyräintegraalin additiivisuusominaisuutta polkujen yhdistämisen suhteen ja käyräintegraalin merkin muuttumista integroitaessa vastapolun suhteen, saadaan (HT)

$$\oint_{\delta} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{4} \oint_{\delta_j} f(z)\,dz.$$

Tästä saadaan

$$\Big|\oint_{\delta} f(z)\,dz\Big| \leqslant \sum_{j=1}^{4}\Big|\oint_{\delta_j} f(z)\,dz\Big| \leqslant 4\Big|\oint_{\delta_{(1)}} f(z)\,dz\Big|,$$

missä $\delta_{(1)}$ sen kolmion $\Delta_j =: \Delta_{(1)}$ reunan parametrisointi δ_j, jolle integraalin $\int_{\delta_j} f(z)\,dz$ itseisarvo on suurin.

Toistamalla tämä menetelmää saadaan jono suljettuja kolmioita

$$\Delta =: \Delta_{(0)} \supset \Delta_{(1)} \supset \Delta_{(2)} \supset \Delta_{(3)} \supset \dots,$$

joita vastaavien reunojen $\Delta_{(j)}$ parametrisoinneille $\delta_{(j)}$ on voimassa

$$\Big|\oint_{\delta} f(z)\,dz\Big| \leqslant 4\Big|\oint_{\delta_{(1)}} f(z)\,dz\Big| \leqslant 4^2\Big|\oint_{\delta_{(2)}} f(z)\,dz\Big| \leqslant 4^3\Big|\oint_{\delta_{(3)}} f(z)\,dz\Big| \leqslant \cdots,$$

eli yleisesti

$$\Big|\oint_{\delta} f(z)\,dz\Big| \leqslant 4^n\Big|\oint_{\delta_{(n)}} f(z)\,dz\Big|.$$

Koska jono $(\Delta_{(n)})_{n=0}^{\infty}$ on vähenevä jono kompakteja joukkoja ja kolmioiden halkaisijat lähestyvät nolla, kun $n \to \infty$, on Cantorin leikkauslauseen nojalla olemassa $z_0 \in \mathbb{C}$ siten, että

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_{(n)} = \{z_0\}.$$

Koska $z_0 \in G$ ja f on kompleksisesti differentioituva pisteessä z_0, on

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)\,(z - z_0) + E(z), \quad \text{missä} \quad \frac{E(z)}{z - z_0} \to 0, \quad \text{kun } z \to z_0.$$

Funktiolla $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)\,(z - z_0)$ on primitiivi, joten sen integraali umpinaisen tien $\delta_{(n)}$ suhteen häviää, ja näin ollen

$$\oint_{\delta_{(n)}} f(z)\,dz = \oint_{\delta_{(n)}} E(z)\,dz.$$

Tähän mennessä on siis saatu:

$$\Big|\oint_{\delta} f(z)\,dz\Big| \leqslant 4^n\Big|\oint_{\delta_{(n)}} E(z)\,dz\Big|.$$

Olkoon nyt $\varepsilon > 0$. Ehdon $\frac{E(z)}{z-z_0} \to 0$, kun $z \to z_0$, nojalla on olemassa $\eta > 0$ siten, että $B(z_0;\eta) \subset G$ ja

$$|E(z)| \leqslant \varepsilon\,|z - z_0|, \quad \text{kun } |z - z_0| \leqslant \eta.$$

Valitaan $n \in \mathbb{Z}_+$ niin, että $\Delta_{(n)} \subset B(z_0;\eta)$.

Kun $z \in \Delta_{(n)}$, on $|z - z_0| \leqslant \ell(\delta_{(n)}) = \frac{1}{2^n}\,\ell(\delta)$ (HT). Tästä saadaan

$$|E(z)| \leqslant \varepsilon\,|z - z_0| \leqslant \varepsilon\,\ell(\delta_{(n)}), \quad \text{kun } z \in \Delta_{(n)},$$

joten

$$\Big|\oint_{\delta} f(z)\,dz\Big| \leqslant 4^n\Big|\oint_{\delta_{(n)}} E(z)\,dz\Big| \leqslant 4^n\,\varepsilon\,\ell(\delta_{(n)})\,\ell(\delta_{(n)}) = \varepsilon\,(\ell(\delta))^2.$$

Väite seuraa tästä. $\square$

⟦Edellä esitetty todistus yhdelle yksinkertaisimmista Cauchyn integraalilauseen versioista lienee peräisin ÉDOUARD GOURSAT'LTA vuodelta 1900.[3] EBERHARD FREITAG ja ROLF BUSAM kompleksianalyysin kirjassaan [**7**, lause II.2.5] viittaavat Goursat'n osalta myös vuosiin 1883 ja 1884. Goursat lienee parannellut todistustaan vuonna 1900 (derivaatan f' ei tarvitse olla jatkuva) ja tätä edelleen ALFRED PRINGSHEIM vuonna 1901. JOHN STILLWELL siteeraa historian kirjassaan [**18**, §16.3] (kolmas laitos) CARL FRIEDRICH GAUSSIA; sitaatin mukaan Gauss olisi oivaltanut jo 1811 sen, että kompleksinen käyräintegraali voi olla integrointitiestä riippumaton (vrt. lause 3.25, "Primitiivin karakterisointi").

Cauchyn ensimmäiset todistukset integraalilauseelle liittyvät samaan käyräintegraalin integrointitiestä riippumattomuuteen kuin Gaussilla. Ensimmäisen version Cauchy esitteli Ranskan tiedeakatemialle 1814, mutta julkaisi työn vasta 1825. Hän paranteli todistusta myöhemmin vuonna 1846 perustumaan Cauchyn ja Riemannin yhtälöihin ja Greenin lauseeseen. Greenin lause yleensä liitetään GEORGE GREENIN kirjoitelmaan *An Essay on the Applications of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism* vuodelta 1828. Cauchyn integraalilauseestaan havaitsemista seurauksista yllättävin on vuodelta 1837: holomorfisella funktiolla on lokaalisti esitys suppenevana potenssisarjana (tästä lisää kurssilla Kompleksianalyysi 2).

Edellä hahmoteltu kolmioihin perustuva todistus löytyy Freitagin ja Busamin kirjasta [**7**, lause II.2.5] ja ROLF NEVANLINNAN ja VEIKKO PAATERON kirjasta [**14**, luku VIII, §3]. Kolmioita hieman helpompia geometrisesti käsiteltäviksi ovat koordinaattiakseleiden suuntaiset suorakaiteet (katso esimerkiksi SERGE LANGIN kirjasta [**11**, luku III, §3]). Vaihtoehtoisia todistustapoja on vedota reaalisiin vektorikenttiin liittyvään Greenin lauseeseen; katso THEODORE W. GAMELIN [**8**, luku IV, §3], WILLIAM R. DERRICK [**4**, luku 2, §2.2] tai RICHARD COURANT ja FRITZ JOHN [**3**, §8.3.b]. Kirjat kylläkin sivuuttavat Greenin lauseen todistuksen vähänkään hankalammille alueille. KUNIHIKO KODAIRA [**9**, luku 2] käsittelee Greenin ja Cauchyn lauseille tärkeiden alueiden ominaisuuksia varsin perusteellisesti; asialle uhratut kohdat §2.1–2.2 kattavat liki 40 sivua.⟧

MÄÄRITELMÄ 4.2. *Alue $D \subset \mathbb{C}$ on tähtimäinen pisteen z_* suhteen*, jos jokaiselle $z \in D$ pisteitä z_* ja z yhdistävä jana $J(z_*, z)$ sisältyy joukkoon D. *Alue D on tähtimäinen*, jos se on tähtimäinen jonkin pisteen $z_* \in D$ suhteen. Jos alue D on tähtimäinen pisteen z_* suhteen, pistettä z_* kutsutaan *alueen D tähtikeskukseksi*.

ESIMERKKEJÄ 4.3. a) Jokainen kiekko $B(z_0; r)$ on tähtimäinen jokaisen pisteensä suhteen. Tähtimäisen alueen tähtikeskus ei siis ole yksikäsitteinen.

b) Jokainen konveksi joukko C on tähtimäinen jokaisen pisteensä suhteen. Muista: *joukko C on konveksi*, jos se sisältää jokaiselle pisteparilleen z ja w myös näitä pisteitä yhdistävän janan $J(z, w)$.

c) Kaikille $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ joukko $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(\overline{c}\,(z - z_0)) > 0\}$ on konveksi ja siten tähtimäinen jokaisen pisteensä suhteen.

d) Joukko $D := \mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$ on tähtimäinen jokaisen positiivisen reaaliakselin pisteen $z_* \in (0, \infty)$ suhteen, mutta ei minkään muun pisteen suhteen. (Tähtimäisen alueen ei siis tarvitse ulkoasultaan muistuttaa joulutähteä).

---

[3] ÉDOUARD JEAN-BAPTISTE GOURSAT (1858–1936), Ranska; ALFRED PRINGSHEIM (1850–1941), Saksa; AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789–1857), Ranska; JOHANN CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855), Saksa; GEORGE GREEN 1828 (1793–1841), Englanti.

Lause 4.4 (Cauchyn integraalilause tähtimäiselle alueelle). *Olkoot $D \subset \mathbb{C}$ tähtimäinen alue ja $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorfinen. Tällöin*

(i) *jokaiselle alueen D umpinaiselle tielle γ on* $\displaystyle\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$;

(ii) *funktiolla f on primitiivi alueessa D.*

Todistus. Olkoon z_* alueen D tähtikeskus. Käytetään apuna lauseen 3.25 "Primitiivin karakterisointi" ekvivalentteja karakterisointeja apuna ja osoitetaan, että funktiolla f on primitiivi alueessa D. Kohta (i) seuraa lauseen 3.25 implikaatiosta (i)$\Rightarrow$(iii).

Idea primitiivin konstruktioon otetaan lauseen 3.25 jälkeen olevasta: Asetetaan

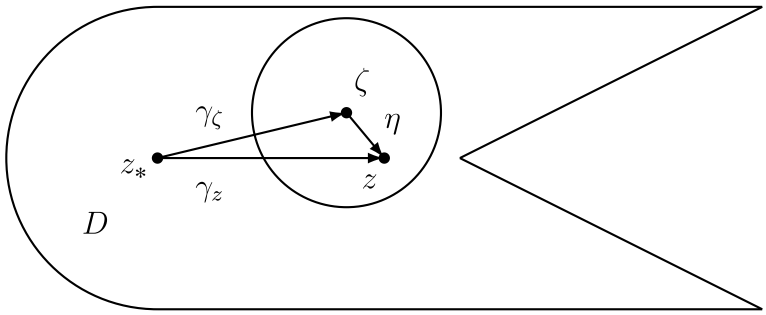
$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(z)\,dz,$$

missä $\gamma_z\colon [0,1] \to D$ on janapolku pisteestä z_* pisteeseen z, $\gamma_z(t) := (1-t)\,z_* + t\,z$.

Alueen tähtimäisyyden nojalla $F(z)$ on hyvin määritelty kaikille $z \in D$.

Olkoon $\zeta \in D$. Osoitetaan, että funktiolla F on kompleksinen derivaatta pisteessä ζ ja että $F'(\zeta) = f(\zeta)$.

Koska D on avoin, on olemassa $\delta > 0$ siten, että $B(\zeta;\delta) \subset D$. Koska D on tähtimäinen pisteen z_* suhteen, jokaiselle $z \in B(\zeta;\delta)$ pisteitä z_* ja z yhdistävä jana sisältyy joukkoon D. Toisaalta pisteitä z ja ζ yhdistävä jana sisältyy kiekkoon $B(\zeta;\delta)$. Tällöin pisteiden z_*, ζ ja z määräämä kolmio sisältyy joukkoon D. Olkoon η janapolku pisteestä ζ pisteeseen z.



Lemman 4.1 (eli Cauchyn integraalilause kolmioille) nojalla

$$\oint_{\gamma_\zeta \vee \eta \vee \overleftarrow{\gamma}_z} f(z)\,dz = 0.$$

Käyräintegraalin additiivisuusominaisuuksien nojalla tästä saadaan

$$\begin{aligned} F(z) - F(\zeta) &= \int_{\gamma_z} f(z)\,dz - \int_{\gamma_\zeta} f(z)\,dz = \int_\eta f(z)\,dz \\ &= \int_0^1 f(\zeta + t\,(z-\zeta))\,(z-\zeta)\,dt. \end{aligned}$$

Funktion F erotusosamäärälle saadaan

$$\frac{F(z) - F(\zeta)}{z - \zeta} = \int_0^1 f(\zeta + t\,(z-\zeta))\,dt.$$

Koska f on holomorfisena jatkuva, saadaan funktion F kompleksinen differentioituvuus ja $F'(\zeta) = f(\zeta)$ vastaavalla tavalla kuin lauseen 3.25 todistuksessa (kohta (ii)⇒(i)). □

Esimerkki 4.5. Lasketaan

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z},$$

kun γ on pistejonon $(1+i, -1+i, -1-i, 1-i, 1+i)$ määräämä umpinainen murtoviivapolku. Olkoot γ_j, $j \in \{1,2,3,4\}$, janapolut $1+i \to -1+i$, $-1+i \to -1-i$, $-1-i \to 1-i$ ja $1-i \to 1+i$.

Alueessa $D := \mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$ funktiolla $z \mapsto \frac{1}{z}$ on primitiivi $z \mapsto \operatorname{Log}(z)$. Lauseen 3.23 nojalla

$$\int_{\gamma_3 \vee \gamma_4 \vee \gamma_1} \frac{dz}{z} = \operatorname{Log}(\gamma_1(1)) - \operatorname{Log}(\gamma_3(0)) = \operatorname{Log}(-1+i) - \operatorname{Log}(-1-i).$$

Janapolun γ_2 suhteen integrointia varten valitaan funktiolle $z \mapsto \frac{1}{z}$ alueessa $D' := \mathbb{C} \backslash [0, \infty)$ primitiivi

$$L(z) := \begin{cases} \operatorname{Log}(z), & \text{jos } \operatorname{Im}(z) \geqslant 0, \text{ ja} \\ \operatorname{Log}(z) + 2\pi i, & \text{jos } \operatorname{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

Tällöin

$$\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = L(\gamma_2(1)) - L(\gamma_2(0)) = \operatorname{Log}(-1-i) + 2\pi i - \operatorname{Log}(-1+i).$$

Siis

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{dz}{z} &= \int_{\gamma_3 \vee \gamma_4 \vee \gamma_1} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} \\ &= \operatorname{Log}(-1+i) - \operatorname{Log}(-1-i) + \operatorname{Log}(-1-i) + 2\pi i - \operatorname{Log}(-1+i) \\ &= 2\pi i. \end{aligned}$$

Huomaa, että funktio $z \mapsto \frac{1}{z}$ on holomorfinen polun γ jäljen ympäristössä, mutta ei kaikkialla polun γ rajoittamassa alueessa. Lauseen 4.4 holomorfisuusoletuksesta ei voida siis luopua, mutta seuraavan lemman mukaisesti sitä voidaan hieman lieventää.

Lemma 4.6. *Olkoot $D \subset \mathbb{C}$ pisteen z_* suhteen tähtimäinen alue ja $f\colon D \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio, joka on holomorfinen alueessa $D \backslash \{z_*\}$. Tällöin*

(i) *jokaiselle alueen D umpinaiselle tielle γ on $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$;*

(ii) *funktiolla f on primitiivi alueessa D.*

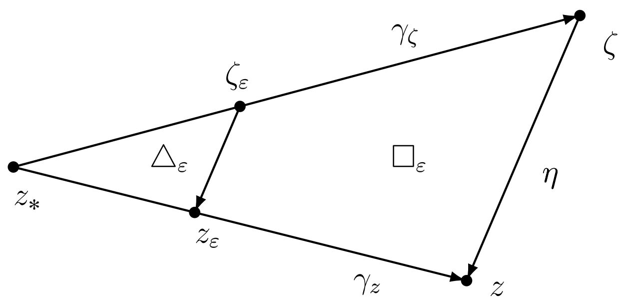
Todistus. Olkoon F kuten edellisen lauseen 4.4 todistuksessa. Riittää osoittaa, että funktiolla F on kompleksinen derivaatta myös pisteessä z_*. Tällöin funktiolla F on kompleksinen derivaatta jokaisessa joukon D pisteessä, joten F on funktion f primitiivi alueessa D. Väitteet seuraavat edellisestä ja primitiivin karakterisointilauseesta 3.25.

Tarkastelemalla edellisen lauseen todistusta havaitaan, että riittää osoittaa, että kaikille $z \in D\backslash\{z_*\}$ ja $\zeta \in D\backslash\{z_*\}$

$$\oint_{\partial^+\Delta} f(z)\,dz = 0,$$

kun $\Delta := \Delta(z_*, z, \zeta)$ on pisteiden z_*, z ja ζ määräämä kolmio. Olkoon γ_z (vastaavasti γ_ζ) janapolku pisteestä z_* pisteeseen z (vastaavasti pisteeseen ζ). Olkoon η janapolku pisteestä ζ pisteeseen z.

Olkoot $\varepsilon \in (0,1)$, $z_\varepsilon := \gamma_z(\varepsilon)$, $\zeta_\varepsilon := \gamma_\zeta(\varepsilon)$, $\Delta_\varepsilon := \Delta(z_*, z_\varepsilon, \zeta_\varepsilon)$ pisteiden z_*, z_ε ja ζ_ε määräämä kolmio ja $\square_\varepsilon$ pisteiden z_ε, z, ζ ja ζ_ε määräämä nelikulmio.



Sovelletaan Cauchyn integraalilausetta nelikulmioon $\square_\varepsilon$. Sen nojalla (HT: perustele, miksi C∫L soveltuu tähän tilanteeseen)

$$\oint_{\partial^+\square_\varepsilon} f(z)\,dz = 0.$$

Toisaalta, vastaavalla tavalla kuin Cauchyn kolmiolauseen todistuksessa

$$\oint_{\partial^+\Delta} f(z)\,dz = \oint_{\partial^+\Delta_\varepsilon} f(z)\,dz + \oint_{\partial^+\square_\varepsilon} f(z)\,dz = \oint_{\partial^+\Delta_\varepsilon} f(z)\,dz.$$

Olkoon $\delta > 0$ siten, että $\overline{B}(z_*;\delta) \subset D$. Koska f on jatkuva, on f rajoitettu kompaktissa joukossa $\overline{B}(z_*;\delta)$. Jollekin vakiolle M on siis $|f(w)| \leqslant M$ kaikille $w \in \overline{B}(z_*;\delta)$. Valitaan nyt ε niin pieneksi, että $\Delta(z_*, z_\varepsilon, \zeta_\varepsilon) \subset \overline{B}(z_*;\delta)$. Tällöin

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\partial^+\Delta} f(z)\,dz\Big| &= \Big|\int_{\partial^+\Delta_\varepsilon} f(z)\,dz\Big| \\ &\leqslant \int_{\partial^+\Delta_\varepsilon} |f(z)|\,|dz| \leqslant M\,\ell(\partial\Delta_\varepsilon).\end{aligned}$$

Koska (HT) $\ell(\partial\Delta_\varepsilon) = \varepsilon\,\ell(\partial\Delta)$, väite seuraa, kun $\varepsilon \to 0$. □

Seuraus 4.7. *Olkoot $D \subset \mathbb{C}$ konveksi alue, $z_* \in D$ ja $f\colon D \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio, joka on holomorfinen alueessa $D\backslash\{z_*\}$. Tällöin*

(i) *jokaiselle alueen D umpinaiselle tielle γ on* $\displaystyle\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$;

(ii) *funktiolla f on primitiivi alueessa D.* □

Esimerkki 4.8. Funktio $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) := \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z}, & \text{kun } z \neq 0, \\ 1, & \text{kun } z = 0, \end{cases}$$

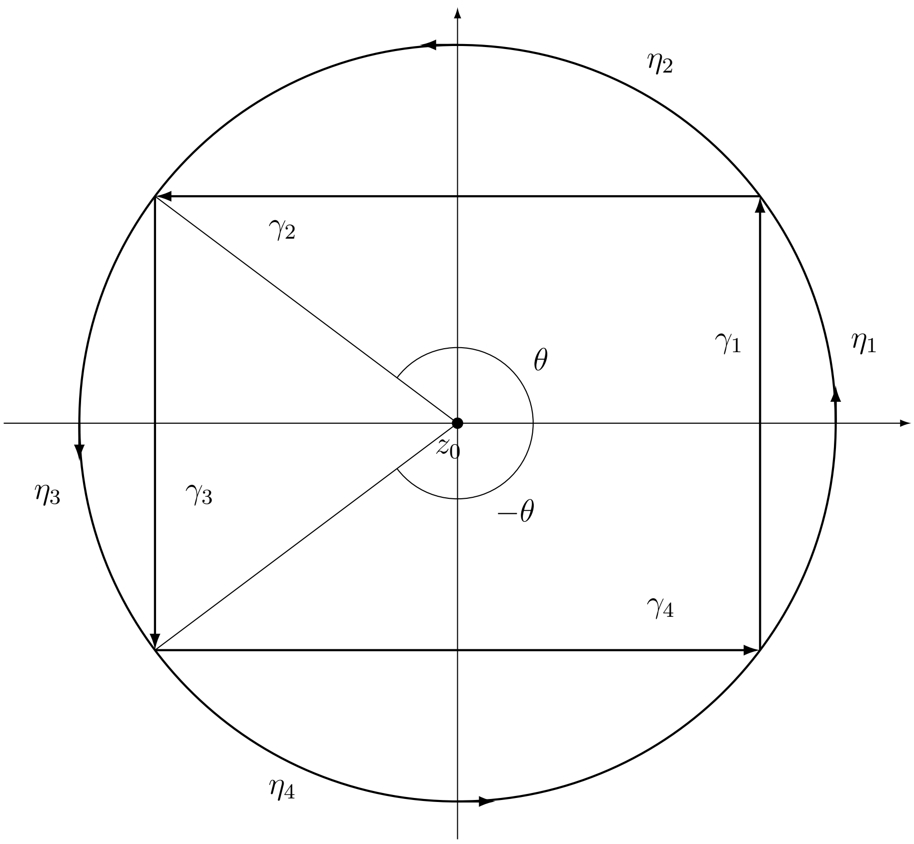
toteuttaa edellisen lemman oletukset (HT: tarkista tämä). Näin ollen funktiolla f on holomorfinen primitiivi koko kompleksitasossa.

Esimerkki 4.9. Lasketaan

$$\oint_{\partial^+ R} \frac{dz}{z - z_0},$$

missä R on koordinaattiakseleiden suuntainen suorakaide, jonka keskipiste on z_0. Kun esimerkissä 4.5 käytettiin apuna primitiiviä, tässä käytetään apuna Cauchyn integraalilausetta 4.4 niin, että suorakaiteen reunan parametrisoiva polku vaihdetaan helpompaan.

Olkoon $K := K(z_0; r)$ piste z_0-keskinen kiekko, jonka säde $r :=$ pisteen z_0 etäisyys suorakaiteen R kärkipisteistä. Tällöin suorakaiteen R kärkipisteet sijaitsevat kiekon K kehällä. Olkoot γ_j, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, kuvan mukaiset reunan ∂R janapolkuparametriesitykset. Vastaavasti olkoot η_j, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, kuvan mukaiset ympyränkehän $|z - z_0| = r$ parametriesitykset.



Kun L_- on reaaliakselin suuntainen puolisuora, joka alkaa pisteestä z_0 ja suuntautuu negatiivisen reaaliakselin suuntaan, on $D_+ := \mathbb{C} \backslash L_-$ tähtimäinen alue ja funktio $z \mapsto 1/(z - z_0)$ on holomorfinen alueessa D_+. Lisäksi polku $\gamma_+ := \gamma_4 \vee \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee$

$\overleftarrow{\eta}_2 \vee \overleftarrow{\eta}_1 \vee \overleftarrow{\eta}_4$ on umpinainen tie, jonka jälki $|\gamma_+| \subset D_+$. Lauseen 4.4 (Cauchyn integraalilause tähtimäiselle alueelle) nojalla

$$\oint_{\gamma_+} \frac{dz}{z - z_0} = 0.$$

Toisaalta

$$\oint_{\gamma_+} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{\gamma_4 \vee \gamma_1 \vee \gamma_2} \frac{dz}{z - z_0} + \int_{\overleftarrow{\eta}_2 \vee \overleftarrow{\eta}_1 \vee \overleftarrow{\eta}_4} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{\gamma_4 \vee \gamma_1 \vee \gamma_2} \frac{dz}{z - z_0} - \int_{\eta_4 \vee \eta_1 \vee \eta_2} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Vastaavasti, kun L_+ on reaaliakselin suuntainen puolisuora, joka alkaa pisteestä z_0 ja suuntautuu positiivisen reaaliakselin suuntaan, on $D_- := \mathbb{C} \backslash L_+$ tähtimäinen alue ja funktio $z \mapsto 1/(z - z_0)$ on holomorfinen alueessa D_-. Lisäksi polku $\gamma_- := \gamma_3 \vee \overleftarrow{\eta}_3$ on umpinainen tie, jonka jälki $|\gamma_-| \subset D_-$. Cauchyn integraalilauseen nojalla

$$\oint_{\gamma_-} \frac{dz}{z - z_0} = 0.$$

Toisaalta

$$\oint_{\gamma_-} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{\gamma_3} \frac{dz}{z - z_0} + \int_{\overleftarrow{\eta}_3} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{\gamma_3} \frac{dz}{z - z_0} - \int_{\eta_3} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Saatujen kaavojen nojalla

$$\oint_{\gamma_4 \vee \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3} \frac{dz}{z - z_0} = \oint_{\eta_4 \vee \eta_1 \vee \eta_2 \vee \eta_3} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Kun η on ympyränkehän $|z - z_0| = r$ tavallinen parametriesitys, $\eta(t) := z_0 + r\, e^{i\,t}$, $t \in [-\theta, 2\pi - \theta]$ (katso kuvaa), on

$$\oint_{\partial^+ R} \frac{dz}{z - z_0} = \oint_{\eta_4 \vee \eta_1 \vee \eta_2 \vee \eta_3} \frac{dz}{z - z_0} = \oint_{\eta} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{-\theta}^{2\pi - \theta} \frac{r\, i\, e^{i\,t}}{r\, e^{i\,t}}\, dt = 2\pi\, i.$$

LUKU 5

Kierrosluvut ja lokaali Cauchyn integraalikaava

5.1. Aputuloksia

LAUSE 5.1 (Parametrista riippuvan integraalin jatkuvuus). *Olkoot $G \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja $f\colon G \times [a,b] \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio. Määritellään*

$$F\colon G \to \mathbb{C}, \quad F(x) := \int_a^b f(x,t)\,dt.$$

Tällöin F on jatkuva.

TODISTUS. Koska G on avoin, on jokaiselle $x \in G$ olemassa $r > 0$ siten, että $B(x;r) \subset G$.

Olkoon $h \in \mathbb{R}^n$, $0 < \|h\| < r$. Tällöin

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^b \Big(f(x+h,t) - f(x,t)\Big)\,dt.$$

Koska funktio $f\colon G \times [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, se on tasaisesti jatkuva kompaktissa joukossa $\overline{B}(x;r/2) \times [a,b]$. Olkoon nyt $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa $\delta > 0$ siten, että $\delta \leqslant r/2$ ja

$$\big|f(x',t') - f(x'',t'')\big| \leqslant \varepsilon,$$

kaikille $(x',t') \in \overline{B}(x;r/2) \times [a,b]$ ja $(x'',t'') \in \overline{B}(x;r/2) \times [a,b]$, joille $\|(x',t') - (x'',t'')\| \leqslant \delta$. Kun valitaan $x' := x+h$, $x'' := x$, $t' := t'' := t \in [a,b]$, on $\|(x',t') - (x'',t'')\| = \|h\|$, joten kaikille $h \in \mathbb{R}^n$, joille $0 < \|h\| \leqslant \delta$,

$$\big|F(x+h) - F(x)\big| \leqslant \int_a^b \Big|f(x+h,t) - f(x,t)\Big|\,dt \leqslant \varepsilon\,(b-a). \qquad \square$$

HUOMAUTUS. Vaikka edellisen lauseen tulos vaikuttaa varsin ilmeiseltä, lauseen oletus integointivälistä, eli että kyse on **aidosta oikeasta Riemannin integraalista**, on oleellinen rajoitus. Jos integointiväliä ei oleteta kompaktiksi, väite ei välttämättä pidä paikkaansa. Esimerkiksi integraalissa $F(x) := \int_0^\infty \frac{\sin(x\,t)}{t}\,dt$ integroitava $f\colon (x,t) \mapsto \frac{\sin(x\,t)}{t}$ on jatkuva joukossa $\mathbb{R} \times [0,\infty)$, kun osamäärän arvoksi valitaan luonnollinen arvo pisteissä $(x,0)$: $f(x,0) := \lim_{t\to 0} \frac{\sin(x\,t)}{t} = x$. Kun $x > 0$, saadaan muuttujanvaihdolla $x\,t =: \tau$, $F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau = F(1)$. Toisaalta, sinin parittomuuden nojalla $F(-x) = -F(x)$. Vuorottelevien sarjojen Leibnizin lauseen avulla on helpohko osoittaa, että epäoleellinen Riemannin integraali $\int_0^\infty \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau$ suppenee (ja, käyttämällä apuna harmonista sarjaa, että suppeneminen on ehdollista, ei itseistä), ja että integraalin arvo on aidosti positiivinen. Integroimalla saatu funktio $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ei siis ole jatkuva pisteessä $x = 0$.

[1] Viimeksi muutettu 15.2.2020.

Lause 5.2 (Parametrista riippuvan integraalin derivointi; Leibnizin sääntö). [2] *Olkoot $G \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja $f\colon G \times [a,b] \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio. Oletetaan, että funktiolla f on osittaisderivaatta $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)$ jokaiselle $(x,t) \in G \times [a,b]$ ja että funktio $\frac{\partial f}{\partial x_j}\colon G \times [a,b] \to \mathbb{C}$ on jatkuva.*

Määritellään

$$F\colon G \to \mathbb{C}, \quad F(x) := \int_a^b f(x,t)\,dt.$$

Tällöin jokaiselle $x \in G$ funktiolla F on osittaisderivaatta $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x)$ ja

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)\,dt.$$

Todistus. Tarkastelemalla erikseen funktion f reaali- ja imaginaariosia, voidaan olettaa, että f on reaaliarvoinen.

Koska G on avoin, on jokaiselle $x \in G$ olemassa $r > 0$ siten, että $B(x;r) \subset G$.

Olkoot $e_j := (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, missä ykkönen on j. paikassa, ja $h \in \mathbb{R}$, $0 < |h| < r$. Funktion F erotusosamäärälle saadaan

$$\frac{F(x+h\,e_j) - F(x)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)\,dt = \int_a^b \Big(\frac{f(x+h\,e_j,t) - f(x,t)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t) \Big)\,dt.$$

Reaalimuuttujan reaaliarvoisten funktioiden differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla jokaiselle $(x,t) \in G \times [a,b]$ on olemassa $\theta = \theta_{(x,t,h)} \in (0,1)$ siten, että

$$\frac{f(x+h\,e_j,t) - f(x,t)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+\theta\,h\,e_j,t).$$

Koska osittaisderivaatta $\frac{\partial f}{\partial x_j}\colon G \times [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, se on tasaisesti jatkuva kompaktissa joukossa $\overline{B}(x;r/2) \times [a,b]$. Olkoon nyt $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa $\delta > 0$ siten, että $\delta \leqslant r/2$ ja

$$\Big| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x',t') - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x'',t'') \Big| \leqslant \varepsilon,$$

kaikille $(x',t') \in \overline{B}(x;r/2) \times [a,b]$ ja $(x'',t'') \in \overline{B}(x;r/2) \times [a,b]$, joille $\|(x',t') - (x'',t'')\| \leqslant \delta$. Kun valitaan $x' := x + \theta\,h\,e_j$, $x'' := x$, $t' := t'' := t \in [a,b]$, on $\|(x',t') - (x'',t'')\| = \theta\,|h| \leqslant |h|$, joten kaikille $h \in \mathbb{R}$, joille $0 < |h| \leqslant \delta$,

$$\begin{aligned} \Big| \frac{F(x+h\,e_j) - F(x)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)\,dt \Big| &\leqslant \int_a^b \Big| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+\theta\,h\,e_j,t) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t) \Big|\,dt \\ &\leqslant \varepsilon\,(b-a). \end{aligned}$$

Väite seuraa tästä. □

Seuraus 5.3 (Parametrista riippuvan integraalin holomorfisuus). *Jos edellisen lauseen oletusten lisäksi vaaditaan, että $G \subset \mathbb{C}$ ja että jokaiselle $t \in [a,b]$ funktio $z \mapsto f(z,t)$ on holomorfinen ja sen derivaatta $\frac{\partial f}{\partial z}\colon G \times [a,b] \to \mathbb{C}$ on jatkuva, niin F on holomorfinen ja*

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\,dt.$$

[2] Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716), Saksa.

Todistus. Oletuksista seuraa, että funktiolla $(z,t) = (x+i\,y,t) \mapsto f(x+i\,y,t)$ on jatkuvat osittaisderivaatat $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ ja ne toteuttavat Cauchyn ja Riemannin yhtälöt. Kun parametrista riippuvan integraalin jatkuvuus- ja derivointilauseita sovelletaan funktion F reaali- ja imaginaariosiin nähdään, että F on jatkuvasti (reaalisesti) differentioituva. Cauchyn ja Riemannin yhtälöiden kompleksisen muodon (katso lause 2.9 eli ℝDℂD) nojalla saadaan

$$-i\,\frac{\partial F}{\partial y}(z) = \int_a^b \Big(-i\,\frac{\partial f}{\partial y}(z,t)\Big)\,dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(z,t)\,dt = \frac{\partial F}{\partial x}(z).$$

Väite seuraa tästä. □

5.2. Kierrosluku

Olkoot $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ umpinainen tie ja $z \in \mathbb{C}\setminus|\gamma|$. *Tien γ kierrosluku pisteen z suhteen* on [3]

$$W(\gamma;z) := \frac{1}{2\pi\,i}\oint_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Lemma 5.4. *Olkoot $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ umpinainen tie ja $z \in \mathbb{C}\setminus|\gamma|$. Tällöin*

$$W(\gamma;z) \in \mathbb{Z}.$$

Todistus. Määritellään $g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$,

$$g(t) := \int_a^t \frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau) - z}\,d\tau.$$

Tällöin g on jatkuva, $g(a) = 0$ ja $g(b) = 2\pi\,i\,W(\gamma;z)$. Lisäksi g on paloittain jatkuvasti derivoituva ja

$$g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}$$

kaikille niille $t \in [a,b]$, joissa γ' on jatkuva. Määritellään $h\colon [a,b] \to \mathbb{C}$,

$$h(t) := e^{-g(t)}\,(\gamma(t) - z).$$

Tällöin h on jatkuva ja

$$h'(t) = -e^{-g(t)}\,g'(t)\,(\gamma(t) - z) + e^{-g(t)}\,\gamma'(t) = 0$$

kaikille niille $t \in [a,b]$, joissa γ' on jatkuva. Funktiolla h on siis vakioarvo niillä välin $[a,b]$ osaväleillä, joilla γ' on jatkuva. Koska h on jatkuva, on h vakio. Erityisesti $h(b) = h(a)$, joten

$$e^{-g(b)} = \frac{h(b)}{\gamma(b) - z} = \frac{h(a)}{\gamma(a) - z} = e^{-g(a)} = 1.$$

Lauseen 1.22 nojalla on olemassa kokonaisluku $k \in \mathbb{Z}$ siten, että $-g(b) = -g(a) + 2\pi\,i\,k$, t.s. $2\pi\,i\,W(\gamma;z) = -2\pi\,i\,k$. □

[3] Tien kierrosluvulle (engl. winding number) löytyy kirjallisuudesta varsin paljon erilaisia merkintöjä: $W(\gamma,z)$, $n(\gamma,z)$, $\mathrm{wn}(\gamma,z)$, $\mathrm{wind}(\gamma,z)$, $\chi(\gamma,z)$, $\iota_z(\gamma)$, $j(z,\gamma)$, I_C ($C = |\gamma|$ = polun jälki), $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$. Jatkuville kuvauksille $G \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ määritelty *kuvauksen aste* on läheistä sukua polun kierrosluvulle; *polun kiertymisluku* (tai *rotaatioindeksi*) on sileän polun tangenttivektorin kierrosluku.

Huomautus. Kun γ ja η ovat umpinaisia teitä ja $z \notin |\gamma| \cup |\eta|$, on

$$\begin{aligned} W(\gamma \vee \eta; z) &= W(\gamma; z) + W(\eta; z), \quad \text{jos } \gamma \vee \eta \text{ on määritelty, ja} \\ W(\overleftarrow{\gamma}; z) &= -W(\gamma; z). \end{aligned}$$

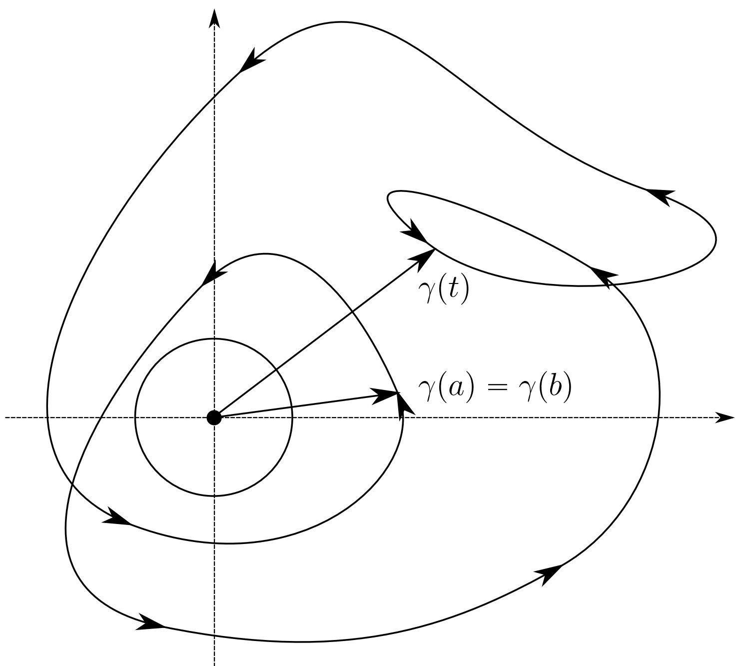
Esimerkki 5.5. Olkoot $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ ja $\gamma(t) := z_0 + r\,e^{i\,t}$, kun $t \in [0, 2\pi]$. Olkoon $k \in \mathbb{Z}_+$ ja jokaiselle $j \in \{1, \ldots, k\}$ olkoon $\eta_j := \gamma$ tai $\eta_j := \overleftarrow{\gamma}$. Koska $W(\gamma; z_0) = 1$, on edellisen huomautuksen nojalla

$$W(\eta_1 \vee \cdots \vee \eta_k; z_0) = \sum_{j=1}^{k} W(\eta_j; z_0) = P - N,$$

missä

$$\begin{aligned} P &:= \#\{j \in \{1, \ldots, k\} \mid \eta_j = \gamma\} \quad \text{"positiiviset kierrokset"} \\ N &:= \#\{j \in \{1, \ldots, k\} \mid \eta_j = \overleftarrow{\gamma}\} \quad \text{"negatiiviset kierrokset"} \end{aligned}$$

Esimerkki 5.6. Olkoot $r\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ja $\theta\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituvia funktioita ja $\gamma(t) := r(t)\,e^{i\,\theta(t)}$. Oletetaan, että $r(t) > 0$ kaikille $t \in [a, b]$ ja että γ on umpinainen.



Tien γ kierrosluku on $W(\gamma; 0) = \frac{1}{2\pi}\,\Delta\theta$, missä erotus $\Delta\theta := \theta(b) - \theta(a)$ on pisteen $\gamma(t) = r(t)\,e^{i\,\theta(t)}$ napakulman $\theta(t)$ muutos, ja sama kuin tien $\eta\colon t \mapsto e^{i\,\theta(t)}$ kierrosluku.

Polulle γ on $|\gamma(t)| = r(t) > 0$, joten $\gamma(t) \neq 0$ kaikille $t \in [a, b]$ ja $r(a) = |\gamma(a)| = |\gamma(b)| = r(b)$. Koska $r(b)\,e^{i\,\theta(b)} = r(a)\,e^{i\,\theta(a)}$, on $e^{i\,\theta(b)} = e^{i\,\theta(a)}$, joten $\theta(b) = \theta(a) + 2\pi\,k$ jollekin $k \in \mathbb{Z}$ (lause 1.22). Lisäksi $\gamma'(t) = r'(t)\,e^{i\,\theta(t)} + r(t)\,e^{i\,\theta(t)}\,i\,\theta'(t)$, joten $|\gamma'(t)| = |r'(t) + r(t)\,i\,\theta'(t)| = \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2\,\theta'(t)^2}$, joten $\gamma'(t) \neq 0$, jos $r'(t) \neq 0$, kun $\theta'(t) = 0$.

Tien γ kierrosluku origon suhteen on

$$\begin{aligned}W(\gamma;0) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{r'(t)\,e^{i\,\theta(t)} + r(t)\,e^{i\,\theta(t)}\,i\,\theta'(t)}{r(t)\,e^{i\,\theta(t)}}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{r'(t)}{r(t)}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_a^b i\,\theta'(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\Big|_a^b \ln r(t) + \frac{1}{2\pi}\Big|_a^b \theta(t) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b)-\theta(a)).\end{aligned}$$

Lemma 5.7. *Olkoot* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *umpinainen tie ja* D *eräs joukon* $G := \mathbb{C}\setminus|\gamma|$ *yhtenäisyyskomponentti. Tällöin*

$$W(\gamma;a) = W(\gamma;b) \quad \textit{kaikille } a \in D \textit{ ja } b \in D.$$

Jos D *on joukon* G *rajoittamaton komponentti, on* $W(\gamma;z) = 0$ *kaikille* $z \in D$.

Todistus. Sovelletaan parametrista riippuvan integraalin jatkuvuuslausetta integraaliin

$$F(z) := W(\gamma;z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt.$$

Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että γ on jatkuvasti differentioituva. (Paloittain jatkuvasti differentioituvan polun käsittely jätetään lukijan tehtäväksi; vertaa lemman 5.4 todistuksen päättelyihin.)

Kun määritellään $f\colon G \times [a,b] \to \mathbb{C}$,

$$f(z,t) := \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z},$$

on f jatkuva ja $F(z) = \int_a^b f(z,t)\,dt$. Jatkuvuuslauseen 5.1 nojalla F on jatkuva. Koska jokaiselle $z \in G$ luku $F(z)$ on kokonaisluku (lemma 5.4), jatkuvalle funktiolle F yhtenäisen joukon D kuvajoukko $F(D)$ on yhtenäinen ja reaaliakselin yhtenäiset osajoukot ovat välejä, on $F|_D$ vakio.

Jos D on rajoittamaton, valitaan $R > 0$ siten, että $|\gamma(t)| \leqslant R$ kaikille $t \in [a,b]$. Tällöin kaikille $z \in D$, joille $|z| > R$, on

$$\begin{aligned}|W(\gamma;z)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_a^b \left|\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\right| dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{|z|-|\gamma(t)|}\,dt \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{|z|-R}\,dt = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\ell(\gamma)}{|z|-R}.\end{aligned}$$

Tästä epäyhtälöstä seuraa, että $|W(\gamma;z)| < 1$, kun $|z| > R + \ell(\gamma)/(2\pi)$. Koska $W(\gamma;z)$ on kokonaisluku, on $W(\gamma;z) = 0$, kun $|z| > R + \ell(\gamma)/(2\pi)$. Koska kierrosluvulla on vakioarvo yhtenäisyyskomponentissa D, on $W(\gamma;z) = 0$ kaikille $z \in D$. □

Esimerkki 5.8. Olkoot γ ja η_j kuten esimerkissä 5.5.

Ympyrän kehän $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$ komplementin yhtenäisyyskomponentit ovat kiekko $B(z_0;r)$ ja sen sulkeuman komplementti $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r\}$. Edellisen lemman nojalla $W(\gamma; z) = W(\gamma; z_0) = 1$ kaikille $z \in B(z_0; r)$ ja $W(\gamma; z) = 0$ kaikille $z \notin \overline{B}(z_0; r)$, joten

$$W(\eta_1 \vee \cdots \vee \eta_k; z) = \sum_{j=1}^{k} W(\eta_j; z) = P - N \quad \text{kaikille } z \in B(z_0; r),$$

ja $W(\eta_1 \vee \cdots \vee \eta_k; z) = 0$ kaikille $z \notin \overline{B}(z_0; r)$.

5.3. Lokaali Cauchyn integraalikaava

Muista: Joukko $C \subset \mathbb{C}$ on *konveksi*, jos kaikille $z \in C$ ja $w \in C$ jana $J(z, w) \subset C$. Esimerkiksi jokainen kiekko $B(z_0; r)$ ja puolitaso $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\bar{c}\,(z - z_0)) > 0\}$, missä $c \neq 0$, on konveksi. Jokainen konveksi joukko on tähtimäinen jokaisen pisteensä suhteen.

Lause 5.9 (Cauchyn integraalikaava konvekseille alueille). *Olkoot B avoin konveksi joukko, $f\colon B \to \mathbb{C}$ holomorfinen funktio ja $\gamma\colon [a, b] \to B$ umpinainen tie. Tällöin*

$$\frac{1}{2\pi\, i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = W(\gamma; z)\, f(z) \quad \textit{kaikille } z \in B \backslash |\gamma|.$$

Todistus. Määritellään $g\colon B \to \mathbb{C}$,

$$g(\zeta) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \text{kun } \zeta \neq z, \text{ ja} \\ f'(z), & \text{kun } \zeta = z. \end{cases}$$

Tällöin g on jatkuva alueessa B ja holomorfinen alueessa $B \backslash \{z\}$, joten Cauchyn integraalilauseen tähtimäiselle alueelle (lause 4.4) ja sen yhteydessä todistetun lemman 4.6 nojalla saadaan (huomaa: lemmaa 4.6 voidaan nyt soveltaa nyt jokaiseen pisteeseen $z_* := z \in B$)

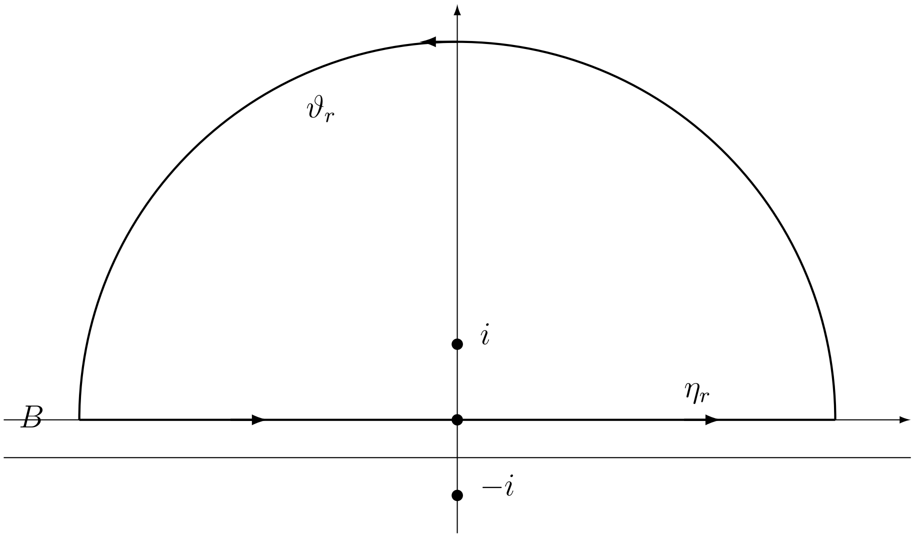
$$\begin{aligned} 0 = \oint_\gamma g(\zeta)\, d\zeta &= \oint_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \oint_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2\pi\, i\, W(\gamma; z)\, f(z). \end{aligned}$$

□

Esimerkki 5.10. Lasketaan integraali

$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{1 + t^2}\, dt.$$

Vertailuperiaatteen nojalla on helppo todeta (HT), että kyseinen epäoleellinen Riemannin integraali suppenee itseisesti.



Koska funktio $t \mapsto \sin t/(1+t^2)$ on pariton, kaikille $r > 0$ on

$$\int_{-r}^{r} \frac{e^{i\,t}}{1+t^2}\,dt = \int_{-r}^{r} \frac{\cos t}{1+t^2}\,dt + i\int_{-r}^{r} \frac{\sin t}{1+t^2}\,dt = \int_{-r}^{r} \frac{\cos t}{1+t^2}\,dt = 2\int_{0}^{r} \frac{\cos t}{1+t^2}\,dt.$$

Asetetaan

$$g(z) := \frac{e^{i\,z}}{1+z^2}, \quad \text{kun } z \notin \{-i, i\}.$$

Tällöin

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-i}, \quad \text{missä} \quad f(z) := \frac{e^{i\,z}}{z+i}, \quad \text{kun } z \neq -i.$$

Sovelletaan Cauchyn lokaalia integraalikaava eli lausetta 5.9 funktioon f ja umpinaiseen tiehen $\gamma_r := \eta_r \vee \vartheta_r$, missä

$$\eta_r(t) := t, \quad \text{kun } t \in [-r, r], \text{ ja}$$
$$\vartheta_r(t) := r\,e^{i\,t}, \quad \text{kun } t \in [0, \pi].$$

Avoin konveksi joukko B, jossa f on holomorfinen, ei voi sisältää pistettä $z = -i$, mutta sen pitää sisältää polun γ_r jälki. Joukoksi B voidaan valita esimerkiksi puolitaso $B := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > -\frac{1}{2}\}$.

Cauchyn integraalikaavan (lause 5.9) nojalla, kun $r > 1$, ($W(\gamma_r; i) = 1$: HT)

$$\oint_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-i}\,dz = 2\pi\,i\,W(\gamma_r; i)\,f(i) = \frac{\pi}{e}.$$

Toisaalta

$$\oint_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-i}\,dz = \int_{\eta_r} \frac{f(z)}{z-i}\,dz + \int_{\vartheta_r} \frac{f(z)}{z-i}\,dz = \int_{-r}^{r} \frac{e^{i\,t}}{(t+i)\,(t-i)}\,dt + \int_{\vartheta_r} \frac{e^{i\,z}}{z^2+1}\,dz.$$

Osoitetaan, että jälkimmäinen integraali lähestyy nollaa, kun $r \to \infty$. Koska $|z^2 + 1| \geqslant |z^2| - 1$, saadaan (vertaa esimerkkiin 3.19)

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\vartheta_r} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz\Big| &\leqslant \int_{\vartheta_r} \frac{|e^{iz}|}{|z|^2-1}\,|dz| = \int_{\vartheta_r} \frac{e^{-\operatorname{Im}(z)}}{r^2-1}\,|dz| \\ &= \frac{r}{r^2-1}\int_0^{\pi} e^{-r\sin t}\,dt = \frac{2r}{r^2-1}\int_0^{\pi/2} e^{-r\sin t}\,dt \\ &\leqslant \frac{2r}{r^2-1}\int_0^{\pi/2} e^{-2r\,t/\pi}\,dt = \frac{\pi\,(1-e^{-r})}{r^2-1}.\end{aligned}$$

Saadun epäyhtälön nojalla $\int_{\vartheta_r} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz \to 0$, kun $r \to \infty$, joten

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\,dt = \tfrac{1}{2}\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} \frac{e^{it}}{(t+i)\,(t-i)}\,dt = \tfrac{1}{2}\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-i}\,dz = \frac{\pi}{2\,e}.$$

5.4. Cauchyn lokaalin integraalikaavan seurauksia

LEMMA 5.11. *Olkoot* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *tie,* $h\colon |\gamma| \to \mathbb{C}$ *jatkuva,* $k \in \mathbb{Z}_+$, $G := \mathbb{C}\setminus|\gamma|$ *ja* $H\colon G \to \mathbb{C}$,

$$H(z) := \int_{\gamma} \frac{h(\zeta)}{(\zeta-z)^k}\,d\zeta.$$

Tällöin H *on holomorfinen joukossa* G *ja*

$$H'(z) = k\int_{\gamma} \frac{h(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\,d\zeta.$$

TODISTUS. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että γ on jatkuvasti differentioituva (paloittain jatkuvasti differentioituvan polun käsittely jätetään lukijan tehtäväksi). Tällöin

$$H(z) = \int_a^b \frac{h(\gamma(t))}{(\gamma(t)-z)^k}\,\gamma'(t)\,dt.$$

Olkoon $f\colon G \times [a,b] \to \mathbb{C}$,

$$f(z,t) := \frac{h(\gamma(t))}{(\gamma(t)-z)^k}\,\gamma'(t).$$

Kompleksisen derivaatan laskusääntöjen nojalla nähdään, että funktio $z \mapsto f(z,t)$ on kompleksisesti differentioituva ja että derivaatta $\frac{\partial f}{\partial z}\colon G \times [a,b] \to \mathbb{C}$ on jatkuva. Seurauksen 5.3 nojalla saadaan

$$H'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\,dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial z}\frac{h(\gamma(t))}{(\gamma(t)-z)^k}\,\gamma'(t)\,dt = k\int_a^b \frac{h(\gamma(t))}{(\gamma(t)-z)^{k+1}}\,\gamma'(t)\,dt.$$

Väite seuraa tästä. □

LAUSE 5.12. *Olkoot* $G \subset \mathbb{C}$ *avoin joukko ja* $f\colon G \to \mathbb{C}$ *holomorfinen funktio. Tällöin myös* f' *on holomorfinen joukossa* G*. Erityisesti* f' *on jatkuva joukossa* G*.*

Todistus. Olkoot $z_0 \in G$ ja $r > 0$ siten, että $B(z_0; r) \subset G$. Olkoot $\varrho \in (0, r)$ ja $\gamma(t) := z_0 + \varrho e^{it}$, kun $t \in [0, 2\pi]$, ja $B := B(z_0; \varrho)$. Tällöin $W(\gamma; z) = 1$ kaikille $z \in B$. Kun sovelletaan lokaalia Cauchyn integraalikaavaa alueessa $B(z_0; r)$ polkuun γ saadaan

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \quad \text{kaikille } z \in B.$$

Kun edellistä lemmaa 5.11 sovelletaan funktioon $h := f$ ja lukuun $k := 1$, saadaan

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, d\zeta \quad \text{kaikille } z \in B.$$

Kun edellistä lemmaa sovelletaan funktioon $h := f$ ja lukuun $k := 2$, funktion f' holomorfisuus joukossa B seuraa. Väite seuraa tästä. □

Edellisestä lauseesta saadaan induktiolla:[4]

Seuraus 5.13. *Olkoot $G \subset \mathbb{C}$ avoin joukko ja $f \colon G \to \mathbb{C}$ holomorfinen funktio. Tällöin funktiolla f on kaikkien kertalukujen derivaatat f', f'', f''', ..., $f^{(n)}$, ... joukossa G.* □

Seuraava Moreran[5] nimeä kantava lause on käänteinen tulos Cauchyn integraalilauseesta kolmioille:

Lause 5.14 (Morera, 1886). *Olkoot $G \subset \mathbb{C}$ avoin joukko ja $f \colon G \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio. Oletetaan, että jokaiselle suljetulle kolmiolle $\Delta = \Delta(z_1, z_2, z_3) \subset G$ on*

$$\oint_{\partial^+\Delta} f(z) \, dz = 0.$$

Tällöin f on holomorfinen joukossa G.

Todistus. Olkoon $z_0 \in G$. Koska G on avoin, on olemassa $r > 0$ siten, että $B(z_0; r) \subset G$. Riittää osoittaa, että f on holomorfinen kiekossa $B(z_0; r)$. Edellisen lauseen 5.12 nojalla tätä varten puolestaan riittää osoittaa, että funktiolla f on primitiivi kiekossa $B(z_0; r)$.

Asetetaan

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(z) \, dz,$$

missä $\gamma_z \colon [a, b] \to B(z_0; r)$ on janapolku pisteestä z_0 pisteeseen z.

Olkoon $\zeta \in B(z_0; r)$. Osoitetaan, että $F'(\zeta) = f(\zeta)$.

Olkoon $z \in B(z_0; r)$, $z \neq \zeta$. Tällöin pisteiden z_0, ζ ja z määräämä kolmio Δ sisältyy kiekkoon $B(z_0; r)$. (Tapausten $z = z_0$, $\zeta = z_0$ ja "z_0, ζ ja z ovat samalla suoralla" tarkastelut jätetään lukijalle.) Olkoon η janapolku pisteestä ζ pisteeseen z. Oletuksen nojalla

$$\oint_{\gamma_\zeta \vee \eta \vee \overleftarrow{\gamma}_z} f(z) \, dz = 0.$$

[4]Tätä tulosta kannattaa hämmästellä. Reaaliakselin avoimella välillä derivoituvalla funktiolla ei tarvitse olla edes toisen kertaluvun derivaattaa missään pisteessä.

[5]Giacinto Morera (1856–1909), Italia.

Käyräintegraalin additiivisuusominaisuuksien nojalla tästä saadaan

$$\begin{aligned} F(z) - F(\zeta) &= \int_{\gamma_z} f(z)\,dz - \int_{\gamma_\zeta} f(z)\,dz = \int_\eta f(z)\,dz \\ &= \int_0^1 f(\zeta + t\,(z-\zeta))\,(z-\zeta)\,dt. \end{aligned}$$

Funktion F erotusosamäärälle saadaan

$$\frac{F(z) - F(\zeta)}{z-\zeta} = \int_0^1 f(\zeta + t\,(z-\zeta))\,dt.$$

Parametrista riippuvan integraalin jatkuvuuslauseen nojalla $\int_0^1 f(\zeta + t\,(z-\zeta))\,dt \to \int_0^1 f(\zeta)\,dt = f(\zeta)$, kun $z \to \zeta$. Siis $F'(\zeta) = f(\zeta)$. □

Yhdistamällä lemma 4.6 ja Moreran lause 5.14, saadaan

Lause 5.15. *Olkoon $f\colon G \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio, joka on holomorfinen joukossa $G\backslash\{z_0\}$. Tällöin f holomorfinen joukossa G.* □

Esimerkki 5.16. Funktio $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) := \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z}, & \text{kun } z \neq 0, \\ 1, & \text{kun } z = 0, \end{cases}$$

toteuttaa edellisen lauseen oletukset (HT: tarkista tämä). Näin ollen funktio f on holomorfinen koko kompleksitasossa. Erityisesti se on kompleksisesti differentioituva pisteessä $z = 0$. Kannattaa verrata reaaliakselin funktioon $x \mapsto |x|$: tämä on jatkuva ja (reaalisesti) differentioituva joukossa $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, mutta ei differentioituva pisteessä $x = 0$.

Lause 5.17 (Cauchyn integraalikaava derivaatoille). *Olkoot B avoin konveksi joukko, $f\colon B \to \mathbb{C}$ holomorfinen, $k \in \mathbb{N}$, ja $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ umpinainen tie alueessa B. Tällöin*

$$W(\gamma; z)\, f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi\, i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta \quad \textit{kaikille } z \in B\backslash|\gamma|.$$

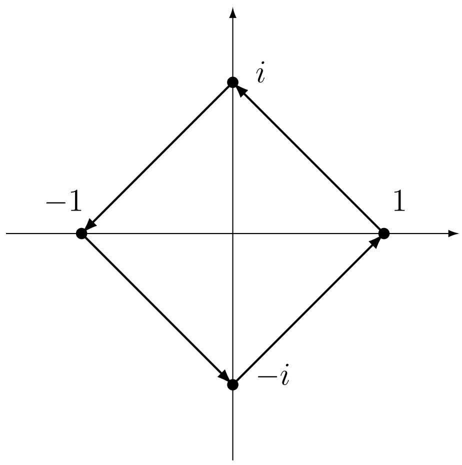
Todistus. Käytetään parametrista riippuvan integraalin derivointilausetta 5.3. Cauchyn integraalikaavan 5.9 nojalla

$$W(\gamma; z)\, f(z) = \frac{1}{2\pi\, i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi\, i} \int_a^b \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z}\,\gamma'(t)\,dt \quad \text{kaikille } z \in B\backslash|\gamma|.$$

Olkoot $\zeta \in B\backslash|\gamma|$ ja B_ζ joukon $B\backslash|\gamma|$ pisteen ζ määräämä yhtenäisyyskomponentti. Lemman 5.7 nojalla $W(\gamma; z)$ on vakio avoimessa joukossa B_ζ (muista: avoimen joukon yhtenäisyyskomponentit ovat avoimia, lause 1.48). Kun yllä oleva integraalikaava derivoidaan puolittain k kertaa muuttujan $z \in B_\zeta$ suhteen (katso lemma 5.11), saadaan väitetty kaava kaikille $z \in B_\zeta$. □

Esimerkki 5.18. Olkoon γ murtoviivapolku, jonka jälki on jonon $(1, i, -1, -i, 1)$ määräämä umpinainen murtoviiva. Lasketaan

$$\oint_\gamma \frac{e^z + z^2 \sin z}{z^3}\, dz.$$



Olkoon $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := e^z + z^2 \sin z$. Tällöin $f'(z) = e^z + 2\,z \sin z + z^2 \cos z$ ja $f''(z) = e^z + 4\,z \cos z - z^2 \sin z$. Edellisen lauseen nojalla

$$\oint_\gamma \frac{e^z + z^2 \sin z}{z^3}\, dz = \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-0)^3}\, dz = \frac{2\pi\, i}{2!}\, W(\gamma; 0)\, f''(0) = \pi\, i\, \cdot 1 \cdot 1 = \pi\, i.$$

Lause 5.19 (Cauchyn estimaatti). *Olkoon f holomorfinen kiekossa $B := B(z_0; r)$. Jos $|f(z)| \leqslant M$ kaikille $z \in B$, on*

$$|f^{(k)}(z)| \leqslant \frac{k!\, M\, r}{(r - |z - z_0|)^{k+1}} \quad \textit{kaikille } z \in B \textit{ ja kaikille } k \in \mathbb{Z}_+.$$

Erityisesti

$$|f^{(k)}(z_0)| \leqslant \frac{k!\, M}{r^k} \quad \textit{kaikille } k \in \mathbb{Z}_+.$$

Todistus. Olkoot $z \in B$ ja $s \in (|z - z_0|, r)$. Olkoon $\gamma(t) := z_0 + s\, e^{i\,t}$, kun $t \in [0, 2\pi]$. Cauchyn integraalikaavan derivaatoille eli lauseen 5.17 nojalla

$$|f^{(k)} f(z)| = \frac{k!}{2\pi} \left| \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta \right| \leqslant \frac{k!}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^{k+1}}\, |d\zeta|.$$

Tässä $|\zeta - z| = |\zeta - z_0 + z_0 - z| \geqslant |\zeta - z_0| - |z_0 - z| = s - |z_0 - z|$, kun $\zeta \in |\gamma|$, joten

$$|f^{(k)}(z)| \leqslant \frac{k!}{2\pi} \int_\gamma \frac{M}{(s - |z_0 - z|)^{k+1}}\, |d\zeta| = \frac{k!}{2\pi}\, \frac{M\, 2\pi\, s}{(s - |z_0 - z|)^{k+1}} = \frac{k!\, M\, s}{(s - |z_0 - z|)^{k+1}}.$$

Kun saadussa epäyhtälössä annetaan $s \to r-$, saadaan väitetty epäyhtälö. $\square$

Seuraus 5.20 (Liouvillen lause). *Rajoitettu kokonainen funktio on vakio.*

Todistus. Olkoon $|f(z)| \leqslant M$ kaikille $z \in \mathbb{C}$. Kiinnitetään $z_0 \in \mathbb{C}$. Sovelletaan Cauchyn estimaattia funktion f ensimmäiseen derivaattaan:

$$|f'(z_0)| \leqslant \frac{M}{r} \quad \text{kaikille } r > 0.$$

Kun $r \to \infty$, saadaan $f'(z_0) = 0$. Koska piste z_0 oli mielivaltainen, on $f'(z) \equiv 0$. Koska $\mathbb{C}$ on alue, on f vakio. □

Lause 5.21 (Algebran peruslause). *Olkoon p kompleksikertoiminen, ei-vakio polynomi,*

$$p(z) = a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_1\, z + a_0,$$

missä $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $a_n \neq 0$.

Tällöin polynomilla p on kompleksinen juuri, t.s. on olemassa $z_0 \in \mathbb{C}$ siten, että $p(z_0) = 0$.

Todistus. Tehdään antiteesi: $p(z) \neq 0$ kaikille $z \in \mathbb{C}$.

Asetetaan $f(z) := \frac{1}{p(z)}$. Tällöin f on koko kompleksitasossa holomorfinen funktio.

Koska

$$\begin{aligned} |p(z)| &\geqslant |a_n\, z^n| - |a_{n-1}\, z^{n-1}| - \cdots - |a_1\, z| - |a_0| \\ &= |z|^n \big(|a_n| - |a_{n-1}|/|z| - \cdots - |a_1|/|z|^{n-1} - |a_0|/|z|^n\big), \end{aligned}$$

ja tässä suluissa oleva lauseke $\to |a_n|$, kun $|z| \to \infty$, on $|p(z)| \to \infty$, kun $|z| \to \infty$. Tästä seuraa, että $f(z) \to 0$, kun $|z| \to \infty$, joten on olemassa $r > 0$ siten, että

$$|f(z)| \leqslant 1, \quad \text{kun } |z| \geqslant r.$$

Toisaalta f on jatkuva, joten on olemassa $M \in \mathbb{R}$ siten, että

$$|f(z)| \leqslant M, \quad \text{kun } |z| \leqslant r.$$

Siis

$$|f(z)| \leqslant \max\{M, 1\} \quad \text{kaikille } z \in \mathbb{C}.$$

Liouvillen lauseen nojalla f on vakio, jolloin myös p on vakio. Ristiriita. □

5.5. Maksimiperiaate

Lause 5.22 (Maksimiperiaate). *Olkoot $D \subset \mathbb{C}$ alue ja $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorfinen. Jos on olemassa $z_0 \in D$ siten, että $|f(z)| \leqslant |f(z_0)|$ kaikille $z \in D$, niin f on vakio alueessa D.*

Todistus. Merkitään $w(z) := |f(z)|$. Riittää osoittaa (lause 2.13), että w on vakio. Olkoon

$$M := w(z_0) = |f(z_0)| = \max\{|f(z)| \mid z \in D\}.$$

Olkoot

$$U := \{z \in D \mid w(z) < M\} \quad \text{ja} \quad V := \{z \in D \mid w(z) = M\}.$$

Tällöin $U \cap V = \varnothing$, $U \cup V = D$ ja $z_0 \in V$, joten $V \neq \varnothing$. Koska w on jatkuva, on U avoin. Koska D on yhtenäinen, riittää osoittaa, että V on avoin. Tällöin nimittäin joukon U pitää olla tyhjä, mikä tarkoittaa, että $w(z) \equiv M$.

Olkoon $z \in V$. Koska D on avoin, on olemassa $r > 0$ siten, että $B := B(z;r) \subset D$. Olkoon $0 < s < r$. Sovelletaan Cauchyn integraalikaavaa kiekossa B tiehen $\gamma\colon t \mapsto z + s\,e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Integraalikaavan nojalla

$$\begin{aligned} M = w(z) = |f(z)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|}\,|d\zeta| \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{w(\zeta)}{s}\,|d\zeta| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(z + s\,e^{it})\,dt. \end{aligned}$$

Siis

$$\int_0^{2\pi} (w(z + s\,e^{it}) - M)\,dt \geqslant 0.$$

Koska integroitava funktio $t \mapsto w(z + s\,e^{it}) - M$ on jatkuva ja ei-positiivinen, on $w(z + s\,e^{it}) - M = 0$ kaikille $t \in [0, 2\pi]$. Koska s valittiin mielivaltaisesti väliltä $(0, r)$, on $w(\zeta) = M$ kaikille $\zeta \in B(z;r)$. Tämä tarkoittaa, että $B(z;r) \subset V$, joten z on joukon V sisäpiste. Koska z oli mielivaltainen joukon V piste, on V avoin. Väite seuraa tästä. $\square$

Seuraus 5.23. *Olkoot $D \subset \mathbb{C}$ rajoitettu alue ja $f\colon \overline{D} \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio, joka on holomorfinen alueessa D. Tällöin on olemassa $z_0 \in \partial D$ siten, että $|f(z)| \leqslant |f(z_0)|$ kaikille $z \in \overline{D}$.*

Todistus. Koska f on jatkuva ja $\overline{D}$ kompakti, on olemassa $z_1 \in \overline{D}$ siten, että $|f(z)| \leqslant |f(z_1)|$ kaikille $z \in \overline{D}$. Jos $z_1 \notin D$, on $z_1 \in \partial D$, ja riittää valita $z_0 := z_1$. Jos taas $z_1 \in D$, on $|f|$ vakio edellisen lauseen nojalla, joten mikä tahansa $z_0 \in \partial D$ kelpaa. $\square$

Lause 5.24 (Schwarzin lemma). *Olkoon $f\colon B(0;1) \to \mathbb{C}$ holomorfinen funktio, jolle $f(0) = 0$ ja $|f(z)| \leqslant 1$ kaikille $z \in B(0;1)$. Tällöin*

$$|f'(0)| \leqslant 1 \quad \text{ja} \quad |f(z)| \leqslant |z| \quad \text{kaikille } z \in B(0;1).$$

Lisäksi, jos jollekin $z_0 \in B(0;1)$ on $|f(z_0)| = |z_0|$, on olemassa $\lambda \in \mathbb{C}$ siten, että $|\lambda| = 1$ ja

$$f(z) = \lambda\, z \quad \text{kaikille } z \in B(0;1).$$

Todistus. Jätetään harjoitustehtäväksi; sovella maksimiperiaatetta funktioon

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & \text{kun } z \neq 0, \text{ ja} \\ f'(0), & \text{kun } z = 0. \end{cases}$$ $\square$

*5.6. Kierrosluku leikkauslukuna

***5.6.1. Origon kiertäminen.** Olkoon $\gamma\colon I = [a,b] \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ paloittain sileä umpinainen polku. Olkoon $A := \mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$. Jos polun γ jälki sijaitsee alueessa A, on

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z} = \mathrm{Log}(\gamma(b)) - \mathrm{Log}(\gamma(a)) = 0.$$

Mitä tapahtuu, jos polku γ leikkaa negatiivisen x-akselin?

Oletetaan aluksi, että polku γ on sileä ja polku γ leikkaa negatiivisen x-akselin täsmälleen kerran. Leikkauspiste olkoon $p_1 = \gamma(t_1)$, $a < t_1 < b$. Jaetaan integrointiväli osaväleihin $[a, t_1]$ ja $[t_1, b]$ ja käytetään integraalin jatkuvuutta integrointirajan suhteen:

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z} = \int_a^{t_1} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt + \int_{t_1}^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt = \lim_{\delta\to 0+} \int_a^{t_1-\delta} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt + \lim_{\delta\to 0+} \int_{t_1+\delta}^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt.$$

Jälkimmäiset integraalit voidaan laskea logaritmin päähaaran avulla, koska $\gamma(t) \in A$ kaikille $t \in [a, t_1) \cup (t_1, b]$ (mieti, mitä ”leikkaa” tarkoittaa; määrittele oikein). Siis

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \frac{dz}{z} &= \lim_{\delta\to 0+} \int_a^{t_1-\delta} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt + \lim_{\delta\to 0+} \int_{t_1+\delta}^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt \\
&= \lim_{\delta\to 0+} (\mathrm{Log}(\gamma(t_1-\delta)) - \mathrm{Log}(\gamma(a))) + \lim_{\delta\to 0+} (\mathrm{Log}(\gamma(b)) - \mathrm{Log}(\gamma(t_1+\delta))) \\
&= \lim_{\delta\to 0+} (\mathrm{Log}(\gamma(t_1-\delta)) - \mathrm{Log}(\gamma(t_1+\delta))) \\
&= \ln|\gamma(t_1-)| - \ln|\gamma(t_1+)| + i \lim_{\delta\to 0+} (\mathrm{Arg}(\gamma(t_1-\delta)) - i\,\mathrm{Arg}(\gamma(t_1+\delta))) \\
&= i \lim_{\delta\to 0+} (\mathrm{Arg}(\gamma(t_1-\delta)) - i\,\mathrm{Arg}(\gamma(t_1+\delta))),
\end{aligned}$$

sillä γ on jatkuva hetkellä t_1. Kun $t \to t_1$, on $\mathrm{Arg}(\gamma(t)) \to \pm\pi$, missä merkki määräytyy sen mukaan, lähestyykö piste $\gamma(t)$ negatiivista x-akselia ylemmästä vai alemmasta puolitasosta (mieti napakoordinaattikulman geometria huolellisesti). Siis saadaan

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z} = \pm 2\pi\, i,$$

missä merkki on $+$, jos polku γ kulkee ylemmästä puolitasosta alempaan, ja $-$ vastakkaisessa tapauksessa. Merkitään (I = *algebrallinen leikkausindeksi*; algebrallinen: ei lasketa vain lukumäärää, vaan otetaan huomioon kulkusuunta)

$$I(\gamma, t_1) := \begin{cases} +1, & \text{jos hetkellä } t_1 \text{ polku } \gamma \text{ kulkee ylemmästä puolitasosta alempaan,} \\ -1, & \text{jos hetkellä } t_1 \text{ polku } \gamma \text{ kulkee alemmasta puolitasosta ylempään.} \end{cases}$$

Umpinaiselle polulle saadaan siis

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi\, i\, I(\gamma, t_1),$$

kun polku γ leikkaa negatiivisen x-akselin täsmälleen kerran hetkellä t_1.

On helppo tarkistaa, että edelliset päättelyt käyvät myös paloittain sileälle polulle, ja että leikkauspiste p_1 voi olla ei-sileä (γ' ei ole jatkuva hetkellä t_1).

Jos polku γ ei leikkaa negatiivista x hetkellä t_1, vaan vain *heijastuu* takaisin (eli $\gamma(t_1) \in (-\infty, 0)$, mutta $\gamma(t_1 - \delta)$ ja $\gamma(t_1 + \delta)$ sijaitsevat samassa puolitasossa kaikille riittävän pienille $\delta > 0$), niin $\lim_{\delta\to 0+}(\mathrm{Arg}(\gamma(t_1-\delta)) - i\,\mathrm{Arg}(\gamma(t_1+\delta))) = 0$. Tällaiselle heijastumispisteelle on luonnollista asettaa $I(\gamma, t_1) := 0$.

***5.6.2. Tien kierrosluku.** Oletetaan seuraavaksi, että polku γ leikkaa negatiivisen x-akselin k kertaa. Leikkauspisteet olkoot $p_j = \gamma(t_j)$, $a < t_1 < \cdots < t_k < b$. Olkoot $t_0 := a$ ja $t_{k+1} := b$. Jaetaan integrointiväli osaväleihin $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$,..., $[t_{k-1}, t_k]$ ja $[t_k, t_{k+1}]$, ja integraali vastaavasti summaksi

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z} = \sum_{j=0}^{k} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\, dt$$

Merkitään

$$\Delta\mathrm{Arg}(t_j) := \lim_{\delta\to 0+} (\mathrm{Log}(\gamma(t_j-\delta)) - \mathrm{Log}(t_j+\delta)) = \lim_{\delta\to 0+} (\mathrm{Arg}(\gamma(t_j-\delta)) - \mathrm{Arg}(t_j+\delta))$$

Edellisestä yhden leikkauspisteen tarkastelusta saadaan

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \frac{dz}{z} &= \lim_{\delta\to 0+} \mathrm{Log}(\gamma(t_1-\delta)) - \mathrm{Log}(\gamma(t_0)) \\ &\quad + \lim_{\delta\to 0+} \mathrm{Log}(\gamma(t_2-\delta)) - \lim_{\delta\to 0+} \mathrm{Log}(\gamma(t_1+\delta)) + \cdots \\ &\quad + \lim_{\delta\to 0+} \mathrm{Log}(\gamma(t_k-\delta)) - \lim_{\delta\to 0+} \mathrm{Log}(\gamma(t_{k-1}+\delta)) \\ &\quad + \mathrm{Log}(\gamma(t_{k+1})) - \lim_{\delta\to 0+} \mathrm{Log}(\gamma(t_k+\delta)) \\ &= i\,\Delta\mathrm{Arg}(t_1) + i\,\Delta\mathrm{Arg}(t_2) + \cdots + i\,\Delta\mathrm{Arg}(t_{k-1}) + i\,\Delta\mathrm{Arg}(t_k) \\ &= 2\pi\, i\, I(\gamma, t_1) + 2\pi\, i\, I(\gamma, t_2) + \cdots + 2\pi\, i\, I(\gamma, t_k).\end{aligned}$$

Paloittain sileän umpinaisen polun $\gamma\colon I \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ kierrosluku origon suhteen voidaan siis laskea leikkausindeksien avulla

$$W(\gamma; 0) = I(\gamma, t_1) + I(\gamma, t_2) + \cdots + I(\gamma, t_k),$$

kun polku γ leikkaa negatiivisen x-akselin hetkillä t_1,..., t_k. Kaava pätee myös silloin, kun jokin pisteistä $\gamma(t_j)$ ei ole leikkauspiste, vaan heijastumispiste.

Edelliset tarkastelut on helppo muuttaa tilanteeseen, missä negatiivisen x-akselin sijasta tarkastellaan polun ja origosta lähtevän, kiinnitetyn säteen leikkauksia. Olkoot $\theta_0 \in (-\pi, \pi]$, $S := \{r\, e^{i\,(\theta_0+\pi)} \mid r \in [0, \infty)\}$ ja $A := \mathbb{C}\setminus S$. (Joukko S on kulman $\theta_0 + \pi$ suuntaan origosta lähtevä säde; kun $\theta_0 = 0$, on $S = (-\infty, 0]$). Tällöin A on tähtimäinen minkä tahansa säteen S jatkeella olevan pisteen $r\, e^{i\,\theta_0}$, $r > 0$, suhteen, joten funktiolla $z \mapsto 1/z$ on primitiivi alueessa A, t.s. logaritmilla on haara L tässä alueessa. Alueen A logaritmin haaraksi käy $L(z) = \ln|z| + i\,\theta(z)$, missä $\theta\colon A \to \mathbb{R}$ on jatkuva, $e^{i\theta(z)} = z/|z|$ ja $\theta_0 - \pi < \theta(z) < \theta_0 + \pi$.

Jos polku γ leikkaa säteen S hetkellä t_j, on

$$\Delta\theta(t_j) := \lim_{\delta\to 0+} \theta(\gamma(t_j-\delta)) - \lim_{\delta\to 0+} \theta(\gamma(t_j+\delta)) = \pm 2\pi,$$

missä etumerkki määräytyy sen mukaan, tapahtuuko leikkaus vasta- vai myötäpäivään. Jos polku γ heijastuu takaisin samalle puolelle sädettä S, on $\Delta\theta(t_j) = 0$, Kun leikkausindeksi määritellään "oikein", pätevät edelliset tarkastelut, kun negatiivinen x-akseli korvataan säteellä S.

Kun tarkastellaan polun γ kierroslukua pisteen z_0 suhteen, pitää negatiivinen x-akseli korvata pisteestä z_0 negatiivisen x-akselin suuntaan lähtevällä säteellä. Vastaavasti suuntaan $\theta_0 + \pi$ lähtevä säde S pitää siirtää alkamaan pisteestä z_0.

Osa 2

Kompleksianalyysi 2

LUKU 6

Cauchyn integraalilause ja integraalikaava

Seuraavassa esitetään Cauchyn integraalikaavalle ja -lauseelle yleinen versio käyttäen apuna polkujen homologian käsitettä (lauseet 6.2 ja 6.4 sekä 6.15 ja 6.16). Cauchyn integraalilauseelle saadaan hieman yksikertaisempi versio polkujen homotopian avulla (lauseet 6.20 ja 6.21). Kertaa polut kurssin Kompleksianalyysi 1 luentomonisteeseesta (luku 3, kappale 3.1). Muista, että polku $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, jolle $\gamma(a) = \gamma(b)$, on *umpinainen* eli *silmukka* ja *tie* on paloittain jatkuvasti differentioituva polku.

6.1. Cauchyn integraalilause

Palautetaan mieleen Cauchyn integraalilauseen lokaali muoto ($\mathbb{C}$An1, lause 4.4): Olkoon $f\colon B \to \mathbb{C}$ on holomorfinen tähtimäisessä alueessa $B \subset \mathbb{C}$. Tällöin jokaiselle umpinaiselle tielle $\gamma\colon [a,b] \to B$ on voimassa

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0. \tag{6.1}$$

Cauchyn integraalilauseesta saadaan myös seuraava tulos: Kun $\gamma\colon [a,b] \to B$ ja $\eta\colon [a,b] \to B$ ovat teitä, joille on yhteinen lähtöpiste ja yhteinen päätepiste eli $\gamma(a) = \eta(a)$ ja $\gamma(b) = \eta(b)$, on

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\eta f(z)\,dz. \tag{6.2}$$

Nimittäin, kun Cauchyn integraalilausetta sovelletaan umpinaiseen tiehen $\vartheta := \gamma \vee \overleftarrow{\eta}$, saadaan

$$0 = \oint_\vartheta f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_{\overleftarrow{\eta}} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz - \int_\eta f(z)\,dz.$$

Yllä oleva päättely voidaan kääntää, joten umpinaisia teitä koskeva ehto (6.1) ja samoja lähtö- ja päätepisteitä koskeva ehto (6.2) ovat siis keskenään yhtäpitäviä. Cauchyn integraalilauseen yleinen muoto selvittää, millaisille muille kuin tähtimäisille alueille kaavat (6.1) ja (6.2) ovat voimassa. Näiden ehtojen kanssa kolmanneksi yhtäpitäväksi ehdoksi osoitettiin primitiivin olemassaolo (lause 3.25 ”Primitiivin karakterisointi”). Esimerkiksi kun $\gamma(t) := e^{i\,t}$, kun $t \in [0, 2\pi]$ ja $f(z) := 1/z$, kun $z \neq 0$, on f holomorfinen ja γ umpinainen tie, mutta $\oint_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{i\,e^{i\,t}}{e^{i\,t}}\,dt = 2\pi\,i$. Cauchyn integraalilauseen väite ei siis päde esimerkiksi alueelle $G := \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Seuraavaksi esitettävän yleisen Cauchyn integraalikaavan apuna käytetään parametrista riippuvan integraalin derivointilausetta, joka on kertauksen vuoksi tässä:

[1]Viimeksi muutettu 28.3.2020.

Seuraus (5.3 Parametrista riippuvan integraalin holomorfisuus). *Olkoot $G \subset \mathbb{C}$ avoin joukko ja $f\colon G \times [a,b] \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio. Oletetaan, että jokaiselle $z \in G$ ja $t \in [a,b]$ funktiolla $z \mapsto f(z,t)$ on kompleksinen (osittais-)derivaatta $\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)$ ja että funktio $\frac{\partial f}{\partial z}\colon G \times [a,b] \to \mathbb{C}$ on jatkuva.*

Tällöin funktio $F\colon G \to \mathbb{C}$,

$$F(z) := \int_a^b f(z,t)\,dt,$$

on holomorfinen ja

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\,dt. \qquad \square$$

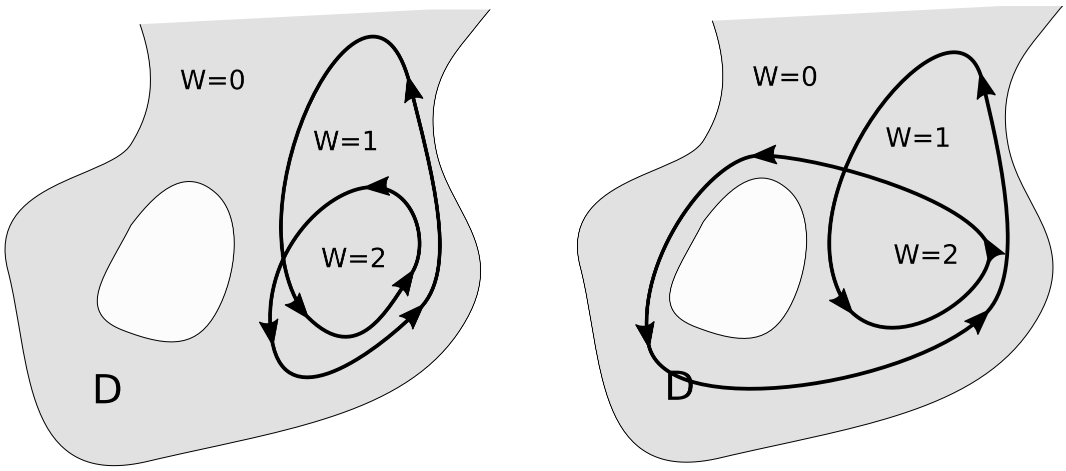
6.2. Yleinen Cauchyn integraalikaava

Olkoot $D \subset \mathbb{C}$ alue ja $\gamma\colon [a,b] \to D$ umpinainen tie.

Määritelmä 6.1. Umpinainen tie γ on *nollahomologinen alueen D suhteen*, jos $W(\gamma; z) = 0$ kaikille $z \in \mathbb{C}\backslash D$.

Yhtäpitävästi γ on nollahomologinen alueen D suhteen, jos

$$\{z \in \mathbb{C}\backslash|\gamma| \mid W(\gamma; z) \neq 0\} \subset D.$$



Vasen kuva: alueen D suhteen nollahomologinen tie.
Oikea kuva: alueen D suhteen ei-nollahomologinen tie.
Alue D on merkitty harmaalla ja komplementti $\mathbb{C}\backslash D$ valkoisella.
$W = n$: tien γ kierrosluku joukon $D\backslash|\gamma|$ a.o. komponentin suhteen on n.

Lause 6.2 (Cauchyn integraalikaava, homologinen versio). [2] *Olkoot $\gamma\colon [a,b] \to D$ alueen D suhteen nollahomologinen umpinainen tie ja $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorfinen funktio. Tällöin*

$$\oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = 2\pi\, i\, W(\gamma; z)\, f(z) \quad \textit{kaikille } z \in D\backslash|\gamma|.$$

[2] Tässä esitettävä todistus on mukailtu versio John D. Dixonin vuonna 1971 julkaistusta todistuksesta *A brief proof of Cauchy's integral theorem*, Notices of the AMS 29:5.

Todistus. Koska $W(\gamma; z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$, väite on yhtäpitävä sen kanssa, että

$$\oint_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0 \quad \text{kaikille } z \in D \backslash |\gamma|.$$

Kaikille $(\zeta, z) \in D \times D$ olkoon

$$\varphi(\zeta, z) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \text{kun } \zeta \neq z, \\ f'(z), & \text{kun } \zeta = z. \end{cases}$$

Osoitetaan, että $\varphi\colon D \times D \to \mathbb{C}$ on jatkuva ja että $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(\zeta, z)$ on olemassa ja jatkuva $D \times D \to \mathbb{C}$.

Jatkuvuus ja derivoituvuus on selvää pisteissä (ζ_0, z_0), joissa $\zeta_0 \neq z_0$.

Olkoot $z_0 \in D$ ja $\zeta_0 = z_0$. Koska D on avoin, on olemassa $r > 0$ siten, että $B(z_0; r) \subset D$. Olkoon $g(t) := f((1-t)\,z + t\,\zeta)$, kun $t \in [0, 1]$, $\zeta \in B(z_0; r)$ ja $z \in B(z_0; r)$. Tällöin g on jatkuvasti derivoituva ja

$$f(\zeta) - f(z) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\, dt = \int_0^1 f'((1-t)\,z + t\,\zeta)\, dt\, (\zeta - z).$$

Siis jokaiselle $\zeta \neq z$ on $\varphi(\zeta, z) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = \int_0^1 f'((1-t)\,z + t\,\zeta)\, dt$. Kun $\zeta = z$, on $\varphi(z, z) = f'(z) = \int_0^1 f'((1-t)\,z + t\,z)\, dt$. Siis kaikille $\zeta \in B(z_0; r)$ ja $z \in B(z_0; r)$ on

$$\varphi(\zeta, z) = \int_0^1 f'((1-t)\,z + t\,\zeta)\, dt.$$

Saadun kaavan ja kurssilla $\mathbb{C}$An1 todistetun parametrista riippuvan integraalin jatkuvuuslauseen 5.1 nojalla φ on jatkuva.

Koska funktiolla $(\zeta, z, t) \mapsto f'((1-t)\,z + t\,z)$ jatkuva osoittaisderivaatta muuttujan z suhteen, on funktiolla φ parametrista riippuvan integraalin derivointilauseen 5.3 nojalla jatkuva osittaisderivaatta $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(\zeta, z)$.

Parametrista riippuvan integraalin derivointilauseen 5.3 nojalla saadaan edelleen: funktio

$$z \mapsto \oint_\gamma \varphi(\zeta, z)\, d\zeta = \int_a^b \varphi(\gamma(t), z)\, \gamma'(t)\, dt$$

on holomorfinen alueessa D.

Edelleen kurssilla $\mathbb{C}$An1 todistetun lemman 5.11 nojalla funktio $H\colon \mathbb{C} \backslash |\gamma| \to \mathbb{C}$,

$$H(z) := \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

on holomofinen joukossa $\mathbb{C} \backslash |\gamma|$.

Kun $z \in D\backslash|\gamma|$ ja $W(\gamma; z) = 0$, on

$$(6.3) \qquad \begin{aligned} \oint_\gamma \varphi(\zeta, z)\, d\zeta &= \oint_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2\pi\, i\, f(z)\, W(\gamma; z) \\ &= \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = H(z). \end{aligned}$$

Koska nollahomologisuusoletuksen nojalla $\{z \in \mathbb{C}\backslash|\gamma| \mid W(\gamma; z) \neq 0\} \subset D$, on funktio $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$(6.4) \qquad F(z) := \begin{cases} \oint_\gamma \varphi(\zeta, z)\, d\zeta, & \text{kun } z \in D, \\ H(z), & \text{kun } z \in \mathbb{C}\backslash|\gamma| \text{ ja } W(\gamma; z) = 0, \end{cases}$$

hyvin määritelty ja holomorfinen koko kompleksitasossa.

Osoitetaan, että F on rajoitettu.

Koska holomorfisena F on jatkuva, on F rajoitettu jokaisessa kiekossa $\overline{B}(0; R)$, $R > 0$. Kun R on riittävän suuri, on $|\gamma| \subset \overline{B}(0; R)$, joten pisteet $z \in \mathbb{C}$, joille $|z| > R$ sijaisevat joukon $\mathbb{C}\backslash|\gamma|$ rajoittamattomassa yhtenäisyyskomponentissa. Näille pisteille on $W(\gamma; z) = 0$. Pisteille z, joille $|z| > R$, on

$$|F(z)| = |H(z)| = \left|\oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\right| \leqslant \int_\gamma \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right| |d\zeta| \leqslant \int_\gamma \frac{|f(\zeta)|}{|z| - R}\, |d\zeta| \leqslant \frac{M}{|z| - R}\, \ell(\gamma),$$

missä $M := \max\{|f(\zeta)| \mid \zeta \in |\gamma|\}$. Tästä seuraa, että F on rajoitettu koko kompleksitasossa.

Koska F on rajoitettu, Liouvillen lauseen nojalla F on vakio. Edellisen epäyhtälön nojalla on lisäksi $\lim_{|z|\to\infty} |F(z)| = 0$. Siis $F(z) \equiv 0$. Koska $F(z) \equiv 0$, on erityisesti $\oint_\gamma \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \oint_\gamma \varphi(\zeta, z)\, d\zeta \equiv 0$. Väite seuraa todistuksen alussa todetun nojalla. $\square$

Huomautus 6.3. Edellisen lauseen todistuksessa tien γ nollahomologisuutta alueen D suhteen käytettiin ainoastaan kohdissa (6.3) ja (6.4). Kaavan (6.3) vasen puoli määrittelee funktion $z \mapsto \oint_\gamma \varphi(\zeta, z)\, d\zeta$ alueeseen D. Kaavan oikean puolen funktio H on määritelty kaikille $z \in \mathbb{C}\backslash|\gamma|$. Jotta näiden avulla voitaisiin määritellä funktio koko kompleksitasoon, pitää määrittelevien funktioiden $z \mapsto \oint_\gamma \varphi(\zeta, z)\, d\zeta$ ja $z \mapsto H(z)$ olla ”yhteensopivat” eli niiden tulee saada sama arvo leikkausjoukossa $D \cap (\mathbb{C}\backslash|\gamma|) = D\backslash|\gamma|$. Jos $\{z \in \mathbb{C}\backslash|\gamma| \mid W(\gamma; z) \neq 0\} \not\subset D$ (katso nollahomologisuuden määritelmän yhteydessä olevaa kuvaa ”ei-nollahomologinen”), on pisteitä $z_0 \in D\backslash|\gamma|$, joille $W(\gamma; z_0) \neq 0$. Olkoon D_0 tällaisen pisteen z_0 määräämä joukon $\mathbb{C}\backslash|\gamma|$ komponentti. Kun $z \in D_0 \cap D$, on $\oint_\gamma \varphi(\zeta, z)\, d\zeta - H(z) = -2\pi\, i\, f(z)\, W(\gamma; z) = -2\pi\, i\, f(z)\, W(\gamma; z_0)$. Jos $D_0 \cap (\mathbb{C}\backslash D) \neq \varnothing$, ei edellinen erotus välttämättä häviä, eikä kaavaa (6.4) voi käyttää määrittelemään funktiota $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.[3]

[3]Jos määriteltäisiin $F(z) := \oint_\gamma \varphi(\zeta, z)\, d\zeta$, kun $z \in D$, ja $F(z) := H(z)$, kun $z \in \mathbb{C}\backslash D$, funktio F olisi hyvin määritelty. Tapauksessa $D_0 \cap (\mathbb{C}\backslash D) \neq \varnothing$ funktio F ei välttämättä ole jatkuva joukon D reunapisteissä.

Seuraus 6.4 (Cauchyn integraalilause, homologinen versio). *Olkoot $\gamma\colon [a,b] \to D$ alueen D suhteen nollahomologinen umpinainen tie ja $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorfinen funktio. Tällöin*

$$\oint_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Todistus. Jätetään lukijan tehtäväksi (sovella yleistä Cauchyn integraalikaavaa funktioon $g(\zeta) := f(\zeta)\,(\zeta - z)$). □

Seuraava todistetaan samoin kuin kurssin Kompleksianalyysi 1 vastaava tulos:

Seuraus 6.5 (Cauchyn integraalikaava derivaatoille, homologinen versio). *Olkoot $\gamma\colon [a,b] \to D$ alueen D suhteen nollahomologinen umpinainen tie, $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorfinen funktio ja $k \in \mathbb{N}$. Tällöin*

$$k!\oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta = 2\pi\, i\, W(\gamma; z)\, f^{(k)}(z) \quad \textit{kaikille } z \in D\backslash|\gamma|.$$ □

Määritelmä 6.6. Alue D on (*homologisesti*) *yhdesti yhtenäinen*, jos sen jokainen umpinainen tie on nollahomologinen alueen D suhteen.

Kurssin Kompleksianalyysi 1 lauseesta 3.25 "Primitiivin karakterisointi" saadaan

Seuraus 6.7. *Jos $D \subset \mathbb{C}$ on yhdesti yhtenäinen, jokaisella holomorfisella funktiolla $f\colon D \to \mathbb{C}$ on primitiivi alueessa D.* □

Seuraus 6.8. *Jos $D \subset \mathbb{C}$ on yhdesti yhtenäinen ja $D \not\ni 0$, logaritmilla on haara alueessa D.*

Todistus. Edellisen seurauksen nojalla funktiolla $z \mapsto 1/z$, $D \to \mathbb{C}$, on primitiivi f alueessa D. Kiinnitetään $z_0 \in D$ ja määritellään $g\colon D \to \mathbb{C}$ ja $F\colon D \to \mathbb{C}$, $g(z) := f(z) - f(z_0) + \operatorname{Log} z_0$ ja $F(z) := z\, e^{-g(z)}$. Tällöin g ja F ovat holomorfisia alueessa D ja

$$F'(z) = e^{-g(z)} - z\, g'(z)\, e^{-g(z)} = \Big(1 - z\,\frac{1}{z}\Big)\, e^{-g(z)} = 0.$$

Siis F on vakio $= F(z_0) = z_0\, e^{-g(z_0)} = z_0\, e^{-\operatorname{Log} z_0} = z_0/z_0 = 1$, jolloin $z = e^{g(z)}$ kaikille $z \in D$. Tämä tarkoittaa, että g on logaritmin haara alueessa D. □

Seuraus 6.9. *Olkoot $D \subset \mathbb{C}$ yhdesti yhtenäinen ja $f\colon D \to \mathbb{C}$ on holomorfinen. Jos $f(z) \neq 0$ kaikille $z \in D$, funktiolla f on logaritmi alueessa D, t.s. on olemassa holomorfinen funktio $L\colon D \to \mathbb{C}$ siten, että $f(z) = e^{L(z)}$ kaikille $z \in D$.* □

Huomautus 6.10. Freitagin ja Busamin kirjassa [**7**, luvun IV liite C, lause C.1] on 13 keskenään yhtäpitävää ehtoa, jotka karakterisoivat alueen D yhdesti yhtenäisyyden (ehto (9) on yllä oleva määritelmä 6.6). Freitag ja Busam käyttävät nimitystä *elemantary domain* alueesta D, jossa jokaisella holomorfisella funktiolla $f\colon D \to \mathbb{C}$ on primitiivi (seuraus 6.7). Yhtäpitävien ehtojen listaan kuuluvat lisäksi edellinen seuraus 6.8; ja että jokaisella holomorfisella funktiolla $f\colon D \to \mathbb{C}$ on holomorfinen neliöjuuri (eli holomorfinen funktio $g\colon D \to \mathbb{C}$, jolle $(g(z))^2 = f(z)$ kaikille $z \in D$); ja Cauchyn integraalilauseen yleinen versio (kun γ on alueen D umpinainen tie ja f holomorfinen funktio, niin $\oint_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = 0$); ja Cauchyn integraalikaavan yleinen versio.

6.3. Ketjut ja syklit

Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ alue.

MÄÄRITELMÄ 6.11. Kompleksitason *sykli* on jono $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$, missä $k \in \mathbb{Z}_+$ ja jokainen γ_j on umpinainen tie. Sykli $\sigma := (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ on *alueen D sykli*, jos jokainen jälki $|\gamma_j| \subset D$, $j \in \{1, \dots, k\}$. *Syklin σ jälki* on $|\sigma| := |\gamma_1| \cup \dots \cup |\gamma_k|$.

MÄÄRITELMÄ 6.12. Olkoot $f : D \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio ja $\sigma := (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ alueen D sykli. *Funktion f kompleksinen käyräintegraali syklin σ suhteen* on

$$\oint_\sigma f(z)\,dz := \sum_{j=1}^{k} \oint_{\gamma_j} f(z)\,dz.$$

HUOMAUTUKSIA 6.13. a) Olkoon γ alueen D umpinainen tie ja $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$.

Jos $k > 0$, jokaiselle $j \in \{1, \dots, k\}$ olkoon $\gamma_j := \gamma$, ja jos $k < 0$, jokaiselle $j \in \{1, \dots, |k|\}$ olkoon $\eta_j := \overleftarrow{\gamma}$.

Tällöin funktion f käyräintegraalit syklien $\sigma := (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ ja $\tau := (\eta_1, \dots, \eta_{|k|})$ suhteen ovat

$$\oint_\sigma f(z)\,dz = k \oint_\gamma f(z)\,dz \quad \text{ja} \quad \oint_\tau f(z)\,dz = |k| \oint_{\overleftarrow{\gamma}} f(z)\,dz = k \oint_\gamma f(z)\,dz.$$

Tästä syystä osassa (klassisempaa) kompleksianalyysin kirjallisuutta syklejä merkitään formaaleina summina $\sigma = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$.[4] Tällöin yllä olevat polun γ "monikerta" σ ja polun $\overleftarrow{\gamma}$ "monikerta" τ ovat yksikertaisesti $\sigma = k\,\gamma$, kun $k > 0$, ja $\tau = k\,\gamma$, kun $k < 0$ (ja sovitaan, että $(-1)\,\gamma := \overleftarrow{\gamma}$).

Täydellisyyden vuoksi sovitaan, että *tyhjä sykli* $\sigma = ()$ on pistemäisen polun määräämä sykli eli $\sigma = (\gamma)$, missä γ on vakiofunktio. Lisäksi $0\,\gamma := ()$, kun γ on alueen D umpinainen tie.

b) Kun syklien suhteen integroidaan, voidaan sykleihin luonnollisella tavalla liittää umpinainen tie. Kun $\sigma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ on alueen D sykli (missä $k > 1$), jokaiselle $j \in \{1, \dots, k-1\}$ olkoon η_j alueen D polku, joka yhdistää polun γ_j päätepisteen polun γ_{j+1} lähtöpisteeseen. Tällöin

$$\vartheta := \gamma_1 \vee \eta_1 \vee \gamma_2 \vee \eta_2 \vee \dots \vee \eta_{k-1} \vee \gamma_k \vee \overleftarrow{\eta}_{k-1} \vee \overleftarrow{\eta}_{k-2} \vee \dots \vee \overleftarrow{\eta}_1$$

on alueen D umpinainen tie, jolle

$$\oint_\vartheta f(z)\,dz = \dots = \oint_\sigma f(z)\,dz.$$

Sykli siis yleistää polkujen yhdistetyn polun käsitteen tapaukseen, missä polut eivät toteuta polkujen yhdistettävyysehtoa (eli polun γ_j päätepiste on sama kuin polun γ_{j+1} lähtöpiste). Myös ei-umpinaisten polkujen yhdistetyn polun käsite voidaan yleistää:

MÄÄRITELMÄ 6.14. Kompleksitason *ketju* on jono $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$, missä $k \in \mathbb{Z}_+$ ja jokainen γ_j on tie. Ketju $\sigma := (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ on *alueen D ketju*, jos jokainen jälki $|\gamma_j| \subset D$, $j \in \{1, \dots, k\}$. *Ketjun σ jälki* on $|\sigma| := |\gamma_1| \cup \dots \cup |\gamma_k|$.

[4] Sykliä $\sigma = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ ei pidä sotkea funktioon $t \mapsto \gamma_1(t) + \dots + \gamma_k(t)$.

Funktion f kompleksinen käyräintegraali ketjun σ suhteen on

$$\int_\sigma f(z)\,dz := \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz.$$

Huomaa, että alueen D ***syklin*** $\sigma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ *kierrosluku* $W(\sigma; z)$ on hyvin määritelty kaikille pisteille $z \in \mathbb{C}\backslash|\sigma|$,

$$W(\sigma; z) := \frac{1}{2\pi\, i} \oint_\sigma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi\, i} \sum_{j=1}^{k} \oint_{\gamma_j} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{j=1}^{k} W(\gamma_j; z).$$

Laajennetaan nollahomologisuuden käsite sykleille asettamalla: *Alueen D sykli σ on nollahomologinen alueen D suhteen*, jos $W(\sigma; z) = 0$ kaikille $z \in \mathbb{C}\backslash D$.

Lause 6.15 (Cauchyn integraalikaava sykleille). *Olkoot σ alueen D suhteen nollahomologinen sykli ja $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorfinen funktio. Tällöin*

$$\oint_\sigma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi\, i\, W(\sigma; z)\, f(z) \quad \textit{kaikille } z \in D\backslash|\sigma|.$$

Todistus. HT (korvaa tie γ syklillä σ lauseen 6.2 todistuksessa; selvitä erityisesti kohdat 6.3 ja 6.4). □

Seuraus 6.16 (Cauchyn integraalilause sykleille). *Olkoot σ alueen D suhteen nollahomologinen sykli ja $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorfinen funktio. Tällöin*

$$\oint_\sigma f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$ □

Seuraus 6.17 (Cauchyn integraalikaava derivaatoille, versio sykleille). *Olkoot σ alueen D suhteen nollahomologinen sykli, $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorfinen funktio ja $k \in \mathbb{N}$. Tällöin*

$$k! \oint_\sigma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta = 2\pi\, i\, W(\sigma; z)\, f^{(k)}(z) \quad \textit{kaikille } z \in D\backslash|\sigma|.$$ □

6.4. Tieintegaalit ja homotopia

Eräs tapa selvittää tieintegraalin $\int_\gamma f(z)\,dz$ riippuvuutta tiestä γ on *polkujen homotopian* käsite. Kahden polun välinen homotopia antaa teknisen välineen selittää, mitä polun jatkuva muuttaminen eli deformaatio toiseksi tarkoittaa. Cauchyn integraalilauseeseen liittyen relevantteja deformaatioita ovat sellaiset, joissa polkujen päätepisteet pysyvät paikoillaan, ja sellaiset, joissa jokainen polku on umpinainen (mutta alku- ja päätepisteet saavat liikkua). Tässä käytetyn deformaation oletetaan olevan differentioituva:

Määritelmä 6.18. Olkoot $D \subset \mathbb{C}$ alue, $\gamma_0\colon [a, b] \to D$ ja $\gamma_1\colon [a, b] \to D$ joukon D jatkuvasti differentioituvia polkuja (joilla on sama parametriväli).

(DHKP) Oletetaan, että poluilla γ_0 ja γ_1 on sama lähtöpiste ja sama päätepiste, t.s. joille $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ ja $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$. Sanotaan, että *polku γ_0 on differentioituvasti homotooppinen kiintein päätepistein polun γ_1 kanssa joukon D suhteen*, jos on olemassa alue U ja jatkuvasti differentioituva kuvaus $H\colon U \to D$ siten, että

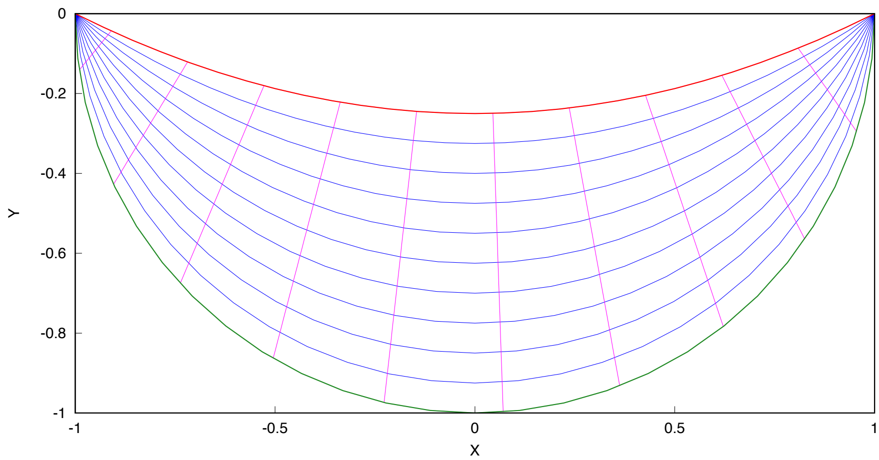
(i) $U \supset [0,1] \times [a,b]$;
(ii) osittaisderivaatat $\frac{\partial^2 H}{\partial s\, \partial t}$ ja $\frac{\partial^2 H}{\partial t\, \partial s}$ ovat olemassa ja jatkuvia joukossa U;
(iii) $H(0,t) = \gamma_0(t)$ kaikille $t \in [a,b]$;
(iv) $H(1,t) = \gamma_1(t)$ kaikille $t \in [a,b]$; ja
(KP) $H(s,a) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ ja $H(s,b) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ kaikille $s \in [0,1]$.

(DSH) Oletetaan, että polut γ_0 ja γ_1 ovat joukon D silmukoita, t.s. polkuja, joille $\gamma_0(a) = \gamma_0(b)$ ja $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$. Sanotaan, että *polku γ_0 on differentioituvasti silmukkahomotooppinen polun γ_1 kanssa joukon D suhteen*, jos on olemassa jatkuvasti differentioituva kuvaus $H\colon U \to D$, joka toteuttaa edellä olleet ehdot (i)–(iv) sekä ehdon (KP) sijasta ehdon

(S) $H(s,a) = H(s,b)$ kaikille $s \in [0,1]$.

Kun γ_0 ja γ_1 differentioituvasti homotooppiset ja H homotopian välittävä kuvaus, merkitään

$$\gamma_s(t) := H(s,t), \quad \text{kun } s \in [0,1] \text{ ja } t \in [a,b].$$



Polkujen $t \mapsto e^{-it}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, (puoliympyrä) ja $t \mapsto 1 - 2\,t/\pi + i\,t/\pi\,(t/\pi - 1)$ (paraabeli) välinen päätepisteet säilyttävä homotopia.

Tarkoitus on osoittaa, että kaavan (6.2) väite toteutuu seuraavassa hieman vahvemmassa muodossa differentioituvasti homotooppisille poluille:

$$\int_{\gamma_s} f(z)\, dz = \int_{\gamma_0} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz \quad \text{kaikille } s \in [0,1].$$

Huomautus 6.19. Lukija todetkoon, että kun $\gamma_0\colon [a,b] \to D$ ja $\gamma_1\colon [a,b] \to D$ ovat alueen D jatkuvasti differentioituvia polkuja, niin

$$H(s,t) := (1-s)\,\gamma_0(t) + s\,\gamma_1(t),$$

määrittelee polkujen γ_0 ja γ_1 välisen differentioituvan homotopian, jos $H(s,t) \in D$ kaikille $s \in [0,1]$ ja $t \in [a,b]$, päätepisteet säilyttävän tai silmukkahomotopian sen mukaan, onko poluilla γ_0 ja γ_1 on sama lähtöpiste ja sama päätepiste, vai ovatko polut γ_0 ja γ_1 silmukoita.

Lause 6.20. *Olkoot $D \subset \mathbb{C}$ alue, $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorfinen ja $\gamma_0\colon [a,b] \to D$ ja $\gamma_1\colon [a,b] \to D$ joukon D jatkuvasti differentioituvia polkuja.*

Oletetaan, että poluilla γ_0 ja γ_1 on yhteiset lähtö- ja päätepisteet eli $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ ja $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$, ja että polut γ_0 ja γ_1 ovat differentioituvasti päätepisteet säilyttäen homotooppiset joukon D suhteen.

Tällöin

$$\int_{\gamma_s} f(z)\,dz = \int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz \quad \textit{kaikille } s \in [0,1].$$

Todistus. Asetetaan $h(s) := \displaystyle\int_{\gamma_s} f(z)\,dz$, kun $s \in [0,1]$.

Määritelmän nojalla

$$h(s) = \int_a^b f(\gamma_s(t))\,\gamma_s'(t)\,dt = \int_a^b f(H(s,t))\,\frac{\partial H}{\partial t}(s,t)\,dt.$$

Osoitetaan, että $h'(s) \equiv 0$.

Parametrista riippuvan integraalin derivointisäännön (lause 5.2) nojalla

$$h'(s) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\Big(f(H(s,t))\,\frac{\partial H}{\partial t}(s,t)\Big)\,dt.$$

Ketjusäännön ja tulon derivointisäännön nojalla saadaan

$$h'(s) = \int_a^b \Big(f'(H(s,t))\,\frac{\partial H}{\partial s}(s,t)\,\frac{\partial H}{\partial t}(s,t) + f(H(s,t))\,\frac{\partial^2 H}{\partial s\,\partial t}(s,t)\Big)\,dt.$$

Koska kuvauksen H toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia, on Eulerin ja Schwarzin lauseen nojalla $\frac{\partial^2 H}{\partial s\,\partial t}(s,t) = \frac{\partial^2 H}{\partial t\,\partial s}(s,t)$. Käytetään osittaisintegrointia jälkimmäiseen derivaatan $\frac{\partial^2 H}{\partial s\,\partial t}(s,t) = \frac{\partial^2 H}{\partial t\,\partial s}(s,t)$ sisältävään integraaliin:

$$\begin{aligned}
h'(s) &= \int_a^b f'(H(s,t))\,\frac{\partial H}{\partial s}(s,t)\,\frac{\partial H}{\partial t}(s,t)\,dt + \int_a^b f(H(s,t))\,\frac{\partial^2 H}{\partial t\,\partial s}(s,t)\,dt \\
&= \int_a^b f'(H(s,t))\,\frac{\partial H}{\partial s}(s,t)\,\frac{\partial H}{\partial t}(s,t)\,dt \\
&\quad + \Big|_{t=a}^{t=b} f(H(s,t))\,\frac{\partial H}{\partial s}(s,t) - \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\big(f(H(s,t))\big)\,\frac{\partial H}{\partial s}(s,t)\,dt \\
&= \int_a^b f'(H(s,t))\,\frac{\partial H}{\partial s}(s,t)\,\frac{\partial H}{\partial t}(s,t)\,dt \\
&\quad + \Big|_{t=a}^{t=b} f(H(s,t))\,\frac{\partial H}{\partial s}(s,t) - \int_a^b f'(H(s,t))\,\frac{\partial H}{\partial t}(s,t)\,\frac{\partial H}{\partial s}(s,t)\,dt \\
&= \Big|_{t=a}^{t=b} f(H(s,t))\,\frac{\partial H}{\partial s}(s,t) = f(H(s,b))\,\frac{\partial H}{\partial s}(s,b) - f(H(s,a))\,\frac{\partial H}{\partial s}(s,a).
\end{aligned}$$

Koska homotopia säilyttää päätepisteet, on $H(s,a) = \gamma_0(a)$ kaikille $s \in [0,1]$ ja $H(s,b) = \gamma_0(b)$ kaikille $s \in [0,1]$. Derivoimalla nämä identiteetit puolittain muuttujan s suhteen, saadaan $\frac{\partial H}{\partial s}(s,a) = 0$ kaikille $s \in [0,1]$ ja $\frac{\partial H}{\partial s}(s,b) = 0$ kaikille $s \in [0,1]$. Sijoittamalla nämä arvot edellä saatuun kaavaan, saadaan $h'(s) = 0$ kaikille $s \in [0,1]$. Väite seuraa tästä. $\square$

Edellisessä todistuksessa polun päätepisteiden säilymistä tarvitaan vain viimeiseen päättelyyn $\frac{\partial H}{\partial s}(s,a) = 0$ ja $\frac{\partial H}{\partial s}(s,b) = 0$. Jos polut γ_0 ja γ_1 oletetaan silmukoiksi ja differentioituvasti silmukkahomotooppisiksi, voidaan viimeisen kohdan päättely korvata seuraavalla: Koska $H(s,a) = H(s,b)$ kaikille $s \in [0,1]$, saadaan puolittain derivoimalla $\frac{\partial H}{\partial s}(s,a) = \frac{\partial H}{\partial s}(s,b)$ kaikille $s \in [0,1]$. Sijoittamalla nämä arvot edellisen todistuksen viimeiseen kaavaan, saadaan $h'(s) = 0$ kaikille $s \in [0,1]$. Näin saadaan

Lause 6.21. *Olkoot $D \subset \mathbb{C}$ alue, $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorfinen ja $\gamma_0\colon [a,b] \to D$ ja $\gamma_1\colon [a,b] \to D$ joukon D jatkuvasti differentioituvia polkuja.*

Oletetaan, että polut γ_0 ja γ_1 ovat silmukoita ja differentioituvasti silmukkahomotooppiset joukon D suhteen.

Tällöin

$$\oint_{\gamma_s} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_0} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz \quad \textit{kaikille } s \in [0,1]. \qquad \square$$

Huomautus 6.22. Lukija todetkoon, että edellisten lauseiden väitteet pätevät integraaleille $\int_{\gamma_s} f(z)\,dz$, missä $\gamma_s(t) := H(s,t)$, jos $\gamma_0\colon [a,b] \to D$ ja $\gamma_1\colon [a,b] \to D$ ovat alueen D **paloittain** jatkuvasti differentioituvia polkuja ja

$$H(s,t) := (1-s)\,\gamma_0(t) + s\,\gamma_1(t) \in D \quad \text{kaikille } s \in [0,1] \text{ ja } t \in [a,b].$$

Koska tässä polut γ_s ovat (vain) paloittain jatkuvasti differentioituvia, integraalit $\int_{\gamma_s} f(z)\,dz$ määritellään seuraavasti (katso määr. 3.13/$\mathbb{C}$An1):
Olkoon $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ välin $[a,b]$ jako niin, että polkujen γ_0 ja γ_1 derivaatat ovat jatkuvia jokaisessa pisteessä $t \in [a,b] \backslash P$. Tällöin

$$\int_{\gamma_s} f(z)\,dz := \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\gamma_s|_{[t_j,t_{j+1}]}} f(z)\,dz = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma_s(t))\,\gamma_s'(t)\,dt.$$

Esimerkki 6.23. Olkoot $\gamma_0\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}\backslash\{0\} =: D$ ja $\gamma_1\colon [0,\pi] \to D$,

$$\gamma_0(t) := e^{i\,t}, \quad \gamma_1(t) := e^{-i\,t}.$$

Tällöin poluilla γ_0 ja γ_1 on yhteiset lähtö- ja päätepisteet, mutta polut γ_0 ja γ_1 eivät ole differentioituvasti päätepisteet säilyttäen homotooppiset alueen D suhteen.

Nimittäin, funktio $f\colon D \to \mathbb{C}$, $f(z) := 1/z$, on holomorfinen alueessa D, mutta $\oint_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_0^\pi \frac{i\,e^{i\,t}}{e^{i\,t}}\,dt = \pi\,i$ ja $\oint_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^\pi \frac{-i\,e^{-i\,t}}{e^{-i\,t}}\,dt = -\pi\,i$. Koska integraalit ovat keskenään erisuuret, väite seuraa edellä olleesta lauseesta 6.20.

Sen sijaan koko kompleksitason suhteen polut γ_0 ja γ_1 ovat differentioituvasti päätepisteet säilyttäen homotooppiset; vertaa huomatukseen 6.19.

Määritelmä 6.24. Jatkuvasti differentioituvia silmukka $\gamma_0\colon [a,b] \to D$ on *differentioituvasti nollahomotooppinen alueen D suhteen*, jos on olemassa vakiopolku (eli pistemäinen polku) γ_1 siten, että γ_0 on differentioituvasti silmukkahomotooppinen polun γ_1 kanssa.

Huomautus 6.25. Polut γ_0 ja γ_1 ovat *homotooppiset kiintein päätepistein* ja vastaavasti *silmukkahomotooppiset*, jos määritelmän 6.18 ehdot toteutuvat ilman differentitoituvuusvaatimuksia ($H\colon [0,1] \times [a,b] \to D$ on jatkuva, $H(0,t) = \gamma_0(t)$ ja

$H(1,t) = \gamma_1(t)$ kaikille $t \in [a,b]$. Lisäksi tapauksessa homotopia kiintein päätepistein (KP) $H(s,a) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ ja $H(s,b) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ kaikille $s \in [0,1]$; ja silmukkahomotopialle (S) $H(s,a) = H(s,b)$ kaikille $s \in [0,1]$).

LUKU 7

Holomorfisen funktion potenssisarjaesitys

7.1. Kompleksisista sarjoista

7.1.1. Lukusarjat.

MÄÄRITELMÄ 7.1. *Kompleksilukujonon* $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ *määräämä sarja* on lukujono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, missä

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Luvut s_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, ovat *sarjan* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *osasummia* ja luvut a_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, *sarjan termejä.*

Sarja $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *suppenee*, jos jono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee; tällöin merkitään

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Sarja $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *suppenee itseisesti*, jos lukujonon $(|a_k|)_{k=1}^{\infty}$ määräämä sarja suppenee.

HUOMAUTUKSIA 7.2. a) Tavanomaista on, että puhutaan ”sarjasta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$”, vaikka merkintä on sama, joka on varattu sarjan summalle. Jotakin tuttuutta voitaisiin säilyttää (korrektiuden kärsimättä), jos sarjalle $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ käytettäisiin merkintää $\sum_k a_k$.

b) Myöhemmin potenssisarjojen yhteydessä lukujonojen indeksointi aloitetaan nollasta ja tällöin osasummina käytetään lukuja $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

c) Koska lukujonon $(|a_k|)_{k=1}^{\infty}$ määräämän sarjan osasummien $\tilde{s}_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ jono on kasvava, suppenee sarja $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ itseisesti, jos ja vain jos $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$.

d) Jos sarja $\sum_k a_k$ suppenee itseisesti, se suppenee.

e) Suppeneville kompleksitermisille sarjoille pätevät vastaavat laskusäännöt kuin reaalitermisille sarjoille: Jos sarjat $\sum_k a_k$ ja $\sum_k b_k$ suppenevat ja $c \in \mathbb{C}$, myös sarjat $\sum_k (a_k + b_k)$ ja $\sum_k c\, a_k$ suppenevat ja niiden summille on voimassa

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} c\, a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Edelleen, jos sarjat $\sum_k a_k$ ja $\sum_k b_k$ suppenevat itseisesti, myös sarjat $\sum_k (a_k + b_k)$ ja $\sum_k c\, a_k$ suppenevat itseisesti.

[1] Viimeksi muutettu 28.3.2020.

7.1.2. Funktiojonot. Olkoot $A \subset \mathbb{C}$ annettu joukko ja $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ annettu funktiojono funktioita $s_n\colon A \to \mathbb{C}$. Sanotaan, että *funktiojono* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *suppenee pisteittäin joukossa* A, jos jokaiselle $z \in A$ lukujono $(s_n(z))_{n=1}^{\infty}$ suppenee.

MÄÄRITELMÄ 7.3. *Funktiojono* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *suppenee tasaisesti joukossa* A *kohti funktiota* $s\colon A \to \mathbb{C}$, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$ siten, että

$$|s_n(z) - s(z)| \leqslant \varepsilon \quad \text{kaikille } z \in A \text{ ja kaikille } n \in \mathbb{Z}_+, \text{ joille } n \geqslant n_\varepsilon.$$

HUOMAUTUKSIA 7.4. a) Jos jokainen s_n on jatkuva ja jono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti kohti funktiota s, on myös s jatkuva (tod: HT).

b) Jono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti joukossa A (kohti jotakin funktiota), jos ja vain jos se toteuttaa *tasaisen suppenemisen Cauchyn ehdon* (tod: HT): jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$ siten, että

$$|s_n(z) - s_m(z)| \leqslant \varepsilon \quad \text{kaikille } z \in A, \text{ kaikille } n \in \mathbb{Z}_+ \text{ ja } m \in \mathbb{Z}_+, \text{ joille } n \geqslant n_\varepsilon \text{ ja } m \geqslant n_\varepsilon.$$

ESIMERKKI 7.5. Olkoon $s_n(z) := z^n$, kun $z \in B(0;1)$.

Koska $|s_n(z)| = |z|^n \to 0$, kun $n \to \infty$ (huomaa: $|z| < 1$), suppenee jono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ pisteittäin kohti nollafunktiota.

Olkoon $K \subset B(0;1)$ kompakti. Tällöin on olemassa $r \in (0,1)$ siten, että $K \subset \overline{B}(0;r)$. Kun $z \in K$, on $|s_n(z) - 0| = |z|^n \leqslant r^n$. Olkoon nyt $\varepsilon > 0$. Koska $r^n \to 0$, kun $n \to \infty$, on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$ siten, että $r^n \leqslant \varepsilon$, kun $n \geqslant n_\varepsilon$. Tällöin $|s_n(z) - 0| \leqslant \varepsilon$ kaikille $z \in K$, kun $n \geqslant n_\varepsilon$, joten jono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti kohti nollafunktiota joukossa K. Jono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ei kuitenkaan suppenee tasaisesti joukossa $B(0;1)$: Kun valitaan $z_n := 1 - \frac{1}{n}$, on $s_n(z_n) = (1 - \frac{1}{n})^n \to e^{-1}$, kun $n \to \infty$.

MÄÄRITELMÄ 7.6. *Funktiojono* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *suppenee* ***lokaalisti tasaisesti*** *joukossa* A *kohti funktiota* $s\colon A \to \mathbb{C}$, jos jokaiselle kompaktille joukolle $K \subset A$ jono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti funktiota s tasaisesti joukossa K, t.s. jos jokaiselle kompaktille joukolle $K \subset A$ ja jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $n_{K,\varepsilon} \in \mathbb{Z}_+$ siten, että

$$|s_n(z) - s(z)| \leqslant \varepsilon \quad \text{kaikille } z \in K \text{ ja kaikille } n \in \mathbb{Z}_+, \text{ joille } n \geqslant n_{K,\varepsilon}.$$

LEMMA 7.7. *Olkoot* $s_n\colon A \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *jatkuvia funktioita ja* γ *tie joukossa* A. *Oletetaan, että jono* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa* A *kohti funktiota* $s\colon A \to \mathbb{C}$. *Tällöin*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma s_n(z)\,dz = \int_\gamma s(z)\,dz.$$

TODISTUS. Jätetään lukijan tehtäväksi (huomaa: jälki $|\gamma| \subset A$ on kompakti). $\square$

LAUSE 7.8. *Oletetaan, että holomorfisten funktioiden* $s_n\colon G \to \mathbb{C}$ *jono* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *suppenee lokaalisti tasaisesti avoimessa joukossa* G *kohti funktiota* $s\colon G \to \mathbb{C}$. *Tällöin* s *on holomorfinen ja derivaatoille on voimasssa* $s_k^{(n)} \to s^{(n)}$ *lokaalisti tasaisesti joukossa* G *kaikilla* $n \in \mathbb{N}$.

TODISTUS. Käytetään apuna lokaalia Cauchyn integraalikaavaa. Olkoot $z_0 \in G$ ja $r > 0$ siten, että $\overline{B}(z_0;2r) \subset G$. Olkoon $\gamma\colon [0,2\pi] \to G$, $\gamma(t) := z_0 + 2r\,e^{it}$. Tällöin lokaalin Cauchyn integraalikaavan 5.9/ℂAn1 nojalla kaikille $k \in \mathbb{Z}_+$ on

$$s_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{s_k(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \quad \text{kaikille } z \in B(z_0;2r).$$

Määritellään $S\colon \mathbb{C}\setminus|\gamma| \to \mathbb{C}$,

$$S(z) := \frac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{\gamma} \frac{s(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Tällöin S on holomorfinen (lemma 5.11/CAn1).

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska polun γ jälki $|\gamma|$ on kompakti ja $s_k \to s$ lokaalisti tasaisesti joukossa G, on $s_k \to s$ tasaisesti joukossa $|\gamma|$. Siis on olemassa $N \in \mathbb{Z}_+$ siten, että

$$|s_k(\zeta) - s(\zeta)| \leqslant \varepsilon \quad \text{kaikille } \zeta \in |\gamma|, \text{ kun } k \geqslant N.$$

Kun $z \in B(z_0; r)$ ja $\zeta \in |\gamma|$, on $|\zeta - z| \geqslant |\zeta - z_0| - |z_0 - z| > 2r - r = r$. Siis kaikille $z \in B(z_0; r)$ ja $k \in \mathbb{Z}_+$, joille $k \geqslant N$, on

$$\begin{aligned} |s_k(z) - S(z)| &= \Big| \frac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{\gamma} \frac{s_k(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{\gamma} \frac{s(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \Big| = \Big| \frac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{\gamma} \frac{s_k(\zeta) - s(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \Big| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \Big| \frac{s_k(\zeta) - s(\zeta)}{\zeta - z} \Big|\, |d\zeta| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\varepsilon}{r}\, |d\zeta| = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Tämä tarkoittaa, että $s_k(z) \to S(z)$ kiekossa $B(z_0; r)$. Koska oletuksen nojalla $s_k(z) \to s(z)$, on $s(z) = S(z)$ kaikille $z \in B(z_0; r)$. Koska S on holomorfinen, on s on holomorfinen kiekossa $B(z_0; r)$. Ensimmäinen väite seuraa tästä.

Jälkimmäisen väitteen todistamiseksi: lokaalin Cauchyn integraalikaavan seurauksen 5.17/CAn1 nojalla kaikille $k \in \mathbb{Z}_+$ ja $n \in \mathbb{N}$ on

$$s_k^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\, i} \oint\limits_{\gamma} \frac{s_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \quad \text{kaikille } z \in B(z_0; 2r).$$

Todistuksen alkuosan ja lauseen 5.17/CAn1 nojalla

$$s^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\, i} \oint\limits_{\gamma} \frac{s(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \quad \text{kaikille } z \in B(z_0; 2r).$$

Kun $z \in B(z_0; r)$ ja $k \geqslant N$, on

$$\begin{aligned} |s_k^{(n)}(z) - s^{(n)}(z)| &= \Big| \frac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{\gamma} \frac{s_k(\zeta) - s(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \Big| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|s_k(\zeta) - s(\zeta)|}{|\zeta - z|^{n+1}}\, |d\zeta| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\varepsilon}{r^{n+1}}\, |d\zeta| = \frac{2\varepsilon}{r^n}. \end{aligned}$$

Tämä tarkoittaa, että $s_k^{(n)} \to s^{(n)}$ tasaisesti kiekossa $B(z_0; r)$. Tämän perusteella on tavanomaisin kompaktisuuspäättelyin näytettävissä, että $s_k^{(n)} \to s^{(n)}$ lokaalisti tasaisesti joukossa G. □

7.1.3. Funktiosarjat. Olkoot $A \subset \mathbb{C}$ annettu joukko ja $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ annettu funktiojono funktioita $f_k\colon A \to \mathbb{C}$. Merkitään jonon $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ määräämän sarjan osasummia s_n, t.s.

$$s_n(z) := \sum_{k=1}^{n} f_k(z).$$

Sanotaan, että

(i) *funktiosarja* $\sum_k f_k$ *suppenee pisteittäin*, jos lukujono $(s_n(z))_{n=1}^{\infty}$ suppenee jokaiselle $z \in A$;

(ii) *funktiosarja* $\sum_k f_k$ *suppenee tasaisesti joukossa* A, jos funktiojono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti joukossa A;

(iii) *funktiosarja* $\sum_k f_k$ *suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa* A, jos funktiojono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa A.

SEURAUS 7.9. *Olkoot* $f_k\colon A \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, *jatkuvia funktioita ja* γ *tie joukossa* A. *Oletetaan, että funktiosarja* $\sum_k f_k$ *suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa* A *Tällöin*

$$\int_\gamma \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)\,dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\gamma f_k(z)\,dz.$$

TODISTUS. Jätetään lukijan tehtäväksi (apuna edellä ollut vastaava jonolemma). □

LAUSE 7.10. *Olkoot* $f_k\colon G \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, *holomorfisia funktioita avoimessa joukossa* $G \subset \mathbb{C}$. *Oletetaan, että funktiosarja* $\sum_k f_k$ *suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa* G. *Tällöin funktio* $f\colon G \to \mathbb{C}$,

$$f(z) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

on holomorfinen ja kaikilla $n \in \mathbb{N}$ *on voimasssa*

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z).$$

TODISTUS. Seuraa välittömästi lauseesta 7.8. □

LAUSE 7.11 (Weierstrassin M-testi). *Olkoot* $f_k\colon A \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, *funktioita joukossa* $A \subset \mathbb{C}$. *Oletetaan, että on olemassa lukujono* $(M_k)_{k=1}^{\infty}$ *siten, että*

$$|f_k(z)| \leqslant M_k \quad \text{kaikilla } z \in A \text{ ja kaikilla } k \in \mathbb{Z}_+, \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty.$$

Tällöin funktiosarja $\sum_k f_k$ *suppenee itseisesti ja tasaisesti joukossa* A.

TODISTUS. Itseisen suppenemisen (eli, että $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(z)| < \infty$ kaikille $z \in A$) toteaminen jätetään lukijalle.

Osoitetaan tasainen suppeneminen. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska sarja $\sum_k M_k$ suppenee, sen osasummien jono on Cauchyn jono. On siis olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$ siten, että

$$\sum_{k=m+1}^{n} M_k = \sum_{k=1}^{n} M_k - \sum_{k=1}^{m} M_k \leqslant \varepsilon \quad \text{kaikille } n \in \mathbb{Z}_+ \text{ ja } m \in \mathbb{Z}_+, \text{ joille } n > m \geqslant n_\varepsilon.$$

Olkoon $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$. Tällöin kaikille $z \in A$, $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $m \in \mathbb{Z}_+$, joille $n > m \geqslant n_\varepsilon$, on voimassa

$$|s_n(z) - s_m(z)| = \Big|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(z)\Big| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(z)| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} M_k \leqslant \varepsilon.$$

Funktiojono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ toteuttaa siis tasaisen suppenemisen Cauchyn ehdon, joten jono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti joukossa A. $\square$

MÄÄRITELMÄ 7.12. Olkoot $f_k\colon A \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, funktioita joukossa $A \subset \mathbb{C}$. Sanotaan, että *funktiosarja* $\sum_k f_k$ *suppenee normaalisti joukossa* A, jos on olemassa lukujono $(M_k)_{k=1}^{\infty}$ siten, että

$$|f_k(z)| \leqslant M_k \quad \text{kaikilla } z \in A \text{ ja kaikilla } k \in \mathbb{Z}_+, \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty.$$

Sanotaan, että *funktiosarja* $\sum_k f_k$ *suppenee lokaalisti normaalisti joukossa* A, jos jokaiselle kompaktille joukolle $K \subset A$ funktiosarja $\sum_k f_k$ suppenee normaalisti joukossa K.

HUOMAUTUKSIA 7.13. a) Normaalin suppenemisen käsite vaihtelee kirjallisuudessa. Yllä oleva vastaa esimerkiksi kirjojen [**12**, määr. VIII.6.1] ja [**5**, luku V, §2] terminologiaa. Freitagin ja Busamin kirjan [**7**, määr. III.1.4] normaali suppeneminen tarkoittaa yllä olevan määritelmän mukaan "suppenee normaalisti jokaisessa kompaktissa osajoukossa" (eli suppenee lokaalisti normaalisti). Kirjoissa [**19**, määr. 5.1.1] ja [**8**, luku V, §2] normaali suppeneminen tarkoittaa funktiojonon lokaalia tasaista suppenemista.

b) Nimityksen normaali suppeneminen ei pidä antaa hämätä; se **ei** tarkoita tavallista pisteittäistä suppenemista.

c) Normaali suppeneminen on vahvempi ehto kuin "suppenee itseisesti ja tasaisesti". Esimerkiksi, jos $A := [1, \infty)$ ja jokaiselle $k \in \mathbb{Z}_+$ asetetaan $f_k(x) := 1/k$, kun $k \leqslant x < k+1$, ja $f_k(x) := 0$ muuten, on $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = 1/n$, kun $x \in [n, n+1)$, joten

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) = \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{kaikille } x \in A.$$

Funktiosarja $\sum_k f_k$ suppenee siis tasaisesti. Positiivitermisenä sarjana se suppenee itseisesti. Sarja ei kuitenkaan suppene normaalisti: Luvuille M_k pitää olla $M_k \geqslant \frac{1}{k}$. Koska sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ei suppene, ei sarja suppene normaalisti.

7.1.4. Ala- ja yläraja-arvo.

MÄÄRITELMÄ 7.14. Olkoon $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ reaalilukujono. Asetetaan

$$b_k := \inf\{a_n \mid n \geqslant k\} \quad \text{ja} \quad c_k := \sup\{a_n \mid n \geqslant k\}$$

sekä

$$\liminf_{k\to\infty} a_k := \varliminf_{k\to\infty} a_k := \lim_{k\to\infty} b_k = \sup\{b_k \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$$

ja

$$\limsup_{k\to\infty} a_k := \varlimsup_{k\to\infty} a_k := \lim_{k\to\infty} c_k = \inf\{c_k \mid k \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Luku $\liminf_{k\to\infty} a_k$ on jonon $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *alaraja-arvo* ja $\limsup_{k\to\infty} a_k$ *yläraja-arvo.*

Tässä sallitaan $b_k = -\infty$, $c_k = \infty$, $\liminf_{k\to\infty} a_k = \pm\infty$ ja $\limsup_{k\to\infty} a_k = \pm\infty$.

Huomaa, että jono $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ on kasvava ja jono $(c_k)_{k=1}^{\infty}$ on vähenevä. Niillä on siis raja-arvo, kun äärettömät raja-arvot sallitaan.

Lukijalle jätetään osoitettavaksi, että: jos jono $(a_n)_{n=1}^\infty$ on suppeneva ja $A \in \mathbb{R}$ sen raja-arvo, niin

$$\sup\{b_k \mid k \in \mathbb{Z}_+\} = \lim_{k\to\infty} b_k = A = \inf\{c_k \mid k \in \mathbb{Z}_+\} = \lim_{k\to\infty} c_k;$$

ja jos jonot $(b_k)_{k=1}^\infty$ ja $(c_k)_{k=1}^\infty$ suppenevat ja niillä on sama raja-arvo, $\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} c_k =: A$, niin jono $(a_n)_{n=1}^\infty$ on suppeneva ja A sen raja-arvo.

Edelleen, kun $(a_j)_{j=1}^\infty$ on reaalilukujono, on $b = \liminf_{j\to\infty} a_j \iff$

(i) kaikilla $\alpha < b$ joukko $\{k \in \mathbb{Z}_+ \mid a_k < \alpha\}$ on äärellinen, ja
(ii) kaikilla $\beta > b$ joukko $\{k \in \mathbb{Z}_+ \mid a_k < \beta\}$ on ääretön.

Vastaavasti $c = \limsup_{j\to\infty} a_j \iff$

(i) kaikilla $\alpha < c$ joukko $\{k \in \mathbb{Z}_+ \mid a_k > \alpha\}$ on ääretön, ja
(ii) kaikilla $\beta > c$ joukko $\{k \in \mathbb{Z}_+ \mid a_k > \beta\}$ on äärellinen.

7.1.5. Potenssisarjat.

Määritelmä 7.15. Funktiosarja $\sum_k f_k$ on *potenssisarja pisteen* z_0 *suhteen*, jos sen termit ovat muotoa

$$f_k(z) = a_k\,(z - z_0)^k,$$

missä $(a_k)_{k=0}^\infty$ on kompleksilukujono ja $z_0 \in \mathbb{C}$. Luvut a_k ovat *potenssisarjan kertoimia* ja luku z_0 *potenssisarjan* $\sum_k a_k\,(z - z_0)^k$ *keskus.*

Määritelmä 7.16. *Potenssisarjan* $\sum_k a_k\,(z - z_0)^k$ *suppenemissäde* on luku ϱ, jolle

$$\frac{1}{\varrho} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Kiekkoa $B(z_0;\varrho)$ kutsutaan *potenssisarjan* $\sum_k a_k\,(z - z_0)^k$ *suppenemiskiekoksi.* Jos $\varrho = \infty$, asetetaan $B(z_0;\varrho) := \mathbb{C}$.

Lause 7.17. *Olkoon ϱ potenssisarjan $\sum_k a_k\,(z - z_0)^k$ suppenemissäde. Tällöin on voimassa*

(i) *potenssisarja $\sum_k a_k\,(z - z_0)^k$ hajaantuu kaikille $z \in \mathbb{C}$, joille $|z - z_0| > \varrho$;*
(ii) *jos $\varrho > 0$, potenssisarja $\sum_k a_k\,(z - z_0)^k$ suppenee normaalisti jokaisessa kiekossa $\overline{B}(z_0;r)$, missä $0 < r < \varrho$. Tällöin kiekossa $B(z_0;\varrho)$ määritelty funktio*

$$f(z) := \sum_{k-0}^{\infty} a_k\,(z - z_0)^k$$

on holomorfinen ja sille on $f^{(n)}(z_0) = n!\,a_n$.

Todistus. (i) Olkoon $z \in \mathbb{C}$, jolle $r := |z - z_0| > \varrho$. Tällöin $\frac{1}{r} < \frac{1}{\varrho}$. Yläraja-arvon määritelmästä seuraa, että on olemassa äärettömän monta indeksiä $k \in \mathbb{Z}_+$ siten, että $\frac{1}{r} < \sqrt[k]{|a_k|}$. Siis äärettömän monelle indeksille k on $\frac{1}{r^k} < |a_k|$. Näille indekseille k on

$$|a_k\,(z - z_0)^k| = |a_k|\,|z - z_0|^k \geqslant \frac{1}{r^k}\,r^k = 1.$$

Tällöin $a_k\,(z - z_0)^k \not\to 0$, kun $k \to \infty$, joten sarja $\sum_k a_k\,(z - z_0)^k$ hajaantuu.

(ii) Olkoon $\varrho > 0$. Valitaan $r \in (0,\varrho)$. Osoitetaan, että sarja $\sum_k a_k\,(z - z_0)^k$ suppenee normaalisti kiekossa $\overline{B}(z_0;r)$. Tätä varten olkoon $s \in (r,\varrho)$. Nyt $\frac{1}{s} > \frac{1}{\varrho}$. Yläraja-arvon määritelmästä seuraa, että on olemassa $N \in \mathbb{Z}_+$ siten, että $\frac{1}{s} > \sqrt[k]{|a_k|}$, kun $k \geqslant N$. Kun $k \geqslant N$, on $\frac{1}{s^k} > |a_k|$, joten kaikille $z \in \overline{B}(z_0; r)$ on

$$|a_k\,(z - z_0)^k| = |a_k|\,|z - z_0|^k \leqslant \frac{1}{s^k}\,r^k = (r/s)^k.$$

Koska $r/s < 1$ ja geometrinen sarja $\sum_{k=N}^{\infty}(r/s)^k$ suppenee, sarja $\sum_k a_k\,(z - z_0)^k$ suppenee normaalisti kiekossa $\overline{B}(z_0; r)$.

Viimeinen väite seuraa Weierstrassin M-testin ja lauseen 7.10 avulla. □

7.2. Analyyttiset funktiot

LAUSE 7.18 (Potenssisarjaesitys). *Olkoot $G \subset \mathbb{C}$ avoin, $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorfinen, $z_0 \in G$ ja $r > 0$ siten, että $B(z_0; r) \subset G$. Tällöin funktiolla f on pisteen z_0 suhteen esitys kiekossa $B(z_0; r)$ suppenevana potenssisarjana*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z - z_0)^k.$$

Lisäksi $a_k = \frac{1}{k!}\,f^{(k)}(z_0)$ kaikille $k \in \mathbb{N}$.

Saatu esitys on funktion f Taylorin sarja pisteen z_0 suhteen.

TODISTUS. Olkoon $z \in B(z_0; r)$. Valitaan $s \in (|z - z_0|, r)$. Kun $\zeta \in \partial B(z_0; s)$, on

$$\Big|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Big| = \frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{s} < \frac{s}{s} = 1.$$

Geometrisen sarjan summakaavan avulla saadaan kaikille $\zeta \in \partial B(z_0; s)$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Big)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)\,(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}.$$

Weierstrassin M-testin nojalla saatu sarja suppenee muuttujan ζ funktiona tasaisesti kiekon $B(z_0; s)$ reunalla. Kun $\gamma(t) := z_0 + s\,e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$, saadaan Cauchyn integraalikaavan 5.9/ℂAn1 nojalla

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\,i}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi\,i}\oint_\gamma \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)\,(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta$$

ja edelleen seurauksen 7.9 nojalla

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\,i}\sum_{k=0}^{\infty}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)\,(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty}(z - z_0)^k\,\frac{1}{2\pi\,i}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta.$$

Cauchyn integraalikaavan seurauksen 5.17/ℂAn1 nojalla

$$\frac{1}{2\pi\,i}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Funktiolla f on siis kiekossa $B(z_0; r)$ esitys

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z - z_0)^k,$$

missä $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$. □

Huomautus 7.19. Holomorfisen funktion Taylorin sarjan $\sum_k a_k (z-z_0)^k$ suppenemissäde on vähintään suurimman joukkoon G sisältyvän z_0-keskisen kiekon säde.

Määritelmä 7.20. Olkoot $G \subset \mathbb{C}$ avoin ja $f\colon G \to \mathbb{C}$ annettu funktio. Funktio f on *(kompleksi-)analyyttinen*, jos jokaiselle $z_0 \in G$ on olemassa $r > 0$ siten, että $B(z_0; r) \subset G$ ja funktiolla f on esitys kiekossa $B(z_0; r)$ suppenevana potenssisarjana

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k.$$

Lauseista 7.17 ja 7.18 saadaan

Lause 7.21. *Funktio $f\colon G \to \mathbb{C}$ on holomorfinen, jos ja vain jos se on kompleksianalyyttinen.* □

Esimerkki 7.22. Olkoon $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := e^z$.
Funktiolle f on $f^{(k)}(z) = e^z$ kaikille $z \in \mathbb{C}$ ja $k \in \mathbb{N}$, joten

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

Koska f on holomorfinen koko kompleksitasossa, funktion f Taylorin sarja pisteen $z = 0$ suhteen suppenee lauseen 7.18 nojalla jokaisessa kiekossa $B(0; r)$, $r > 0$. Lauseen 7.17 nojalla sarjan suppenemissäde on siis $\varrho = \infty$.

Lause 7.23. *Olkoon f analyyttinen alueessa D. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(i) *$f(z) = 0$ kaikille $z \in D$;*
(ii) *joukolla*

$$N := \{z \in D \mid f(z) = 0\}$$

on kasautumispiste joukossa D;
(iii) *on olemassa $z_0 \in D$ siten, että $f^{(k)}(z_0) = 0$ kaikille $k \in \mathbb{N}$.*

Todistus. (i)$\Rightarrow$(ii) on selvä.

(ii)$\Rightarrow$(iii): Olkoon $z_0 \in D$ joukon N kasautumispiste. Koska f on jatkuva, on $f(z_0) = 0$.
Tehdään antiteesi: on olemassa $k \in \mathbb{N}$ siten, että $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.
Olkoon $k_0 := \min\{k \in \mathbb{N} \mid f^{(k)}(z_0) \neq 0\}$. Tällöin funktion f Taylorin sarja pisteen z_0 suhteen on muotoa

$$f(z) = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad \text{missä } a_{k_0} \neq 0.$$

Olkoon $r > 0$ siten, että y.o. sarja suppenee kiekossa $B(z_0; r)$. Kun merkitään

$$g(z) := \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+k_0} (z-z_0)^j,$$

on g analyyttinen kiekossa $B(z_0; r)$ ja

$$f(z) = (z-z_0)^{k_0} g(z).$$

Analyyttisenä funktiona g on jatkuva, ja koska $g(z_0) = a_{k_0} \neq 0$, on olemassa $r' \in (0, r)$ siten, että $g(z) \neq 0$ kaikille $z \in B(z_0; r')$. Tällöin $f(z) \neq 0$ kaikille $z \in B(z_0; r') \backslash \{z_0\}$. Tämä on vastoin oletusta, että z_0 on joukon N kasautumispiste.

(iii)⇒(i): Olkoon

$$U := \{z \in D \mid f^{(k)}(z) = 0 \text{ kaikille } k \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{z \in D \mid f^{(k)}(z) = 0\}.$$

Koska analyyttisen funktion kaikki derivaatat ovat jatkuvia, on U suljettu joukon D suhteen. Oletuksen nojalla $z_0 \in U$, joten $U \neq \varnothing$. Koska D on yhtenäinen, riittää näyttää, että U on avoin (miksi?). Olkoon $z_1 \in U$, ja olkoon

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_1)^k$$

funktion f kiekossa $B(z_1; r)$ suppeneva Taylorin sarja pisteen z_1 suhteen. Lauseen 7.18 nojalla

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_1)}{k!} = 0 \quad \text{kaikille } k \in \mathbb{N}.$$

Tällöin $f(z) = 0$ kaikille $z \in B(z_1; r)$, joten $B(z_1; r) \subset U$. Tällöin U on avoin ja joukolle D saadaan esitys kahden avoimen pistevieraan joukon yhdisteenä $D = U \cup (D \backslash U)$. Joukon D yhtenäisyyden takia $D \backslash U = \varnothing$, joten $U = D$. □

MÄÄRITELMÄ 7.24. Olkoot f analyyttinen avoimessa joukossa G ja $z_0 \in G$. Jos $f(z_0) = 0$ ja $f \not\equiv 0$ jossakin pisteen z_0 ympäristössä, luku

$$k_0 := \min\{k \in \mathbb{N} \mid f^{(k)}(z_0) \neq 0\}$$

on *nollakohdan* z_0 *kertaluku.*

LAUSE 7.25. *Olkoot f analyyttinen avoimessa joukossa G, $z_0 \in G$ ja $k_0 \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(i) *piste z_0 on funktion f nollakohta ja sen kertaluku on k_0;*
(ii) *on olemassa analyyttinen funktio $g \colon G \to \mathbb{C}$ siten, että $g(z_0) \neq 0$ ja*

$$f(z) = (z - z_0)^{k_0} g(z).$$

TODISTUS. (i)⇒(ii): Olkoon $r > 0$ siten, että $B(z_0; r) \subset G$ ja funktiolla f on kiekossa $B(z_0; r)$ esitys suppenevana potenssisarjana

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Lauseen 7.17 nojalla $f^{(k)}(z_0) = k!\, a_k$. Oletuksen nojalla on siis $a_k = 0$, kun $k < k_0$, ja $a_{k_0} \neq 0$. Siis

$$f(z) = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^{k_0} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+k_0} (z - z_0)^j =: (z - z_0)^{k_0} g(z).$$

Tässä määritelty funktio g on analyyttinen kiekossa $B(z_0; r)$ ja $g(z_0) = a_{k_0} \neq 0$, joten funktiolla g on vaaditut ominaisuudet.

(ii)⇒(i): Kun g on kuten kohdassa (ii), on $g(z) \neq 0$ jossakin kiekossa $B(z_0; r)$. Tulon derivointisäännöstä saadaan induktiolla[2]: Kun $k \leqslant k_0$, on

$$f^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} k_0\,(k_0-1)\cdots(k_0-(j-1))\,(z-z_0)^{k_0-j}\,g^{(k-j)}(z),$$

joten

$$f^{(k)}(z_0) = \begin{cases} 0, & \text{kun } k < k_0, \\ k_0!\,g(z_0), & \text{kun } k = k_0. \end{cases}$$

Funktiolla f on siis kertalukua k_0 oleva nollakohta pisteessä z_0. □

7.3. Laurentin sarja

MÄÄRITELMÄ 7.26. *Kaksoissarja* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k$ *suppenee*, jos kumpikin sarjoista

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k \quad \text{ja} \quad \sum_{j=1}^{\infty} z_{-j} \quad \text{suppenee.}$$

Tällöin

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k := \sum_{k=0}^{\infty} z_k + \sum_{j=1}^{\infty} z_{-j}.$$

Kaksoissarja $\sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k$ *suppenee itseisesti*, jos kumpikin sarjoista

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k \quad \text{ja} \quad \sum_{j=1}^{\infty} z_{-j} \quad \text{suppenee itseisesti.}$$

Funktiokaksoissarjojen *suppeneminen*, *itseinen suppeneminen*, *tasainen suppeneminen* ja *normaali suppeneminen joukossa* A määritellään vastaavalla tavalla kuin tavallisten funktiosarjojen kohdalla meneteltiin.

MÄÄRITELMÄ 7.27. *Laurentin sarja*[3] *pisteen* z_0 *suhteen* on muotoa

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$$

oleva funktiokaksoissarja.

Luku

$$\varrho_O := \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

on Laurentin sarjan $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$ *ulkopuolinen suppenemissäde* ja

$$\varrho_I := \limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{|a_{-j}|}$$

on Laurentin sarjan $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$ *sisäpuolinen suppenemissäde.*

Kun $\varrho_I < \varrho_O$, alue

$$A(z_0; \varrho_I, \varrho_O) := \{z \in \mathbb{C} \mid \varrho_I < |z-z_0| < \varrho_O\}$$

[2] Osoita *Leibnizin sääntö*: kun $f = g\,h$, on $f^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} g^{(k-j)}(z)\,h^{(j)}(z)$.

[3] PIERRE ALPHONSE LAURENT (1813–1854), Ranska; sarja 1843.

on Laurentin sarjan $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$ *suppenemisrengas.* Jos $\varrho_I = 0$ ja $\varrho_O = \infty$, suppenemisrenkaaksi asetetaan $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$.

HUOMAUTUS 7.28. Tavallinen potenssisarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$ on Laurentin sarja, missä $a_k = 0$, kun $k < 0$. Sen sisäpuolinen suppenemissäde $\varrho_I = 0$.

LAUSE 7.29 (Laurentin sarjan suppeneminen). *Olkoot ϱ_I ja ϱ_O Laurentin sarjan $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$ sisäpuolinen ja ulkopuolinen suppenemissäde.*

Tällöin sarja hajaantuu, jos

$$|z-z_0| > \varrho_O \quad \textit{tai} \quad |z-z_0| < \varrho_I.$$

Lisäksi on voimassa:

(i) *Jos $\varrho_O > 0$, niin sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$ suppenee lokaalisti normaalisti kiekossa $B(z_0;\varrho_O)$ ja määrittelee analyyttisen funktion f_O kiekossa $B(z_0;\varrho_O)$.*

(ii) *Jos $\varrho_I < \infty$, niin sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_{-j}\,(z-z_0)^{-j}$ suppenee lokaalisti normaalisti avoimessa joukossa $U(z_0;\varrho_I) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| > \varrho_I\}$ ja määrittelee analyyttisen funktion f_I joukossa $U(z_0;\varrho_I)$.*

(iii) *Jos $\varrho_I < \varrho_O$, Laurentin sarja $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$ suppenee lokaalisti normaalisti suppenemisrenkaassa $A(z_0;\varrho_I,\varrho_O)$, joten*

$$f(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k = f_I(z) + f_O(z)$$

on analyyttinen renkaassa $A(z_0;\varrho_I,\varrho_O)$.

Lisäksi kaikille $k \in \mathbb{Z}$ ja kaikille $r \in (\varrho_I,\varrho_O)$ on

$$a_k = \frac{1}{2\pi\,i} \oint\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\,d\zeta.$$

TODISTUS. Laurentin sarjan $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$ ulkopuolinen suppenemissäde ϱ_O on sama kuin potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$ suppenemissäde. Näin ollen ulkopuolista suppenemissädettä ϱ_O ja funktiota f_O koskevat väitteet seuraavat lauseesta 7.17.

Sisäpuolista suppenemissädettä ja funktiota f_I koskevia väitteita varten merkitään $\zeta := \frac{1}{z-z_0}$ ja tarkastellaan sarjaa

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{-j}\,\zeta^j.$$

Tämän potenssisarjan suppenemissäde on $1/\varrho_I$. Lauseen 7.17 nojalla, jos $\varrho_I < \infty$, sarja suppenee lokaalisti normaalisti kiekossa $B(0;1/\varrho_I)$. Lisäksi sarja hajaantuu jokaiselle $\zeta \in \mathbb{C}$, jolle $|\zeta| > 1/\varrho_I$. Alkuperäiselle muuttujalle z nämä ehdot tarkoittavat, että jos $\varrho_I < \infty$, sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_{-j}\,(z-z_0)^{-j}$ suppenee lokaalisti normaalisti joukossa $U(z_0;\varrho_I)$, ja hajaantuu, kun $|z-z_0| < \varrho_I$. Lisäksi funktio f_I on analyyttinen joukossa $U(z_0;\varrho_I)$.

Siis kaksoissarja $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$ hajaantuu, jos $|z-z_0| > \varrho_O$ tai $|z-z_0| < \varrho_I$. Jos $\varrho_I < \varrho_O$, kaksoissarja $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$ suppenee lokaalisti normaalisti renkaassa $A(z_0;\varrho_I,\varrho_O)$ ja siellä

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k = f_I(z) + f_O(z)$$

on analyyttinen.

Kertoimia koskevaa väitettä varten olkoon $\gamma(t) := z_0 + r\,e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$, missä $r \in (\varrho_I, \varrho_O)$. Lauseen 7.9 nojalla kaksoissarjan summauksen ja integroinnin järjestys voidaan vaihtaa, joten

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\,i}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta &= \frac{1}{2\pi\,i}\oint_\gamma \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j\,(\zeta - z_0)^{j-k-1}\,d\zeta \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{a_j}{2\pi\,i}\oint_\gamma (\zeta - z_0)^{j-k-1}\,d\zeta = a_k,\end{aligned}$$

sillä kun $j \neq k$, funktiolla $\zeta \mapsto (\zeta - z_0)^{j-k-1}$ on primitiivi $\zeta \mapsto \frac{1}{j-k}\,(\zeta - z_0)^{j-k}$. □

Osoitetaan seuraavaksi, että rengasalueessa holomorfinen funktio voidaan esittää Laurentin sarjana.

Lause 7.30 (Holomorfisen funktion esitys Laurentin sarjana). *Oletetaan, että* $0 \leqslant a < b \leqslant \infty$. *Olkoon* f *holomorfinen renkaassa*

$$D := A(z_0; a, b) = \{z \in \mathbb{C} \mid a < |z - z_0| < b\}.$$

Tällöin on olemassa holomorfiset funktiot

$$g\colon B(0; b) \to \mathbb{C} \quad \textit{ja} \quad h\colon B(0; 1/a) \to \mathbb{C}$$

siten, että $h(0) = 0$ *ja*

$$f(z) = g(z - z_0) + h(1/(z - z_0)) \quad \textit{kaikille } z \in D.$$

Lisäksi funktiolla f *on Laurentin sarja*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n,$$

missä

$$a_n = \frac{1}{2\pi\,i}\oint_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta$$

ja $\gamma_r(t) := z_0 + r\,e^{i\,t}$, *kun* $t \in [0, 2\pi]$ *ja* $a < r < b$.

Todistus. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi olkoon $z_0 := 0$ (muussa tapauksessa korvataan z muuttujalla $\tilde{z} := z - z_0$).

Kiinnitetään $z \in D$. Valitaan luvut c ja d siten, että $a < c < |z| < d < b$. Määritellään $G\colon D \to \mathbb{C}$,

$$G(\zeta) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \text{kun } \zeta \neq z, \text{ ja} \\ f'(z), & \text{kun } \zeta = z. \end{cases}$$

Tällöin G on holomorfinen alueessa $D \backslash \{z\}$ ja jatkuva joukossa D. Kurssilla Kompleksianalyysi 1 todistetun lemman 4.6 ja lauseen 5.12 nojalla G on tällöin holomorfinen koko joukossa D.

Kun $a < r < b$, eri vakion r arvoja vastaavat polut $\gamma_r\colon [0, 2\pi] \to D$, $\gamma_r(t) := z_0 + r\,e^{i\,t}$, ovat keskenään differentioituvasti silmukkahomotooppiset alueen D suhteen. Cauchyn integraalilauseen 6.21 nojalla (versio differentioituva silmukkahomotopia kohdassa ”Tieintegaalit ja homotopia”)

$$\oint_{\gamma_c} G(\zeta)\,d\zeta = \oint_{\gamma_d} G(\zeta)\,d\zeta$$

Tästä saadaan

$$\oint_{\gamma_c} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - f(z)\,2\pi\,i\,W(\gamma_c; z) = \oint_{\gamma_d} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - f(z)\,2\pi\,i\,W(\gamma_d; z).$$

Tässä $W(\gamma_c; z) = 0$ (koska z on c-säteisen kiekon ulkopuolella) ja $W(\gamma_d; z) = 1$ (koska z on d-säteisen kiekon sisäpuolella). Siis

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\,i} \oint_{\gamma_d} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi\,i} \oint_{\gamma_c} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = g(z) + h(1/z),$$

missä

$$g(z) := \frac{1}{2\pi\,i} \oint_{\gamma_d} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad \text{kun } |z| < d, \quad \text{ja}$$

$$h(w) := \frac{1}{2\pi\,i} \oint_{\gamma_c} \frac{w\,f(\zeta)}{1 - \zeta\,w}\,d\zeta, \quad \text{kun } |w| < 1/c.$$

Funktiot g ja h ovat parametrista riippuvan integraalin derivointilauseen $\mathbb{C}$An1/5.3 seurauksena holomorfisia määrittelyjoukoissaan.[4] Funktiolla f on siis kaivattu esitys pisteissä z, joissa $c < |z| < d$, missä c ja d ovat ehdot $a < c < d < b$ toteuttavia vakioita.

Funktio g riippuu periaatteessa vakiosta d, $g(z) = g_d(z)$, mutta koska eri vakion d arvoille d ja d', joille $|z| < d < b$ ja $|z| < d' < b$, polut γ_d ja γ_d' ovat keskenään differentioituvasti silmukkahomotooppiset alueen $D_{z,O} := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |z| < |\zeta| < b\}$ suhteen ja funktio $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ on holomorfinen alueessa $D_{z,O}$, Cauchyn integraalilauseen 6.21 (versio differentioituva silmukkahomotopia) nojalla eri vakion d arvoja vastaavat arvot $g_d(z)$ ja $g_{d'}(z)$ ovat samat. Funktio g on siis hyvin määritelty koko kiekossa $B(0; b)$: $g(z) := g_d(z)$, missä d valitaan siten, että $|z| < d < b$.

Vastaava päättely funktiolle $h = h_c$ (vakiot c ja c', joille $a < c < |z|$ ja $a < c' < |z|$, alue $D_{z,I} := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid a < |\zeta| < |z|\}$ ja alueessa $D_{z,I}$ holomorfinen funktio $\zeta \mapsto \frac{w\,f(\zeta)}{1 - \zeta\,w} = -\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$, missä $w = 1/z$) antaa funktiolle h arvot koko kiekossa $B(0; 1/a)$: $h(w) := h_c(w)$, missä c valitaan siten, että $|w| < 1/c < 1/a$.

[4]Kyseisen lauseen nojalla g on itse asiassa holomorfinen polun γ_d jäljen $|\gamma_d|$ komplementissa; vastaavasti $z \mapsto h(1/z)$ on holomorfinen jäljen $|\gamma_c|$ komplementissa. Funktion f kannalta relevantteja arvoja saadaan kuitenkin vain kiekoissa $|z| < d$ ja $|w| < 1/c$ (eli $|z| > c$).

Koska g on holomorfinen kiekossa $B(0;b)$, on sillä esitys kiekossa $B(0;b)$ suppenevana Taylorin sarjana (lause 7.18)

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k.$$

Vastaavasti, koska h on holomorfinen kiekossa $B(0;1/a)$ ja $h(0) = 0$, on sillä esitys kiekossa $B(0;1/a)$ suppenevana Taylorin sarjana

$$h(w) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m\, w^m.$$

Asetetaan $a_{-m} := b_m$, kun $m \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin kaikille $z \in D$ on voimassa $z \in B(0;b)$ ja $1/z \in B(0;1/a)$, joten funktiolle f saadaan esitys renkaassa D suppenevana Laurentin sarjana

$$f(z) = g(z) + h(1/z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, z^k.$$

Koska sarjat $\sum_{k=-\infty}^{-1} \ldots$ ja $\sum_{k=0}^{\infty} \ldots$ suppenevat renkaassa D, suppenevat ne tasaisesti polun γ_r jäljellä ja integroinnin ja sarjan summauksen järjestys voidaan vaihtaa (lause 7.9)

$$\frac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi\, i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \oint\limits_{\gamma_r} \frac{z^k}{z^{n+1}}\, dz = a_n.$$

Huomaa: $\oint_{\gamma_r} \frac{z^k}{z^{n+1}}\, dz = 2\pi\, i$, kun $k = n$; muuten $\oint_{\gamma_r} \frac{z^k}{z^{n+1}}\, dz = 0$. □

7.3.1. Esimerkki: kompleksiset Fourier'n sarjat. Olkoot $(a,b) \subset \mathbb{R}$ avoin väli,

$$D := \{x + i\, y \in \mathbb{C} \mid a < y < b\}$$

ja $f\colon D \to \mathbb{C}$ jaksollinen holomorfinen funktio, jaksona 1, t.s. $f(z+1) = f(z)$ kaikille $z \in D$.

Kuvaus

$$D \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto e^{2\pi\, i\, z} =: q,$$

kuvaa alueen D renkaaksi[5]

$$A := \{q \in \mathbb{C} \mid r < |q| < R\}, \quad \text{missä } r := e^{-2\pi\, b} \text{ ja } R := e^{-2\pi\, a}.$$

Koska tämäkin kuvaus on 1-jaksoinen, on olemassa funktio $g\colon A \to \mathbb{C}$ siten, että

$$f(z) = g(e^{2\pi\, i\, z}) \quad \text{kaikille } z \in D.$$

Käyttämällä kahta logaritmin haaraa apuna, on helppo todeta, että myös g on holomorfinen. Funktio g voidaan näin ollen esittää Laurentin sarjana

$$g(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, q^n,$$

missä

$$a_n = \frac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{|\eta|=\varrho} \frac{g(\eta)}{\eta^{n+1}}\, d\eta = \int_0^1 \frac{g(\varrho\, e^{2\pi\, i\, x})}{\varrho^n\, e^{2\pi\, i\, n\, x}}\, dx.$$

[5] Arvot $a = -\infty$ ja $b = \infty$ voidaan sallia. Jos $a = -\infty$, $e^{-2\pi\, a} := \infty$, ja jos $b = \infty$, $e^{-2\pi\, b} := 0$.

Kun luku $\varrho \in (r, R)$ esitetään muodossa $\varrho = e^{-2\pi y}$, on $y \in (a, b)$, $g(\varrho\, e^{2\pi i x}) = g(e^{2\pi i (x+i y)}) = f(x + i y)$ ja

$$a_n = \int_0^1 f(x + i y)\, e^{-2\pi i n (x+i y)}\, dx.$$

Siis joukossa D holomorfinen 1-jaksoinen funktio f voidaan esittää *kompleksisena Fourier'n sarjana*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, e^{2\pi i n z},$$

missä

$$a_n = \int_0^1 f(z)\, e^{-2\pi i n z}\, dx$$

ovat sarjan *kompleksiset Fourier'n kertoimet.* Tässä $z = x + i y$, ja y voidaan valita mielivaltaisesti väliltä (a, b). Lisäksi saatu Fourier'n sarja suppenee lokaalisti normaalisti joukossa D.

Reaalimuuttujan funktioiden tapauksessa joukon D tilalla on x-akseli (eli välin (a, b) tilalla on yksiö $\{0\}$). Fourier'n sarjoihin tutustuneille reaalimuuttujan funktioiden esitettävyys Fourier'n sarjana saattaa vaikuttaa työläämmältä osoittaa, mutta apuna tässä on vahvoja työkaluja, jotka kulminoituvat Laurentin sarjoihin. Toisekseen, reaalimuuttujan funktioiden kohdalla tapana on pyrkiä löytämään melko yleinen funktioluokka, joille Fourier'n sarjaesitystä etsitään. Yksinkertainen, mutta melko käyttökelpoinen funktioluokka on paloittain jatkuvat, paloittain jatkuvasti derivoituvat funktiot. Edellä on rajoituttu varsin ”sileisiin” funktioihin, holomorfisiin.

LUKU 8

Eristetyt erikoispisteet ja residylause

8.1. Erikoispisteet

Olkoot $G \subset \mathbb{C}$ avoin joukko ja $f\colon G \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio. Olkoon z_0 piste, jolle on voimassa $z_0 \notin G$, mutta jollekin $r > 0$ punkteerattu kiekko $B^*(z_0; r) = B(z_0; r) \backslash \{z_0\} \subset G$. Tällaista pistettä z_0 kutsutaan funktion f *eristetyksi erikoispisteeksi* (tai lyhyesti *erikoispisteeksi*).

Sanotaan, että *funktio f on analyyttinen joukossa $G' := G \cup E$ lukuunottamatta eristettyjä erikoispisteitä*, jos eristettyjen erikoispisteiden joukolla E ei ole kasautumispistettä $z_0 \in \mathbb{C}$ siten, että jollekin $r > 0$ on $B^*(z_0; r) \subset G$.

Olkoon funktiolla f eristetty erikoispiste z_0. Valitaan $r > 0$ siten, että f on analyyttinen punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0; r)$. Lauseen 7.30 nojalla funktiolla f on esitys punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0; r)$ suppenevana Laurentin sarjana

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Erikoispisteet voidaan luokitella Laurentin sarjan avulla: Piste z_0 on funktion f

- *poistuva erikoispiste*, jos $a_n = 0$ kaikille $n < 0$;
- *napa*, jos $a_n \neq 0$ vain äärellisen monelle $n < 0$ ja jokin $a_n \neq 0$, $n < 0$;
- *oleellinen erikoispiste*, jos $a_n \neq 0$ äärettömän monelle $n < 0$.

ESIMERKKI 8.1. Piste $z = 0$ on funktion $f\colon \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$,

- $f(z) := \dfrac{\sin z}{z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$, poistuva erikoispiste;
- $f(z) := \dfrac{\sin z}{z^5} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-4}$, napa; ja
- $f(z) := \sin \dfrac{1}{z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-2n-1}$, oleellinen erikoispiste.

Sen sijaan piste $z = 0$ ei ole eristetty erikoispiste esimerkiksi neliöjuuren päähaaralle $z \mapsto \sqrt{z}$ tai logaritmin päähaaralle $z \mapsto \operatorname{Log} z$, koska nämä eivät ole analyyttisiä negatiivisella x-akselilla.

HUOMAUTUS 8.2. Piste z_0 on funktion f poistuva erikoispiste, jos ja vain jos funktio $\tilde{f}$,

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z), & \text{kun } z \neq z_0, \\ a_0, & \text{kun } z \neq z_0, \end{cases}$$

on analyyttinen jossakin kiekossa $B(z_0; r)$, kun a_0 on funktion f Laurentin 0. kerroin.

[1]Viimeksi muutettu 10.3.2020.

Määritelmä 8.3. Olkoon z_0 funktion f erikoispiste ja $r > 0$ siten, että funktiolla f on punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0; r)$ esitys Laurentin sarjana

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \, (z - z_0)^n.$$

Sarja

$$S(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \, (z - z_0)^{-n}$$

on *funktion f Laurentin sarjan singulaariosa pisteen z_0 suhteen.*

Luku

$$\operatorname{Res}(f; z_0) := \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) := a_{-1}$$

on *funktion f residy pisteen z_0 suhteen.*

Huomaa, että kun z_0 funktion f erikoispiste ja S on funktion f Laurentin sarjan singulaariosa pisteen z_0 suhteen, on z_0 funktion $f - S$ erikoispiste. Piste z_0 on kuitenkin funktion $f - S$ poistuva erikoispiste, koska jossakin punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0; r)$

$$f(z) - S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (z - z_0)^n.$$

Lauseen 7.30 nojalla

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{1}{2\pi \, i} \oint_{\gamma_{r'}} f(\zeta) \, d\zeta,$$

missä $\gamma_{r'}(t) := z_0 + r' \, e^{i\,t}$, kun $t \in [0, 2\pi]$ ja $0 < r' < r$.

8.2. Poistuvat erikoispisteet

Lause 8.4 (Riemannin jatkolause; Bernhard Riemann, 1851). *Olkoon z_0 funktion f eristetty erikoispiste. Tällöin seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitäviä:*

(i) *Piste z_0 on poistuva erikoispiste.*
(ii) *On olemassa $r > 0$ siten, että f on rajoitettu punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0; r)$.*
(iii) *On voimassa $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) \, f(z) = 0$.*

Todistus. (i)⇒(ii): Jätetään lukijan tehtäväksi.

(ii)⇒(iii): Olkoot $M \in \mathbb{R}$ ja $r > 0$ siten, että

$$|f(z)| \leqslant M \quad \text{kaikille } z \in B^*(z_0; r).$$

Tällöin

$$|z - z_0| \, |f(z)| \leqslant |z - z_0| \, M \to 0, \quad \text{kun } z \to z_0.$$

(iii)⇒(i): Asetetaan

$$g(z) := \begin{cases} (z - z_0) \, f(z), & \text{kun } z \neq z_0, \\ 0, & \text{kun } z \neq z_0. \end{cases}$$

Oletuksien nojalla riittävän pienelle $r > 0$ funktio g on jatkuva kiekossa $B(z_0; r)$ ja analyyttinen punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0; r)$. Kurssilla Kompleksianalyysi 1 todistetun lemman 4.6 nojalla g on analyyttinen koko kiekossa $B(z_0; r)$. Kun g esitetään pisteen z_0 suhteen Taylorin sarjana, saadaan kaikille $z \neq z_0$ (huomaa: $g(z_0) = 0 = b_0$)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{g(z)}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k \\ &= \frac{1}{z - z_0} \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} (z - z_0)^k. \end{aligned}$$

Funktion f Laurentin sarjan singulaariosa häviää siis identtisesti, joten z_0 on poistuva. □

8.3. Navat

MÄÄRITELMÄ 8.5. Olkoon z_0 funktion f napa ja

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

funktion f esitys Laurentin sarjana pisteen z_0 suhteen.

Tällöin luku

$$k := -\min\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\}$$

on *navan z_0 kertaluku.*

HUOMAUTUS 8.6. Freitag & Busamin määrittelemä navan z_0 kertaluku on yllä olevan lukun k vastaluku; katso [**7**, Määritelmä III.4.5]. Dieudonné [**5**, §VIII.3], Lang [**11**, §V.3] ja Wegert [**19**, Määritelmä 3.5.6] määrittelevät navan kertaluvun samoin kuin tässä. Dieudonné ja Lang määrittelevät *funktion f kertaluvuksi pisteen z_0 suhteen* (*order of f at z_0*) luvun $-k$.

LAUSE 8.7. *Olkoot $k \in \mathbb{Z}_+$ ja f analyyttinen punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0; r)$. Tällöin z_0 on funktion f kertalukua k oleva napa, jos ja vain jos on olemassa kiekossa $B(z_0; r)$ analyyttinen funktio g siten, että*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} \quad \textit{kaikille } z \in B^*(z_0; r), \textit{ ja} \quad g(z_0) \neq 0.$$

TODISTUS. Olkoon z_0 funktion f kertalukua k oleva napa. Tällöin funktion f Laurentin sarja pisteen z_0 suhteen on muotoa

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{missä } a_{-k} \neq 0.$$

Asetetaan

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j-k} (z - z_0)^j.$$

Koska funktion f Laurentin sarja pisteen z_0 suhteen suppenee kaikille $z \in B^*(z_0; r)$, suppenee funktion g määrittelevä sarja kaikille $z \in B(z_0; r)$. Funktiolle f saadaan nyt vaadittu esitys, sillä $g(z_0) = a_{-k} \neq 0$ ja

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^{-k} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j-k} (z - z_0)^j = (z - z_0)^{-k} g(z).$$

Oletetaan nyt, että funktiolla f on esitys $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$, missä $g(z_0) \neq 0$. Koska g on analyyttinen kiekossa $B(z_0; r)$, on

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n.$$

Tässä $b_0 = g(z_0) \neq 0$, joten

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-k}^{\infty} b_{n+k} (z - z_0)^n.$$

Saatu sarja on funktion f Laurentin sarja pisteen z_0 suhteen. Koska sen sen $(-k)$. kerroin $b_0 \neq 0$, piste z_0 on funktion f kertalukua k oleva napa. □

Huomautus 8.8. Edellisestä lauseesta saadaan kaava funktion f residyn laskemiseksi pisteen z_0 suhteen tapauksessa, jossa funktiolla f on pisteessä z_0 kertalukua k oleva napa. Olkoon siis

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}, \quad \text{missä} \quad g(z_0) \neq 0.$$

Kun funktio g esitetään Taylorin sarjansa avulla, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$, on

$$f(z) = \sum_{j=-k}^{\infty} b_{j+k} (z - z_0)^j.$$

Koska funktion f residy pisteen z_0 suhteen on sen Laurentin sarjan termin $(z - z_0)^{-1}$ kerroin, saadaan

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = b_{k-1} = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}.$$

Koska funktiota f ei ole määritelty pisteessä z_0, saadaan funktion f avulla esitettynä

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \big((z - z_0)^k f(z)\big).$$

Jos napa on yksinkertainen, on

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} \big((z - z_0) f(z)\big).$$

Esimerkki 8.9. Olkoon

$$f(z) := \frac{1}{e^z - 1}, \quad \text{kun } z \neq 0.$$

Eksponenttifunktion Taylorin sarjan $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, z^k$ avulla saadaan

$$f(z) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\, z^k} = \frac{1}{z \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!}\, z^j} = \frac{1}{z}\, g(z),$$

missä $g(z) := 1/\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!}\, z^j$. Funktio g on analyyttinen jossakin origon ympäristössä ja $g(0) = 1 \neq 0$, joten piste $z = 0$ on funktion ensimmäisen kertaluvun napa, jossa

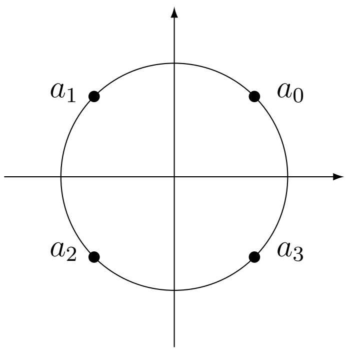
$$\operatorname{Res}(f;0) = \lim_{z\to 0}(z\, f(z)) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{\lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{z-0}} = \frac{1}{De^z|_{z=0}} = 1.$$

Esimerkki 8.10. Olkoon

$$f(z) := \frac{z^2}{1+z^4}, \quad \text{kun } z^4 \neq -1.$$

Olkoon $p(z) := 1 + z^4$. Yhtälön $p(z) = 0$ juuret ovat $z = a_j := e^{i\,\pi/4 + j\,2\pi\, i/4}$, $j \in \{0,1,2,3\}$, eli

$$a_0 = e^{i\,\pi/4}, \quad a_1 = i\, a_0, \quad a_2 = i\, a_1 = -a_0 \quad \text{ja} \quad a_3 = i\, a_2 = -i\, a_0.$$



Navat a_j ovat yksinkertaisia, sillä $p'(a_j) = 4\, a_j^3 \neq 0$. Koska $p(a_j) = 0$, saadaan

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f;a_j) &= \lim_{z\to a_j}\big((z-a_j)\, f(z)\big) = \lim_{z\to a_j}\Big((z-a_j)\, \frac{z^2}{p(z)-p(a_j)}\Big)\\ &= \lim_{z\to a_j} \frac{z^2}{\frac{p(z)-p(a_j)}{z-a_j}} = \frac{a_j^2}{p'(a_j)} = \frac{a_j^2}{4\, a_j^3} = \frac{1}{4\, a_j} = \frac{a_j^3}{4\, a_j^4} = -\frac{a_j^3}{4}.\end{aligned}$$

Lause 8.11. *Olkoon z_0 funktion f eristetty erikoispiste. Tällöin piste z_0 on funktion f*

(i) *napa, jos ja vain jos $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$;*
(ii) *kertaluvun k napa, jos ja vain jos $\lim_{z\to z_0} |z-z_0|^k\, |f(z)| \in (0,\infty)$.*

Todistus. Oletetaan, että piste z_0 on funktion f kertalukua k oleva napa. Tällöin on olemassa jossakin kiekossa $B(z_0;r)$ analyyttinen funktio g siten, että

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k} \quad \text{kaikille } z \in B^*(z_0;r), \text{ ja} \quad g(z_0) \neq 0.$$

Siis

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \lim_{z\to z_0} \frac{|g(z)|}{|z-z_0|^k} = \infty.$$

Lisäksi

$$\lim_{z\to z_0} |z-z_0|^l\,|f(z)| = \lim_{z\to z_0} |z-z_0|^{l-k}\,|g(z)| = \begin{cases} \infty, & \text{jos } l<k,\\ |g(z_0)|, & \text{jos } l=k,\\ 0, & \text{jos } l>k. \end{cases}$$

Molempien kohtien puoli "vain jos" seuraa tästä.

(i), "jos": Oletetaan, että $\lim_{z\to z_0}|f(z)| = \infty$.

Asetetaan $h(z) := 1/f(z)$. Tällöin h on rajoitettu jossakin kiekossa $B(z_0; r')$, joten Riemannin jatkolauseen nojalla piste z_0 on funktiolle h poistuva erikoispiste. Lisäksi

$$|h(z_0)| = \lim_{z\to z_0} |h(z)| = 0.$$

Funktio h ei voi hävitä identtisesti, joten jos sen Taylorin sarja pisteen z_0 suhteen on

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(z-z_0)^n,$$

on $b_0 = 0$, mutta jokin $b_n \neq 0$. Olkoot $k := \min\{n \in \mathbb{Z}_+ \mid b_n \neq 0\}$ ja

$$g(z) := \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} b_{j+k}\,(z-z_0)^j}.$$

Tällöin $g(z_0) = 1/b_k \neq 0$ ja

$$f(z) = \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^k \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+k}\,(z-z_0)^j} = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}.$$

Lauseen 8.7 nojalla piste z_0 on funktion f kertalukua k oleva napa.

(ii), "jos": Oletetaan, että $\lim_{z\to z_0}|z-z_0|^k\,|f(z)| \in (0,\infty)$ jollekin $k \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin $\lim_{z\to z_0}|f(z)| = \infty$ ja edeltävä päättely osoittaa, että piste z_0 on funktion f napa, jonka kertaluku on k. □

8.4. Oleellisista erikoispisteistä

Lause 8.12 (Casorati ja Weierstrass). *Olkoon z_0 punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0; r)$ analyyttisen funktion f oleellinen erikoispiste. Tällöin kuvajoukko $f(B^*(z_0; r))$ on tiheä kompleksitason osajoukko, t.s.*

$$\overline{f(B^*(z_0; r))} = \mathbb{C}.$$

Todistus. Tehdään antiteesi: $\overline{f(B^*(z_0; r))} \neq \mathbb{C}$.

Olkoon $w \in \mathbb{C}\setminus\overline{f(B^*(z_0; r))}$. Sulkeuma on suljettu joukko, joten on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että $B(w;\varepsilon) \subset \mathbb{C}\setminus\overline{f(B^*(z_0; r))}$. Siis $B(w;\varepsilon) \cap f(B^*(z_0; r)) = \varnothing$. Funktio

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w}$$

on tällöin analyyttinen punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0; r)$. Lisäksi

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - w|} \leqslant \frac{1}{\varepsilon},$$

joten g on rajoitettu. Riemannin jatkolauseen 8.4 nojalla piste z_0 on funktion g poistuva erikoispiste. Funktiolla g on tällöin raja-arvo pisteessä z_0, joten z_0 on funktion $1/g$ poistuva erikoispiste tai napa (lause 8.11). Mutta tällöin piste z_0 on funktion

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$$

erikoispiste, poistuva tai napa, mikä on vastoin oletusta. □

Huomautus. Casoratin[2] ja Weierstrassin lausetta huomattavasti vahvempi tulos on Picardin suuri lause: Jos z_0 on analyyttisen funktion f oleellinen erikoispiste, niin jokaiselle $r > 0$ joukossa $\mathbb{C}\backslash f(B^*(z_0; r))$ on korkeintaan yksi piste.

Picardin pienen lauseen nojalla kokonaiselle, ei-vakiofunktiolle f joukossa $\mathbb{C}\backslash f(\mathbb{C})$ on korkeintaan yksi piste.

Lause 8.13. *Olkoon $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kokonainen funktio. Tällöin funktiolla*

$$g(z) := f\Big(\frac{1}{z}\Big)$$

on origossa oleellinen erikoispiste tai f on polynomi.

Todistus. Oletetaan, että f ei ole polynomi. Tällöin funktion f Taylorin sarja origon suhteen on muotoa

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

missä $a_n \neq 0$ äärettömän monelle $n \in \mathbb{N}$. Tällöin funktiolla g on Laurentin sarja

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{-n} z^{-n},$$

missä $b_{-n} := a_n$. Koska $b_{-n} \neq 0$ äärettömän monelle $n \in \mathbb{N}$, on origo oleellinen erikoispiste. □

8.5. Residylause

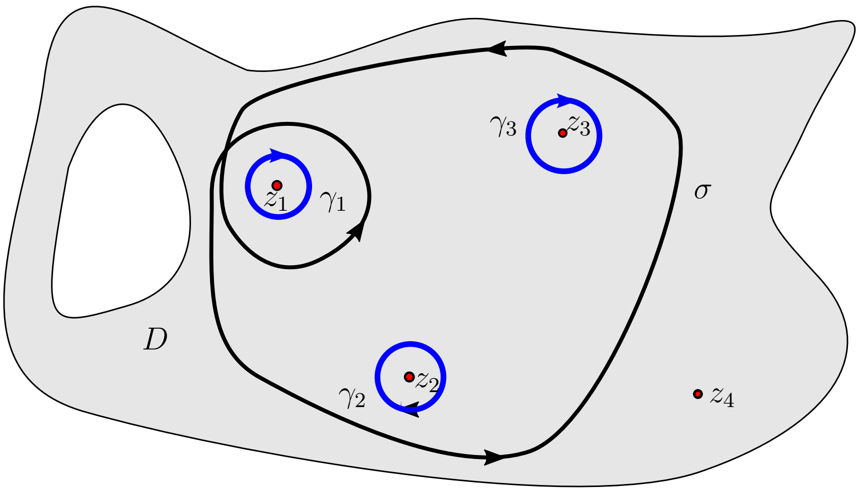
Lause 8.14 (Residylause). *Olkoot $D \subset \mathbb{C}$ alue, $E = \{z_1, \dots, z_m\} \subset D$ äärellinen joukko, $f\colon D\backslash E \to \mathbb{C}$ analyyttinen ja σ alueen D sykli, jolle $|\sigma| \cap E = \varnothing$. Oletetaan, että σ on nollahomologinen alueen D suhteen. Tällöin*

$$\oint_\sigma f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi\, i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(f; z_j)\, W(\sigma; z_j).$$

Huomautuksia ennen lauseen todistusta. Jos f on analyyttinen alueessa D (eli erikoispisteiden joukko E olisi tyhjä), olisi Cauchyn integraalilauseen sykleille (=lause 6.16) nojalla $\oint_\sigma f(\zeta)\, d\zeta = 0$. Samoin kävisi vaikka $E \neq \varnothing$, mutta sykli σ olisi nollahomologinen alueen $D\backslash E$ suhteen. Residylause siis yleistää Cauchyn integraalilauseen tilanteeseen, missä alueessa D voi olla erikoispisteitä.

[2]Felice Casorati (1835–1890), Italia. Casoratin ja Weierstrassin lause tunnetaan Venäjällä Sochockin lauseena; Julian Karol Sochocki (1842–1927), Puola/Neuvostoliitto. Charles Émile Picard (1856–1941), Ranska.

Residylause voidaan ”palauttaa” kahdella tavalla Cauchyn integraalilauseeseen. Funktio f voidaan ”korjata” alueessa D analyyttiseksi funktioksi, johon Cauchyn integraalilausetta voidaan soveltaa (tässä funktiosta f poistetaan singulaariosat). Tai sykli σ voidaan ”korjata” alueen $D\backslash E$ suhteen nollahomologiseksi (tässä erikoispisteiden ympärille laitetaan pieni ympyränkehä). Seuraavassa esitetään molemmanlaiset todistukset, ensin korjaamalla sykli σ.



Residylauseen todistuksen merkinnät: Alueen D suhteen nollahomologinen sykli σ; erikoispisteiden joukko $E = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$; kuvan syklin σ kierrosluvut $W(\sigma; z_1) = 2$, $W(\sigma; z_2) = W(\sigma; z_3) = 1$ ja $W(\sigma; z_4) = 0$. Ympyrät γ_j kiertävät pisteet z_j vastakkaiseen suuntaan kuin σ, γ_1 kaksi kertaa, γ_2 ja γ_3 kerran.

Residylauseen todistus. Jokaiselle $j \in \{1, \dots, m\}$ olkoon $r_j > 0$ siten, että $\overline{B}(z_j; r_j) \subset D$, ja että kiekot $\overline{B}(z_j; r_j)$ ovat pareittain pistevieraita. Olkoon $n_j := W(\sigma; z_j)$ ja $\gamma_j \colon [0, 2\pi] \to D$,

$$\gamma_j(t) := z_j + r_j \, e^{-n_j \, i \, t}.$$

Kun $z \in \mathbb{C}\backslash D$, on γ_j differentioituvasti silmukkahomotooppinen vakiopolun $t \mapsto z_j$ kanssa. Koska $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ on holomorfinen alueessa D, kun $z \notin D$, on lauseen 6.21 (Cauchyn integraalilause, versio differentioituva silmukkahomotopia) nojalla

$$W(\gamma_j; z) = \frac{1}{2\pi \, i} \oint_{\gamma_j} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0.$$

Jos taas $z = z_k$, on

$$W(\gamma_j; z_k) = \begin{cases} 0, & \text{jos } k \neq j, \text{ ja} \\ -n_k, & \text{jos } j = k. \end{cases}$$

Olkoon $\tilde{\sigma} := (\sigma, \gamma_1, \dots, \gamma_m)$. Tällöin syklin σ nollahomologisuusoletuksen nojalla kaikille $z \in \mathbb{C}\setminus(D\setminus E)$ saadaan

$$W(\tilde{\sigma}; z) = W(\sigma; z) + \sum_{j=1}^{m} W(\gamma_j; z) = 0, \quad \text{kun } z \notin D, \text{ ja}$$

$$W(\tilde{\sigma}; z) = W(\sigma; z) + \sum_{j=1}^{m} W(\gamma_j; z) = n_k - n_k = 0, \quad \text{kun } z = z_k \in E.$$

Sykli $\tilde{\sigma}$ on siis nollahomologinen alueen $D\setminus E$ suhteen. Cauchyn integraalilauseen 6.16 nojalla (muista myös määritelmän 8.3 jälkeinen huomautus)

$$0 = \oint_{\tilde{\sigma}} f(\zeta)\, d\zeta = \oint_{\sigma} f(\zeta)\, d\zeta + \sum_{j=1}^{m} \oint_{\gamma_j} f(\zeta)\, d\zeta = \oint_{\sigma} f(\zeta)\, d\zeta + \sum_{j=1}^{m} (-n_j\, 2\pi i\, \mathrm{Res}(f; z_j)).$$

Väite seuraa tästä. □

Vaihtoehtoinen todistus Residylauseelle. Jokaiselle $j \in \{1, \dots, m\}$ esitetään funktio f pisteen z_j ympäristössä Laurentin sarjansa avulla,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(j)}\, (z - z_j)^n.$$

Jokaiselle $j \in \{1, \dots, m\}$ olkoon S_j funktion f singulaariosa pisteen z_j ympäristössä,

$$S_j(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(j)}\, (z - z_j)^n.$$

Tällöin funktiolla g,

$$g(z) := f(z) - \sum_{j=1}^{m} S_j(z),$$

on jokaisessa pisteessä z_j poistuva erikoispiste, joten se määrittelee analyyttisen funktion joukkoon D. On hyvä muistaa, että eristettyyn pisteeseen z_j liittävä sarja suppenee joukossa $\mathbb{C}\setminus\{z_j\}$. Erityisesti sarja suppenee tasaisesti syklin σ jäljellä. Cauchyn integraalilauseen 6.16 nojalla

$$\begin{aligned}
0 = \oint_{\sigma} g(\zeta)\, d\zeta &= \oint_{\sigma} \Big(f(\zeta) - \sum_{j=1}^{m} S_j(\zeta) \Big)\, d\zeta \\
&= \oint_{\sigma} f(\zeta)\, d\zeta - \sum_{j=1}^{m} \oint_{\sigma} S_j(\zeta)\, d\zeta \\
&= \oint_{\sigma} f(\zeta)\, d\zeta - \sum_{j=1}^{m} \oint_{\sigma} \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(j)}\, (\zeta - z_j)^n\, d\zeta \\
&= \oint_{\sigma} f(\zeta)\, d\zeta - \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(j)} \oint_{\sigma} (\zeta - z_j)^n\, d\zeta
\end{aligned}$$

$$= \oint_\sigma f(\zeta)\,d\zeta - \sum_{j=1}^m a_{-1}^{(j)} \oint_\sigma \frac{1}{\zeta - z_j}\,d\zeta$$

$$= \oint_\sigma f(\zeta)\,d\zeta - \sum_{j=1}^m \mathrm{Res}(f; z_j)\, 2\pi\, i\, W(\sigma; z_j).$$

Residylauseen väitetty kaava seuraa tästä. □

Seuraava tulos antaa monen rationaalifunktion integrointiin sopivan avun:

Lause 8.15. *Olkoot $S \subset \mathbb{C}$ alue, joka sisältää ylemmän suljetun puolitason $T := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}$, $E \subset S$ äärellinen, jolle $E \cap \mathbb{R} = \varnothing$ ja $f \colon S \setminus E \to \mathbb{C}$ holomorfinen. Olkoot $\gamma_R(t) := R\,e^{i\,t}$, kun $0 \leqslant t \leqslant \pi$, ja $E \cap T = \{z_1, \ldots, z_n\}$. Jos ehto*

$$(*) \qquad \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0,$$

toteutuu, on

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi\, i \sum_{k=1}^n \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Todistus jätetään lukijan tehtäväksi. Todetaan kuitenkin, että jos

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

missä P ja Q ovat polynomeja ja $\deg Q \geqslant \deg P + 2$, niin ehto $(*)$ toteutuu.

Olkoot $n := \deg P$, $m := \deg Q$, $P(z) = a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_1\, z + a_0$ ja $Q(z) = b_m\, z^m + b_{m-1}\, z^{m-1} + \cdots + b_1\, z + b_0$. Tällöin $a_n \neq 0$ ja $b_m \neq 0$.

Tällöin on olemassa $R > 0$ siten, että

$$|P(z)| \leqslant 2\,|a_n|\,|z|^n \quad \text{ja} \quad \tfrac{1}{2}\,|b_m|\,|z|^m \leqslant |Q(z)| \quad \text{kaikille } z \in \mathbb{C}, \text{ joille } |z| \geqslant R.$$

Näiden epäyhtälöiden avulla saadaan

$$\Big|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\Big| \leqslant \int_{\gamma_R} \frac{|P(z)|}{|Q(z)|}\,|dz| \leqslant \int_{\gamma_R} \frac{2\,|a_n|\,|z|^n}{\frac{1}{2}\,|b_m|\,|z|^m}\,|dz|$$

$$= \frac{4\,|a_n|}{|b_m|}\, R^{n-m}\, \ell(\gamma_R) = \frac{4\pi\,|a_n|}{|b_m|}\, R^{n-m+1}.$$

Koska tässä $n - m + 1 < 0$, väite seuraa.

Esimerkki 8.16. Jatketaan esimerkkiä 8.10. Olkoon

$$f(z) := \frac{z^2}{1 + z^4}, \quad \text{kun } z^4 \neq -1.$$

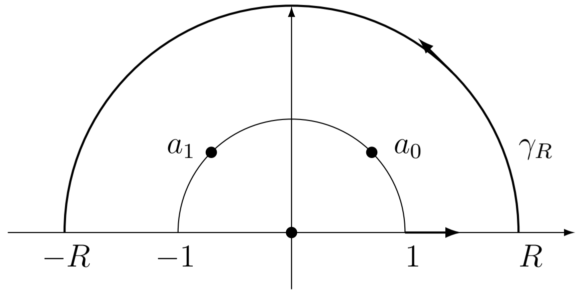
Funtiolla f on navat pisteissä $z = a_j := e^{i\,\pi/4 + j\,2\pi\, i/4}$, $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, eli

$$a_0 = e^{i\,\pi/4}, \quad a_1 = i\,a_0, \quad a_2 = i\,a_1 = -a_0 \quad \text{ja} \quad a_3 = i\,a_2 = -i\,a_0.$$

Esimerkin 8.10 laskun perusteella

$$\mathrm{Res}(f; a_j) = \frac{1}{4\,a_j}.$$

Olkoot $R > 1$ ja γ_R puoliympyrän $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R,\ \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}$ kaari.



Lauseen 8.15 nojalla (huomaa: $f = P/Q$ ja $\deg Q = \deg P + 2$)

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi\, i \sum_{j=0}^{1} \operatorname*{Res}_{z=a_j} f(z) = 2\pi\, i \left(\frac{1}{4\, a_0} + \frac{1}{4\, i\, a_0} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Esimerkki 8.17. Lasketaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^6}{(1+x^2)^4}\, dx.$$

Olkoon $f(z) := \frac{z^6}{(1+z^2)^4}$. Tällöin f on holomorfinen joukossa $\mathbb{C}\setminus\{-i, i\}$, ja piste $z = i$ on sen ainoa, nelinkertainen napa ylemmässä puolitasossa. Koska nimittäjän aste on kahdeksan ja osoittajan kuusi, on edellisen lauseen nojalla

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^6}{(1+x^2)^4}\, dx = 2\pi\, i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z).$$

Residyn määräämiseksi esitetään $f(z)$ muodossa (yksinkertaisuuden vuoksi merkitään $w := z - i$)

$$f(z) = \frac{z^6}{(z-i)^4\,(z+i)^4} = \frac{(z-i+i)^6}{(z-i)^4\,(2i+z-i)^4} = \frac{(w+i)^6}{w^4\,(2i)^4\,(1+\frac{w}{2i})^4}$$
$$\overset{(*)}{=} \frac{(w+i)^6}{w^4\,(2i)^4} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-4}{n} \left(\frac{w}{2i}\right)^n = \frac{(w+i)^6}{(2i)^4} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-4}{n} \frac{1}{(2i)^n}\, w^{n-4}.$$

Kohdassa $(*)$ on käytetty binomisarjaa

$$(1+z)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n = 1 + s\,z + \binom{s}{2} z^2 + \binom{s}{3} z^3 + \cdots + \binom{s}{n} z^n + \ldots,$$

missä binomikertoimet ovat $\binom{s}{n} = \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-(n-1))}{n!}$.

Esitetään vielä $z^6 = (w+i)^6$ binomikaavan avulla

$$z^6 = (w+i)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} w^k\, i^{6-k}.$$

Kun saatuihin esityksiin käytetään sarjojen Cauchyn tulosääntöä

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, w^k \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, w^{n-4} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k+n=l} a_k\, b_n\, w^{k+n-4},$$

missä $a_k := \binom{6}{k}\, i^{6-k}$, kun $k \leqslant 6$, ja $a_k := 0$, kun $k > 6$, ja b_n kuten $f(z)$:n sarjassa, saadaan

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(2i)^4} \sum_{k=0}^{6} a_k\, w^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-4}{n} \frac{1}{(2i)^n}\, w^{n-4} \\ &= \frac{1}{(2i)^4} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\substack{k+n=l \\ k\leqslant 6}} \binom{6}{k} i^{6-k} \binom{-4}{n} \frac{1}{(2i)^n}\, w^{k+n-4} \end{aligned}$$

Saadusta sarjaesityksestä residyn laskemiseksi tarvitaan termin $(z-i)^{-1} = w^{-1}$ kerroin eli tarvitaan sisempi summa, jossa $k+n-4 = -1$. Siis $l = k+n = 3$ ja

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{1}{(2i)^4} \sum_{k+n=3} \binom{6}{k} i^{6-k} \binom{-4}{n} \frac{1}{(2i)^n} = \cdots = -\frac{5\,i}{2^5}.$$

Etsitty integraali on näin ollen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^6}{(1+x^2)^4}\, dx = 2\pi\, i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{5\pi}{2^4}.$$

Tässä tapauksessa laskennallisesti helpompi tapa olisi ehkä ollut seuraava: Asetetaan $g(z) := (z-i)^4 f(z) = z^6/(z+i)^4$, jolloin (huomautus 8.8)

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{1}{3!}\, g'''(i) = \cdots = \frac{120\, z^3}{(z+i)^4} - \frac{360\, z^4}{(z+i)^5} + \frac{360\, z^5}{(z+i)^6} - \frac{120\, z^6}{(z+i)^7} \bigg|_{z=i} = -\frac{5\,i}{2^5}.$$

Myös sinin ja kosinin rationaalifunktioiden integrointi onnistuu residylauseen avulla:

Lause 8.18. *Olkoon $R = R(s,c)$ kahden muuttujan rationaalifunktio. Asetetaan*

$$f(z) := R\Big(\frac{z^2-1}{2\,i\,z}, \frac{z^2+1}{2\,z}\Big),$$

kun oikean puolen lauseke on määritelty.

Olkoon $\gamma(t) := e^{i\,t}$, kun $t \in [0, 2\pi]$.

Oletetaan, että funktiolla f ei ole napoja origokeskisellä yksikköympyrän kehällä. Tällöin

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt = \oint_\gamma \frac{f(z)}{i\,z}\, dz = 2\pi\, i \sum_{|a|<1} \operatorname*{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{i\,z}.$$

Todistus. Kun $\gamma(t) = e^{i\,t}$, on

$$\gamma'(t) = i\,\gamma(t), \qquad \frac{(\gamma(t))^2 - 1}{2\,i\,\gamma(t)} = \sin t \quad \text{ja} \quad \frac{(\gamma(t))^2+1}{2\,\gamma(t)} = \cos t.$$

Väite seuraa residylauseesta. Yksityiskohdat jätetään lukijan selvitettäväksi. □

Lisää residylauseen sovelluksia erityyppisten integraalien määräämiseen löytyy kirjoista: Freitag & Busam [**7**, §III.7], Dieudonné [**5**, §VIII.5], Lang [**11**, §VI.2] ja Wegert [**19**, §4.5].

LUKU 9

Päättymättömät tulot

9.1. Gamma-funktio

MÄÄRITELMÄ 9.1. *Gamma-funktio* Γ määritellään kompleksiluvuille z, joille $\mathrm{Re}(z) > 0$, kaavalla

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-t}\, dt;$$

tässä $t^{z-1} := e^{(z-1)\log t}$ ja $\log t$ on positiivisen reaaliluvun luonnollinen logaritmi. [2]

HUOMAUTUS 9.2. Gamma-funktion määrittelevä integraali on epäoleellinen pisteessä $t = 0$, jos $\mathrm{Re}(z) < 1$, ja myös äärettömyydessä. Palautetaan mieleen, että jatkuvalle funktiolle $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{C}$ *epäoleellinen Riemann-integraali* $\int_0^\infty f(t)\, dt$ *suppenee* (tai f on *epäoleellisesti integroituva*), jos raja-arvot

$$\lim_{a\to 0+} \int_a^1 f(t)\, dt \quad \text{ja} \quad \lim_{b\to\infty} \int_1^b f(t)\, dt$$

ovat olemassa; tällöin epäoleellisen integraalin $\int_0^\infty f(t)\, dt$ arvo kyseisten raja-arvojen summa. Vastaavasti *epäoleellinen Riemann-integraali* $\int_0^\infty f(t)\, dt$ *suppenee itseisesti*, jos epäoleellinen integraali $\int_0^\infty |f(t)|\, dt$ suppenee. Koska ei-negatiiviselle funktiolle on

$$\lim_{a\to 0+} \int_a^1 |f(t)\, dt| = \sup_{a\in(0,1)} \int_a^1 |f(t)\, dt| \quad \text{ja} \quad \lim_{b\to\infty} \int_1^b |f(t)|\, dt = \sup_{b\in(1,\infty)} \int_1^b |f(t)|\, dt,$$

suppenee epäoleellinen integraali $\int_0^\infty f(t)\, dt$ itseisesti, jos ja vain jos on olemassa vakio C siten, että

$$\int_a^1 |f(t)\, dt| \leqslant C \text{ kaikille } a \in (0,1) \quad \text{ja} \quad \int_1^b |f(t)|\, dt \leqslant C \text{ kaikille } b \in (1,\infty).$$

LAUSE 9.3. *Gamma-funktion määrittelevä integraali* $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-t}\, dt$ *suppenee itseisesti puolitasossa* $\mathrm{Re}(z) > 0$. *Gamma-funktio* $\Gamma\colon \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\} \to \mathbb{C}$ *on analyytinen funktio, ja sen derivaatoille on voimassa*

$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\, (\log t)^{k-1}\, e^{-t}\, dt, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

---

[1]Viimeksi muutettu 2.4.2020.

[2]Gamma-funktion on ensimmäisenä ottanut käyttöön LEONHARD EULER 1729. Hän määritteli gamma-funktion integraalina kuten tässäkin on tehty. Nimen ja nykyisen merkinnän gammafunktiolle antoi ADRIEN-MARIE LEGENDRE 1811. Gamma-funktion esitys tulona kompleksimuuttujan funktiona on peräisin CARL FRIEDRICH GAUSSILTA 1811 (lauseen 9.17 raja-arvoversio). KARL WEIERTRASS käytti Gamma-funktiota päättymättömänä tulona (seurauksen 9.16 esitys). Päättymättömän tulon käytön etuna on, että sen avulla gamma-funktio voidaan suoraan määritellä joukossa $\mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,-3,\ldots\}$.

Todistus. Kun $z = x + i\,y$, on $|t^{z-1}\,e^{-t}| = t^{x-1}\,e^{-t}$.

Kiinnitetään $x_0 > 0$. Tällöin on olemassa vakio C siten, että

$$t^{x-1} \leqslant C\,e^{t/2} \quad \text{kaikille } x \in (0, x_0] \text{ ja kaikille } t \in [1, \infty).$$

Majoranttiperiaatteen avulla tästä seuraa helposti epäoleellisen integraalin

$$\int_1^\infty t^{z-1}\,e^{-t}\,dt$$

itseinen suppeneminen.

Epäoleellisen integraalin

$$\int_0^1 t^{z-1}\,e^{-t}\,dt$$

itseinen suppeneminen seuraa epäyhtälöstä $|t^{z-1}\,e^{-t}| \leqslant t^{x-1}$, kun $t > 0$, ja siitä, että epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 t^s\,dt$$

suppenee täsmälleen silloin, kun $s > -1$.

Gamma-funktion analyyttisyyden osoittamiseksi olkoot $f(t,z) := t^{z-1}\,e^{-t}$, kun $\operatorname{Re}(z) > 0$ ja $t \in (0, \infty)$, ja

$$f_n(z) := \int_{1/n}^n f(t,z)\,dt, \quad \text{kun } \operatorname{Re}(z) > 0 \text{ ja } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Koska f ja sen derivaatta $\frac{\partial f}{\partial z}\colon (t,z) \mapsto t^{z-1}\,\log t\,e^{-t}$ ovat jatkuvia joukossa $\{(t,z) \mid t \in (0,\infty),\ \operatorname{Re}(z) > 0\}$ ja integrointiväli $[\frac{1}{n}, n]$ on kompakti, saadaan tavanomaisesta parametrista riippuvan integraalin derivointilauseesta 5.3: f_n on kompleksisesti differentioituva ja

$$f_n'(z) = \int_{1/n}^n \frac{\partial f}{\partial z}(t,z)\,dt.$$

Funktiot f_n ovat siis analyyttisiä.

Edellisten epäyhtälöiden avulla voidaan osoittaa (HT), että funktiojono $(f_n)_{n=1}^\infty$ suppenee lokaalisti tasaisesti kohti gamma-funktiota. Näin ollen gamma-funktio on analyyttinen (lause 7.8).

Soveltamalla parametrista riippuvan integraalin derivointilausetta k kertaa, saadaan

$$f_n^{(k)}(z) = \int_{1/n}^n t^{z-1}\,(\log t)^{k-1}\,e^{-t}\,dt.$$

Edellisten epäyhtälöiden avulla nähdään, että rajalla $n \to \infty$ saatava epäoleellinen integraali suppenee itseisesti, joten gamma-funktion derivaattoja koskeva väite seuraa yllä olevasta kaavasta, kun $n \to \infty$. $\square$

Suoraan gamma-funktion määritelmästä saadaan

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = \lim_{b\to\infty} \Big|_0^b - e^{-t} = 1.$$

Osittaisintegroinilla (HT) saadaan *gamma-funktion toteuttama funktionaaliyhtälö*

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z), \quad \text{kun } \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Erityisesti kaikille $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$, on

$$\Gamma(n+1) = n!\,.$$

Kun gamma-funktion toteuttamaa funktionaaliyhtälöä käytetään $n+1$ kertaa, saadaan puolitasossa $\mathrm{Re}(z) > 0$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z\,(z+1)\,\cdots\,(z+n)}. \tag{9.1}$$

Kaavassa (9.1) tärkeää on se, että sen oikean puolen lauseke on muuttujan z analyyttinen funktio joukossa $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > -(n+1) \text{ ja } z \notin \{0,-1,-2,\ldots,-n\}\}$, joka laajempi kuin vasemmalla puolella olevan gamma-funktion määrittelyjoukko.

Lause 9.4. *Gamma-funktiolla on yksikäsitteinen analyyttinen laajennus joukkoon $\mathbb{C}\backslash S$, missä $S := \{0,-1,-2,\ldots\}$.*

Kaikille $z \in \mathbb{C}\backslash S$ gamma-funktio toteuttaa funktionaaliyhtälön

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z). \tag{9.2}$$

Gamma-funktiolla on jokaisessa pisteessä $z = -n \in S$ yksinkertainen napa; näissä pisteissä on

$$\operatorname*{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}\,. \tag{9.3}$$

Todistus. Kaavan (9.1) oikea puoli määrittelee analyyttisen laajennuksen joukkoon $\mathrm{Re}(z) > -(n+1)$ ja $z \notin \{0,-1,-2,\ldots,-n\}$. Laajennuksen yksikäsitteisyys seuraa aiemmin todistetusta lauseesta 7.23.

Residyjä koskeva väite seuraa kaavasta (9.1):

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=-n} \Gamma(z) &= \lim_{z\to -n} (z+n)\,\Gamma(z) = \lim_{z\to -n} (z+n)\,\frac{\Gamma(z+n+1)}{z\,(z+1)\,\cdots\,(z+n)} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{(-n)\,(-n+1)\,\cdots\,(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}\,.\end{aligned}$$

□

Lause 9.5 (Gamma-funktion yksikäsitteisyyslause,[3] Helmut Wielandt, 1939). *Olkoot $V := \{x + i\,y \mid x \in [1,2),\ y \in \mathbb{R}\}$, $D \subset \mathbb{C}$ alue siten, että $D \supset V$, ja $f\colon D \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio, jolla on ominaisuudet*

(i) *f on rajoitettu joukossa V;*
(ii) *f toteuttaa funktionaaliyhtälön*

$$f(z+1) = z\,f(z), \quad \textit{kun } z \in D \textit{ ja } z+1 \in D.$$

Tällöin $f(z) = f(1)\,\Gamma(z)$ kaikille $z \in D$.

Todistus. Funktionaaliyhtälön $f(z+1) = z\,f(z)$ avulla f voidaan laajentaa pisteille $w = z+1 \in \mathbb{C}$, joille $\mathrm{Re}(w) \in [2,3)$. Toistamalla tätä f saadaan määritellyksi alueeseen, joka sisältää puolitason $\mathrm{Re}(z) \geqslant 1$.

---

[3]Gamma-funktion yksikäsitteisyyskarakterisointi on yllättävän uusi tulos. Reaalianalyysipohjainen tulos on peräisin Harald August Bohrilta (1887–1951), Tanska, ja Johannes Mollerupilta (1872–1937), Tanska, vuodelta 1922 (funktionaaliyhtälö ja $x \mapsto \log f(x)$ on konveksi; katso kirjan [**3**] osan II/1 kohdasta §4.14.b). Helmut Wielandt (1910–2001), Saksa.

Kuten gamma-funktiolle oletuksena olevasta funktionaaliyhtälöstä saadaan $f(z) = f(z+1)/z$, jonka avulla f saadaan määritellyksi pisteille $z \neq 0$, joille $\mathrm{Re}(z) \in [0,1)$. Toistamalla funktionaaliyhtälöä saadaan

$$f(z) = \frac{f(z+n+1)}{z\,(z+1)\cdots(z+n)}, \tag{9.4}$$

kun $z \notin \{0,-1,-2,\ldots,-n\}$. Tämän nojalla funktiolle f saadaan analyyttinen laajennus joukkoon $\mathbb{C}\backslash S$, missä $S := \{0,-1,-2,\ldots\}$. Lisäksi laajennus f toteuttaa saman funktionaaliyhtälön joukossa $\mathbb{C}\backslash S$.

Yhtälöstä (9.4) saadaan samalla tavalla kuin gamma-funktiolle: pisteet $z = -n \in S$ ovat funktion f yksinkertaisia napoja ja niissä on

$$\operatorname*{Res}_{z=-n} f(z) = \frac{(-1)^n}{n!}\, f(1).$$

Asetetaan $h(z) := f(z) - f(1)\,\Gamma(z)$. Koska funktioilla f ja $f(1)\,\Gamma$ on samat residyt navoissa, erotus h on analyyttinen koko kompleksitasossa. Koska funktiot f ja Γ toteuttavat samanlaisen funktionaaliyhtälön, myös h toteuttaa funktionaaliyhtälön $h(z+1) = z\,h(z)$. Koska $h(1) = 0$, väite seuraa, jos voidaan osoittaa, että h on rajoitettu. (Muista Liouvillen lause.)

Koska f ja Γ ovat rajoitettuja joukossa V,[4] on h rajoitettu joukossa V. Kun $z = x + i\,y$, $x \in [0,1)$ ja $|y| \geqslant 1$, on $z+1 \in V$ ja funktionaaliyhtälön nojalla $|h(z)| = |h(z+1)|/|z| \leqslant |h(z+1)|$. Tästä seuraa, että h on rajoitettu joukossa $\{x + i\,y \mid x \in [0,1),\ |y| \geqslant 1\}$. Koska analyyttisenä h on jatkuva kompaktissa joukossa $\{x+i\,y \mid x \in [0,1],\ |y| \leqslant 1\}$, on h rajoitettu joukossa $\{x+i\,y \mid x \in [0,1)\}$. Toistamalla tätä päättelyä todetaan, että h on rajoitettu jokaisessa joukossa $\{x+i\,y \mid x \in [-n,2)\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Tämä ei kuitenkaan vielä riitä Liouvillen lauseen käyttöön.

Kun asetetaan $H\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$H(z) := h(z)\,h(1-z),$$

saadaan koko kompleksitasossa analyyttinen funktio, joka funktionaaliyhtälön $h(z+1) = z\,h(z)$ nojalla toteuttaa ehdon

$$H(z+1) = -H(z).$$

Funktio H on rajoitettu joukossa $\{x + i\,y \mid x \in [0,1)\}$, joten H on rajoitettu koko kompleksitasossa. Liouvillen lauseen nojalla H on vakio. Koska $H(1) = 0$, on $H = 0$. Tästä seuraa, että $h = 0$. □

Avoimen joukon G osajoukko E on *diskreetti*, jos joukolla E ei ole joukkoon G kuuluvaa kasautumispistettä.

MÄÄRITELMÄ 9.6. Funktio f on *meromorfinen* avoimessa joukossa G, jos on olemassa diskreetti joukko $E \subset G$ siten, että $f|_{G\backslash E}$ on analyyttinen ja jokainen $e \in E$ on funktion f napa.

Gamma-funktio on siis koko kompleksitasossa meromorfinen. Sen napojen joukko on $E = \{0,-1,-2,\ldots\}$, ja jokaisessa pisteessä $z \in E$ gamma-funktiolla on yksinkertainen napa.

[4] Gamma-funktion rajoittuneisuus joukossa V seuraa epäyhtälöistä $|\Gamma(z)| \leqslant \int_0^\infty t^{x-1}\,e^{-t}\,dt \leqslant \int_0^1 e^{-t}\,dt + \int_1^\infty t\,e^{-t}\,dt \leqslant 1 + \Gamma(2)$.

9.2. Päättymättömät tulot

Polynomi, jolla on annetut nollakohdat, on helppo määrätä: jos polynomin nollakohdiksi halutaan luvut $s_j \in \mathbb{C}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, halutuksi polynomiksi käy $p(z) := (z-s_1)(z-s_2)\cdots(z-s_n)$. Vastaava ongelma muunlaisille funktioille kuin polynomeille on ongelmallisempi. Esimerkiksi sinillä on ääretön määrä nollakohtia, joten vastaava tuloesitys olisi päättymätön tulo. Helpoinkaan tapa päättymättömien tulojen käsittelemiseksi ei ole ongelmaton. Jos asetettaisiin

$$\prod_{j=1}^{\infty} b_j := \exp\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \log b_j\Big),$$

olisi tulo mielekäs, vaikka jokin $b_j = 0$, mutta vastaava logaritmi ei. Lisäksi logaritmin määrittely ei ole ongelmaton. Jotta logaritmien muodostama sarja suppenisi, tulee olla $\log b_j \to 0$, kun $j \to \infty$, jolloin $b_j \to 1$. Tällöin on olemassa $N \in \mathbb{Z}_+$ siten, että $|b_j - 1| < 1$, kun $j > N$. Kun nyt $j > N$, on $b_j \neq 0$ ja logaritmien laskemiseen voidaan käyttää logaritmin päähaaraa. Tulon suppeneminen voitaisiin määritellä sarjan $\sum_{j=N+1}^{\infty} \operatorname{Log} b_j$ suppenemisen avulla ja asettaa $\prod_{j=1}^{\infty} b_j := \prod_{j=1}^{N} b_j \cdot \exp\Big(\sum_{j=N+1}^{\infty} \operatorname{Log} b_j\Big)$.

Asetetaan $a_j := b_j - 1$, jolloin $b_j = 1 + a_j$, ja ehto $b_j \to 1$ on yhtäpitävä ehdon $a_j \to 0$ kanssa. Tyydytään edellä hahmoteltua hieman rajoitetumpaan tulon käsitteeseen. Tarkastellaan vain itseisesti suppenevia tuloja.

Kun $z \approx 0$, on $\operatorname{Log}(1+z) \approx z$. Tarkemmin: logaritmin päähaaralle on voimassa

$$\tfrac{1}{2}\,|z| \leqslant |\operatorname{Log}(1+z)| \leqslant 2\,|z|, \quad \text{kun } |z| \leqslant \tfrac{1}{2}. \tag{9.5}$$

Erityisesti $\frac{1}{2}\,|a_j| \leqslant |\operatorname{Log}(1+a_j)| \leqslant 2\,|a_j|$, kun j on riittävän suuri. Siis sarja $\sum_j \operatorname{Log}(1+a_j)$ suppenee itseisesti, jos ja vain jos sarja $\sum_j a_j$ suppenee itseisesti. Asetetaan

Määritelmä 9.7. Olkoot $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ kompleksilukujono. Sanotaan, että *päättymätön tulo* $\prod_{j=1}^{\infty}(1+a_j)$ *suppenee itseisesti*, jos sarja $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ suppenee.

Kun $N \in \mathbb{Z}_+$ valitaan niin, että $|a_j| < 1$ kaikille $j > N$, asetetaan

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1+a_j) := \prod_{j=1}^{N}(1+a_j) \cdot \exp\Big(\sum_{j=N+1}^{\infty} \operatorname{Log}(1+a_j)\Big).$$

Huomautuksia 9.8. a) Tulon (itseisen) suppenemisen käsite ei vastaa täysin suoraviivaisesti sarjan (itseistä) suppenemista. Vaikka raja-arvo $\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$ on olemassa ja äärellinen, tulo ei suppene itseisesti, koska jonon termit eivät lähesty lukua 1. Tässä tilantessa $\operatorname{Log} \frac{1}{j} \leqslant 0$ ja $\operatorname{Log} \frac{1}{j} \to -\infty$, kun $j \to \infty$.

b) Kun tulo $\prod_{j=1}^{\infty}(1+a_j)$ suppenee itseisesti, voi tulo olla nolla vain, jos jokin tulon tekijä on nolla. (Muista: kun sarja $\sum_{j=N+1}^{\infty} \operatorname{Log}(1+a_j)$ suppenee itseisesti, sen summa on jokin kompleksiluku s, jolloin $e^s \neq 0$. Siis $\prod_{j=1}^{\infty}(1+a_j) = 0$ vain, jos jokin tekijä $1 + a_j = 0$, missä $j \leqslant N$.)

c) Määritelmän antama arvo tulolle $\prod_{j=1}^{\infty}(1+a_j)$ on riippumaton luvun N valinnasta. Määritelmä on näin ollen hyvin asetettu.

Esimerkki 9.9. Kun $z \in \mathbb{C}$, sarja $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2}$ suppenee itseisesti (muista: yliharmoninen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ suppenee), joten tulo

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big)$$

suppenee itseisesti. Tulon määrittelemälle funktiolle on $f(n) = 0$, kun $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Tulon määrittelemä funktio on seuraavan lauseen nojalla analyyttinen.

Lemma 9.10. *Olkoot $C \subset \mathbb{C}$ kompakti joukko, $F\colon C \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio ja $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ jono funktioita $s_n\colon A \to \mathbb{C}$, joka suppenee tasaisesti joukossa A kohti funktiota $s\colon A \to \mathbb{C}$. Oletetaan, että $s_n(A) \subset C$ kaikille $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Tällöin funktiojono $(F \circ s_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti joukossa A kohti funktiota $F \circ s\colon A \to \mathbb{C}$.

Todistus. Koska tasaisesta suppenemisesta seuraa pisteittäinen suppeneminen ja $s_n(x) \in C$ kaikille $x \in A$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$, on $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) \in \overline{C} = C$. Funktio $F \circ s$ on siis hyvin määritelty.

Koska kompaktissa joukossa jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva, on jokaiselle $\varepsilon > 0$ olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|F(z) - F(z')| \leqslant \varepsilon \quad \text{kaikille } z \in C \text{ ja } z' \in C, \text{ joille } |z - z'| \leqslant \delta.$$

Jonon $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ tasaisen suppenemisen nojalla on olemassa $N \in \mathbb{Z}_+$ siten, että

$$|s_n(x) - s(x)| \leqslant \delta \quad \text{kaikille } x \in A \text{ ja } n \in \mathbb{Z}_+, \text{ joille } n \geqslant N.$$

Tällöin $|F(s_n(x)) - F(s(x))| \leqslant \varepsilon$ kaikille $x \in A$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$, joille $n \geqslant N$. □

Lause 9.11. *Olkoon $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ jono analyyttisiä funktioita avoimessa joukossa G. Oletetaan, että sarja $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|$ suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa G. Tällöin tulo*

$$f(z) := \prod_{j=1}^{\infty} (1 + f_j(z))$$

suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa G ja sen määrittelemä funktio $f\colon G \to \mathbb{C}$ on analyyttinen.

Todistus. Olkoon $K \subset G$ kompakti joukko. Tällöin sarja $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|$ suppenee tasaisesti joukossa K. Erityisesti $f_j(z) \to 0$ tasaisesti joukossa K, kun $j \to \infty$. Tällöin on olemassa $N \in \mathbb{Z}_+$ siten, että $|f_j(z)| \leqslant \frac{1}{2}$ kaikille $z \in K$, kun $j > N$.

Hajotetaan $f(z)$:n tulo kuten päättymättömän tulon määritelmässä:

$$f(z) = \prod_{j=1}^{N} (1 + f_j(z)) \cdot \exp\Big(\sum_{j=N+1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + f_j(z)) \Big).$$

Epäyhtälön (9.5) nojalla sarja $\sum_{j=N+1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + f_j(z))$ suppenee tasaisesti joukossa K. Olkoon $s_n(z) := \sum_{j=N+1}^{n} \operatorname{Log}(1 + f_j(z))$, jolloin $s(z) := \lim_{n\to\infty} s_n(z) = \sum_{j=N+1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + f_j(z))$. Siis jono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti joukossa K kohti funktiota s. Koska jokainen s_n on jatkuva, on myös s jatkuva. Koska K on kompakti, on $s(K)$ kompakti. Tasaisen suppenemisen nojalla on olemassa kompakti joukko C siten, että $s_n(z) \in C$ kaikille $z \in K$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$.

Koska eksponenttifunktio on jatkuva funktio $C \to \mathbb{C}$, on edellisen lemman nojalla $\exp(s_n(z)) \to \exp(s(z))$ tasaisesti joukossa K, kun $n \to \infty$. Päättymätön tulo $\prod_{j=1}^{\infty}(1+f_j(z))$ suppenee siis tasaisesti joukossa K.

Koska jokainen funktio

$$z \mapsto \prod_{j=1}^{N}(1+f_j(z)) \cdot \exp(s_n(z))$$

on analyyttinen, viimeinen väite seuraa lauseesta 7.8. □

Huomautus 9.12 (Logaritminen derivointi). Weierstrassin M-testin 7.11 nojalla sarja $\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|$ suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa G, jos jokaiselle kompaktille joukolle $K \subset G$ on olemassa lukujono $(M_j(K))_{j=1}^{\infty}$ siten, että $|f_j(z)| \leqslant M_j(K)$ kaikille $z \in K$ ja $j \in \mathbb{Z}_+$ ja sarja $\sum_{j=1}^{\infty} M_j(K)$ suppenee.

Kun $f(z) := \prod_{j=1}^{\infty}(1+f_j(z))$ ja f ei häviä identtisesti, on

$$f^{-1}(0) = \{z \in G \mid f(z) = 0\} = \bigcup_{j=1}^{\infty}\{z \in G \mid 1+f_j(z) = 0\}.$$

Lisäksi jokaiselle $z \notin f^{-1}(0)$ on voimassa ns. *logaritminen derivointi*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{f_j'(z)}{1+f_j(z)}$$

ja oikean puolen sarja suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa $G \backslash f^{-1}(0)$.

Perustelu: Voidaan olettaa, että $K = \overline{B}(z_0; r)$, missä $z_0 \in G$ ja $r > 0$.

Valitaan $N \in \mathbb{Z}_+$ niin, että $|f_j(z)| \leqslant \frac{1}{2}$ kaikille $z \in K$, kun $j > N$. Tällöin

$$f(z) = \prod_{j=1}^{\infty}(1+f_j(z)) = \prod_{j=1}^{N}(1+f_j(z)) \cdot \exp\Big(\sum_{j=N+1}^{\infty}\mathrm{Log}(1+f_j(z))\Big),$$

missä esiintyvä sarja suppenee tasaisesti joukossa K (epäyhtälön (9.5) perusteella logaritmisarjalla on majoranttina suppeneva sarja $\sum_{j=1}^{\infty} 2\,|f_j(z)| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} M_j(K)$). Lauseen 7.10 nojalla sarjan summan derivaatta voidaan laskea termeittäin derivoimalla (ja termeittäin derivoimalla saatu sarja suppenee tasaisesti joukossa K). Jos

$$g(z) := \exp\Big(\sum_{j=N+1}^{\infty}\mathrm{Log}(1+f_j(z))\Big),$$

on $g'(z) = g(z)\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{f_j'(z)}{1+f_j(z)}$, ja tulon derivointisäännön avulla tulosta $f(z) = g(z)\prod_{j=1}^{N}(1+f_j(z))$ saadaan

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \sum_{j=1}^{N}\frac{f_j'(z)}{1+f_j(z)} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{f_j'(z)}{1+f_j(z)}. \qquad \square$$

9.3. Gamma-funktion tuloesitys

Palataan gamma-funktion tarkasteluun. Koska pisteet $z = -n \in \{0, -1, -2, \ldots\}$ ovat gamma-funktion napoja, ovat nämä pisteet funktion $z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)}$ nollakohtia. Funktion $1/\Gamma$ voisi siis ajatella käyttäytyvän kuin päättymätön tulo $z \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 + \frac{z}{n}\big)$. Tämä tulo ei kuitenkaan suppene itseisesti. Pienellä korjauksella kuitenkin saadaan gammafunktioon läheisesti liittyvä itseisesti suppeneva päättymätön tulo.

Lemma 9.13. *Sarja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\Big(1 + \frac{z}{n}\Big) e^{-z/n} - 1 \Big)$$

suppenee lokaalisti normaalisti koko kompleksitasossa.

Todistus. Taylorin kehitelmän nojalla[5]

$$f(w) := (1 + w)\, e^{-w} - 1 = -\frac{w^2}{2} + R(w),$$

missä $R(w) = \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2!}\, f'''(t\,w)\, w^3\, dt$. Tässä $f'''(t\,w) = (2 - t\,w)\, e^{-t\,w}$.

Kun $R > 0$, on olemassa vakio C_R siten, että

$$|(1 + w)\, e^{-w} - 1| \leqslant C_R\, |w|^2 \quad \text{kaikille } w \in \mathbb{C}, \text{ joille } |w| \leqslant R.$$

Kun $|z| \leqslant R$, on $|z/n| \leqslant R$ kaikille $n \in \mathbb{Z}_+$, joten

$$\Big| \Big(1 + \frac{z}{n}\Big) e^{-z/n} - 1 \Big| \leqslant C_R \Big|\frac{z}{n}\Big|^2 = C_R\, R^2\, \frac{1}{n^2}.$$

Koska yliharmoninen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ suppenee, suppenee väitetty sarja tasaisesti kiekossa $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant R\}$ Weierstrassin M-testin 7.11 nojalla. □

Seuraus 9.14. *Päättymätön tulo*

$$H(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{z}{n}\Big) e^{-z/n}$$

määrittelee kokonaisen analyyttisen funktion H, jolla on ominaisuus

$$H(z) = 0 \iff z \in \mathbb{Z} \textit{ ja } z < 0.$$ □

Gamma-funktiolle saadaan toisenkinlainen tärkeä tuloesitys. Olkoot[6]

$$\gamma_n := 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n} - \log n \quad \text{ja} \quad \gamma := \lim_{n \to \infty} \gamma_n \approx 0.57721566490153286.$$

[5] Sovella reaalimuuttujan funktioiden integraalijäännöstermistä Taylorin kehitelmää funktioon $g(t) := f(z_0 + t\,(z - z_0)) \implies$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \tfrac{1}{2!} f''(z_0)(z - z_0)^2 + \cdots + \tfrac{1}{(p-1)!} f^{(p-1)}(z_0)(z - z_0)^{p-1} + R_p,$$

missä $R_p = \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(z_0 + t\,(z - z_0))\,(z - z_0)^p\, dt$.

[6] Luku γ on ns. *Eulerin (ja Mascheronin) vakio.* Leonh. Eulero: *De progressionibus harmonicis observationes* (1734) "Huius igitur quantitatis constantis C valorem deteximus, quippe est $C = 0.577218$." Lorenzo Mascheroni: *Adnotationes ad calculum integrale Euleri* (1790). Kirjeessään Johann Bernoullille 1740 Euler antaa vakiolle likiarvon 0.57721566490153252, jonka Euler laski sittemmin Eulerin ja Maclaurin summauskaavana tunnetulla menetelmällä. Merkintä γ lienee 1830-luvulta (Carl Anton Bretschneider 1835 ja Augustus De Morgan 1836∼1842). Luvusta γ ei vieläkään tiedetä, onko se rationaalinen vai ei. Jonon $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$ suppeneminen seuraa sarjateorian integraalitestistä. https://en.wikipedia.org/wiki/Euler–Mascheroni_constant

LEMMA 9.15. *Olkoon*

$$G_n(z) := z\, e^{-z \log n} \prod_{k=1}^{n} \Big(1 + \frac{z}{k}\Big).$$

Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} G_n(z) = z\, e^{\gamma z}\, H(z).$$

TODISTUS. Esitetään $G_n(z)$ muodossa

$$G_n(z) = z\, e^{z\,(1+1/2+\cdots+1/n-\log n)} \prod_{k=1}^{n} \Big(1 + \frac{z}{k}\Big)\, e^{-z/k}.$$

Väite seuraa tästä. □

SEURAUS 9.16. *Funktio $G(z) := \lim_{n\to\infty} G_n(z) = z\, e^{\gamma z}\, H(z)$ on analyyttinen koko kompleksitasossa, ja sillä on yksinkertaiset nollakohdat joukon $S := \{0, -1, -2, \ldots\}$ pisteissä; muita nollakohtia ei ole.* □

LAUSE 9.17 (Gamma-funktion tuloesitys; EULER 1729, GAUSS 1811). *Kaikille $z \in \mathbb{C}$ on voimassa*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = G(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-z}}{n!}\, z\,(z+1)\cdots(z+n).$$

TODISTUS. Väitteen oikean puoleinen yhtäsuuruus seuraa identiteetistä $G_n(z) = \frac{n^{-z}}{n!}\, z\,(z+1)\cdots(z+n)$, joka puolestaan seuraa, kun $G_n(z)$:n tulon tekijät kirjoitetaan muotoon $1 + \frac{z}{k} = \frac{z+k}{k}$ ja sievennetään. Ensimmäistä yhtäsuuruutta $\Gamma(z) = 1/G(z)$ varten käytetään Wielandtin lausetta 9.5.

Osoitetaan, että funktiolla $1/G$ on lauseen 9.5 mukaiset ominaisuudet.

(i): Funktio $1/G$ on rajoitettu joukossa $V = \{x + i\,y \mid x \in [1,2),\ y \in \mathbb{R}\}$, mikä seuraa, kun osoitetaan, että $G(x) \geqslant m$ jollekin positiiviselle vakiolle m.

Kun $n \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ja $z = x + i\,y \in V$, on

$$|n^{-z}| = n^{-x} \quad \text{ja} \quad |z + k| \geqslant x + k.$$

Saadaan

$$|G_n(z)| = \frac{n^{-x}}{n!}\, |z|\, |z+1| \cdots |z+n| \geqslant \frac{n^{-x}}{n!}\, x\,(x+1)\cdots(x+n) = G_n(x).$$

Koska välillä $[1,2]$, on $G_n(x) > 0$, on $G(x) = \lim_{n\to\infty} G_n(x) \geqslant 0$. Seurauksen 9.16 nojalla G on kompaktilla välillä $[1,2]$ välillä jatkuva ja nollasta eroava. Siis funktion G pienin arvo m välillä $[1,2]$ on aidosti positiivinen.

(ii): Funktiolle G_n on

$$z\, G_n(z+1) = \frac{z+n+1}{n}\, G_n(z).$$

Väitetty funktionaaliyhtälö seuraa tästä, kun $n \to \infty$.

Koska $G_n(1) = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n} \big(1 + \frac{1}{k}\big) = 1 + \frac{1}{n}$, on $1/G(1) = 1$. □

SEURAUS 9.18.

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n\,(z+n)}.$$

Todistus. Gamma-funktion tuloesityksen nojalla

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\,e^{\gamma z}\,H(z) = z\,e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)\,e^{-z/n}.$$

Kun $f_n(z) := \big(1+\frac{z}{n}\big)\,e^{-z/n} - 1$, on

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\,e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$$

Lemman 9.13 ja lauseen 9.11 nojalla tässä esiintyvä päättymätön tulo suppenee lokaalisti tasaisesti koko kompleksitasossa. Huomatuksen 9.12 nojalla tulon derivaatta voidaan laskea logaritmisella derivoinnilla. Saadaan

$$-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)^2} = \frac{1}{\Gamma(z)}\Big(\frac{1}{z}+\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)}\Big)$$

Väite seuraa tästä, koska $f_n'(z)/(1+f_n(z)) = -\frac{z}{n\,(z+n)}$. □

Kun sijoitetaan $z = 1$, on $\Gamma(1) = 1$ ja $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,(1+n)} = 1$ (HT), joten saadaan

Seuraus 9.19. $\Gamma'(1) = -\gamma$. □

Kuten lauseen 9.5 todistuksessa funktioon h liitettiin funktio H, voidaan gamma-funktioon liittää

$$f(z) := \Gamma(z)\,\Gamma(1-z).$$

Tämä funktio toteuttaa ehdon

$$f(z+1) = -f(z).$$

Lisäksi funktiolla f on yksinkertainen napa jokaisessa pisteessä $z = -n \in \mathbb{Z}$, joissa sillä on residy

$$\operatorname*{Res}_{z=-n} f(z) = \lim_{z\to -n}(z+n)\,\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = (-1)^n.$$

Funktiolla

$$z \mapsto \frac{\pi}{\sin(\pi\,z)}$$

on vastaavat ominaisuudet. Osoitetaan

Lause 9.20 (Leonhard Euler 1749). *Kaikille $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ on voimassa*

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi\,z)}.$$

Todistus. Olkoon

$$h(z) := \Gamma(z)\,\Gamma(1-z) - \frac{\pi}{\sin(\pi\,z)}.$$

Tällöin h on koko kompleksitasossa analyyttinen funktio (samat navat ja residyt). Gamma-funktion funktionaaliyhtälöstä saadaan helposti $h(-z) = -h(z)$. Kun Liouvillen lauseen avulla osoitetaan, että h on vakio, väite seuraa.

Funktio h on rajoitettu joukossa $\{x+i\,y \mid x \in [0,1],\ |y| \geqslant 1\}$. Koska joukko $\{x+i\,y \mid x \in [0,1],\ |y| \leqslant 1\}$ on kompakti, on h rajoitettu joukossa $\{x+i\,y \mid x \in [0,1]\}$.

Funktiolle h on $h(z+1) = -h(z)$. Tämän merkkiä-vaille-jaksollisuuden nojalla h on rajoitettu koko kompleksistasossa, □

Sijoittamalla $z = \frac{1}{2}$ edellisen lauseen kaavaan saadaan $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \pi$, josta edelleen $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2}\, d\tau = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{-1/2}\, dt = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Gamma-funktion funktionaaliyhtälöstä saadaan edelleen

Seuraus 9.21. *Kun $n \in \mathbb{Z}_+$, on* $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\, \prod_{k=0}^{n-1}(k + \frac{1}{2})$. □

Lauseen 9.17 nojalla (HT) $G_n(z)\, G_n(1-z) = \frac{n+1-z}{n}\, z\, \prod_{k=1}^{n}\big(1 - \frac{z^2}{k^2}\big)$, josta saadaan

Seuraus 9.22 (Sinin tuloesitys). $\dfrac{\sin(\pi\, z)}{\pi} = z \displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z^2}{k^2}\Big)$ *kaikille* $z \in \mathbb{C}$. □

Lauseen 9.11 ja sen jälkeisen huomautuksen (logaritminen derivointi) nojalla sinin tuloesityksestä saadaan[7]

Seuraus 9.23 (Kotangentin osamurtokehitelmä).

$$\pi \cot(\pi\, z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\, z}{z^2 - k^2} = \frac{1}{z} + \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} \Big(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k}\Big) \quad \text{kun } z \notin \mathbb{Z}. \qquad \square$$

9.4. Riemannin zeeta-funktiosta

Riemannin zeeta-funktio ζ määritellään kompleksitason pisteille $s \in \mathbb{C}$, joille $\mathrm{Re}(s) > 1$, sarjan summana

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Sarja suppenee lokaalisti tasaisesti puolitasossa $\mathrm{Re}(s) > 1$ (majoranttisarjana yliharmoninen sarja). Riemannin zeeta-funktion yhteydessä kompleksista muuttujaa on tapana merkitä $s = \sigma + i\, t$, missä $\sigma \in \mathbb{R}$ ja $t \in \mathbb{R}$. (Tapa on peräisin Bernhard Riemannilta (1826–1866) ja Edmund Landaulta (1877–1938). Reaalimuuttujan funktiona zeeta-funktiota tutki jo Leonhard Euler (1707–1783).)

Muotoa $x \mapsto f(z)\, z^{s-1}$ olevien funktioiden integraaleja merkitään $\int_a^b f(x)\, x^s\, \frac{dx}{x}$ (kun $(a, b) \subset (0, \infty)$) tai $\oint_\gamma f(z)\, z^s\, \frac{dz}{z}$ (kompleksinen käyräintegraali) (syy tähän ilmene myöhemmin käytetyistä muuttujanvaihdoista; dz/z on "skaalausinvariantti"). Näissä esiintyvä potenssi z^s tarkoittaa aina kompleksisen potenssifunktion päähaaraa eli $z^s = \exp(s\, \mathrm{Log}(z))$, kun $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ja $s \in \mathbb{C}$. On hyvä muistaa, että potenssifunktio $z \mapsto z^s$ on holomorfinen alueessa $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$, ja että logaritmin päähaara $z \mapsto \mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\, \mathrm{Arg}(z)$ on epäjatkuva negatiivisen x-akselin pisteissä.

9.4.1. Zeeta-funktion tuloesitys. Palautetaan mieleen *Eratostheneen seula* alkulukujen määräämiseksi.[8] Kirjoitetaan kaikki positiiviset kokonaisluvut aloittaen luvusta kaksi. Poistetaan kaikki luvun $p := 2$ aidot monikerrat ($2p = 4$, $3p = 6$, $4p = 8$, $5p = 10$ jne). Poimitaan listan alkuun jäänyt lukua p suurempi luku ja nimetään se luvuksi p (toisella kierroksella siis $p := 3$). Poistetaan kaikki luvun p aidot monikerrat (toisella kierroksella siis $2p = 6$, $3p = 9$, $4p = 12$, $5p = 15$ jne). Toistetaan edellinen.

[7]Kun termi $\frac{2\,z}{z^2-k^2}$ jaetaan osamurtoihin, pitää mukaan ottaa lisännäinen vakio, jotta syntyvät sarjat suppenisivat itseisesti: $\frac{2\,z}{z^2-k^2} = \frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k} = \frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{z-(-k)} + \frac{1}{-k}$.

[8]Katso Wikipedian animaatio: https://fi.wikipedia.org/wiki/Eratostheneen_seula

Lause 9.24 (Zeeta-funktion tuloesitys). *Olkoon* $(p_j)_{j=1}^{\infty}$ *alkulukujen muodostama kasvava jono. Tällöin kaikille* $s \in \mathbb{C}$, *joille* $\mathrm{Re}(s) > 1$, *on voimassa*

$$\zeta(s) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_j^s}}.$$

Todistus. Lasketaan aluksi tulo

$$\Big(1 - \frac{1}{2^s}\Big)\,\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{11^s} + \cdots = \sum_{2\nmid n} \frac{1}{n^s}.$$

Seuraavaksi kerrotaan saatu tulo tekijällä $1 - \frac{1}{3^s}$:

$$\Big(1 - \frac{1}{2^s}\Big)\Big(1 - \frac{1}{3^s}\Big)\,\zeta(s) = \sum_{2\nmid n} \frac{1}{n^s} - \sum_{2\nmid n} \frac{1}{(3n)^s} = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \cdots = \sum_{2\nmid n,\ 3\nmid n} \frac{1}{n^s}.$$

Toistetaan edellinen tekijöille $1 - \frac{1}{p_k^s}$, $k \in \{3, \ldots, j\}$:

$$\Big(1 - \frac{1}{2^s}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{1}{p_j^s}\Big)\,\zeta(s) = 1 + \frac{1}{p_{j+1}^s} + \cdots = \sum_{\substack{2\nmid n,\ 3\nmid n,\\ \ldots,\ p_j\nmid n}} \frac{1}{n^s}.$$

Koska sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ suppenee lokaalisti normaalisti puolitasossa $\mathrm{Re}(s) > 1$, sen jäännöstermi $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^s} \to 0$ lokaalisti normaalisti puolitasossa $\mathrm{Re}(s) > 1$, kun $N \to \infty$. Siis

$$\left|\Big(1 - \frac{1}{2^s}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{1}{p_j^s}\Big)\,\zeta(s) - 1\right| = \left|\frac{1}{p_{j+1}^s} + \cdots\right| \leqslant \sum_{n=p_{j+1}}^{\infty} \left|\frac{1}{n^s}\right| \to 0,$$

kun $j \to \infty$. Väite seuraa tästä. □

Toinen tavallinen tapa käsitellä tuloesitys löytyy Freitagin ja Busamin kirjasta [**7**, §VII.4].

Seuraus 9.25. *Kaikille* $s \in \mathbb{C}$, *joille* $\mathrm{Re}(s) > 1$, *on voimassa* $\zeta(s) \neq 0$. □

9.4.2. Zeeta-funktion jatkaminen meromorfifunktioksi. Zeeta-funktion tarkasteluissa tärkeä apu on sen yhteys gamma-funktioon.

Jatkossa käytetään seuraavia merkintöjä

$$g(s) := \int_0^1 \frac{x^s}{e^x - 1}\,\frac{dx}{x}, \quad h(s) := \int_1^{\infty} \frac{x^s}{e^x - 1}\,\frac{dx}{x} \quad \text{ja} \quad G(s) := g(s) + h(s) = \int_0^{\infty} \frac{x^s}{e^x - 1}\,\frac{dx}{x}.$$

Seuraavassa osoitetaan, että

(i) $\Gamma(s)\,\zeta(s) = G(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^s}{e^x - 1}\,\frac{dx}{x}$, kun $\mathrm{Re}(s) > 1$;
(ii) funktio h on analyyttinen koko kompleksitasossa; ja
(iii) funktiolla g on joukossa $\mathbb{C}\backslash(\{1, 0\} \cup \{-2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}_+\})$ lokaalisti tasaisesti suppeneva esitys sarjana

$$g(s) = \frac{1}{s - 1} - \frac{1}{2\,s} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k}\,\frac{1}{(2k)!}\,\frac{1}{2k + s - 1},$$

missä B_j ovat Bernoullin luvut.

(i): Kun $\mathrm{Re}(s) > 1$, saadaan

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\,\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-n\,x}\, x^s \,\frac{dx}{x} \overset{(*)}{=} \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\,x}\, x^s\, \frac{dx}{x} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\, x^s\, \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} \frac{x^s}{e^x - 1}\, \frac{dx}{x}.\end{aligned}$$

Kohta $(*)$ eli sarjan summauksen ja integroinnin järjestyksen vaihdettavuus kaipaa perustelun: Kun $x > 0$, on $0 < e^{-x} < 1$ ja geometrisen sarjan osasumman kaavan nojalla $\sum_{n=1}^{N} e^{-n\,x} = \frac{e^{-x} - e^{-(N+1)\,x}}{1-e^{-x}}$, joten

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\,x} - \sum_{n=1}^{N} e^{-n\,x} = \frac{e^{-(N+1)\,x}}{1-e^{-x}}.$$

Siis jokaiselle $\delta > 0$ on (muista: $\mathrm{Re}(s) = \sigma > 1$)

$$\begin{aligned}\Big| \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\,x}\, x^s\, \frac{dx}{x} - \sum_{n=1}^{N} \int_0^{\infty} e^{-n\,x}\, x^s\, \frac{dx}{x} \Big| &\leqslant \int_0^{\infty} \frac{e^{-(N+1)\,x}}{1-e^{-x}}\, x^{\sigma}\, \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-N\,x}}{e^x - 1}\, x^{\sigma}\, \frac{dx}{x} \\ = \int_0^{\delta} \frac{e^{-N\,x}}{e^x - 1}\, x^{\sigma}\, \frac{dx}{x} + \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-N\,x}}{e^x - 1}\, x^{\sigma}\, \frac{dx}{x} &\leqslant \int_0^{\delta} \frac{x^{\sigma}}{e^x - 1}\, \frac{dx}{x} + \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-N\,x}}{e^x - 1}\, x^{\sigma}\, \frac{dx}{x} \\ \overset{(\dagger)}{\leqslant} \int_0^{\delta} x^{\sigma-2}\, dx + e^{-N\,\delta} \int_{\delta}^{\infty} k!\, x^{\sigma-k-1} dx &= \frac{\delta^{\sigma-1}}{\sigma-1} + e^{-N\,\delta}\, k!\, \frac{\delta^{\sigma-k}}{k-\sigma}.\end{aligned}$$

Kohdassa $(\dagger)$ on käytetty epäyhtälöitä $e^x - 1 \geqslant x$ ja $e^x - 1 \geqslant \frac{1}{k!}\, x^k$, kun $x \geqslant 0$, ja $k \in \mathbb{Z}_+$ on valittu niin, että $k > \sigma$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan ensin $\delta > 0$ siten, että $\frac{\delta^{\sigma-1}}{\sigma-1} \leqslant \varepsilon$. Tämän jälkeen valitaan $N \in \mathbb{Z}_+$ siten, että $e^{-N\,\delta}\, k!\, \frac{\delta^{\sigma-k}}{k-\sigma} \leqslant \varepsilon$. Kohdan $(*)$ yhtäsuuruus seuraa tästä. □

(ii): Jokaiselle $b > 1$ funktio h_b,

$$h_b(s) := \int_1^b \frac{x^s}{e^x - 1}\, \frac{dx}{x},$$

on kokonainen parametrista riippuvan integraalin derivointilauseen 5.3 nojalla, ja kun $b \to \infty$, on $h_b(s) \to h(s)$ tasaisesti (HT), joten myös funktio

$$h\colon s \mapsto \int_1^{\infty} \frac{x^s}{e^x - 1}\, \frac{dx}{x}$$

on kokonainen (lause 7.8).

(iii): Funktion g käsittelemiseksi otetaan käyttöön Bernoullin luvut B_k määrittelevä funktio. Kun $0 < |z| < 2\pi$, on (HT: kun $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$, on $B_{2n-1} = 0$)

(9.6)
$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}\, z^k = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\, z^{2k}$$

Kun $\mathrm{Re}(s) > 1$, on (huomaa: sarjan suppenemissäde on 2π, joten sarjan summauksen ja integroinnin järjestys voidaan vaihtaa, seuraus 7.9)

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_0^1 \frac{x^s}{e^x - 1}\,\frac{dx}{x} = \int_0^1 \frac{x^s}{x}\,\frac{dx}{x} - \int_0^1 \tfrac{1}{2}\,x^s\,\frac{dx}{x} + \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\,x^{2k+s-1}\,\frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2\,s} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k}\,\frac{1}{(2k)!}\,\frac{1}{2k+s-1}. \end{aligned}$$

Holomorfisen funktion Cauchyn estimaatit (lause CAn1/5.19) voidaan Taylorin sarjan kertoimien avulla esittää muodossa: Kun $a_k := B_k/k!$, on

$$|a_k| \leqslant \frac{M(r)}{r^k},$$

missä $M(r)$ on funktion $z \mapsto \left|\frac{z}{e^z-1}\right|$ suurin arvo ympyrän kehällä $|z| = r$. Kun valitaan $r := 2$ ja $M := M(2)$, on siis $|a_k| \leqslant \frac{M}{2^k}$, joten funktiolle g saadulla sarjalla on suppeneva majoranttisarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{2^{2k}}\,\frac{1}{|2k+s-1|}.$$

Tämän avulla on helppo todeta, että funktion g sarja suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa $\mathbb{C}\backslash(\{1,0\} \cup \{-2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}_+\})$. Funktio g voidaan siis laajentaa koko kompleksitasoon meromorfifunktioksi, joten funktio $G = g + h$ on koko kompleksitasossa meromorfinen ja sillä on yksinkertaiset navat pisteissä $s \in \{1,0\} \cup \{-2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$.

Koska gamma-funktiolla on yksinkertaiset navat pisteissä $-n$, $n \in \mathbb{N}$, on funktiolla

$$\zeta(s) = \frac{G(s)}{\Gamma(s)}$$

napa ainoastaan pisteessä $s = 1$. Koska pisteet $s = -2k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, ovat funktion $1/\Gamma$ nollakohtia eivätkä ole funktion G napoja, ne ovat zeeta-funktion nollakohtia.

Koska lauseen 9.20 nojalla

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi\,s)},$$

saadaan

$$\zeta(s) = \frac{G(s)}{\Gamma(s)} = \frac{1}{\pi}\,\sin(\pi\,s)\,\Gamma(1-s)\,G(s),$$

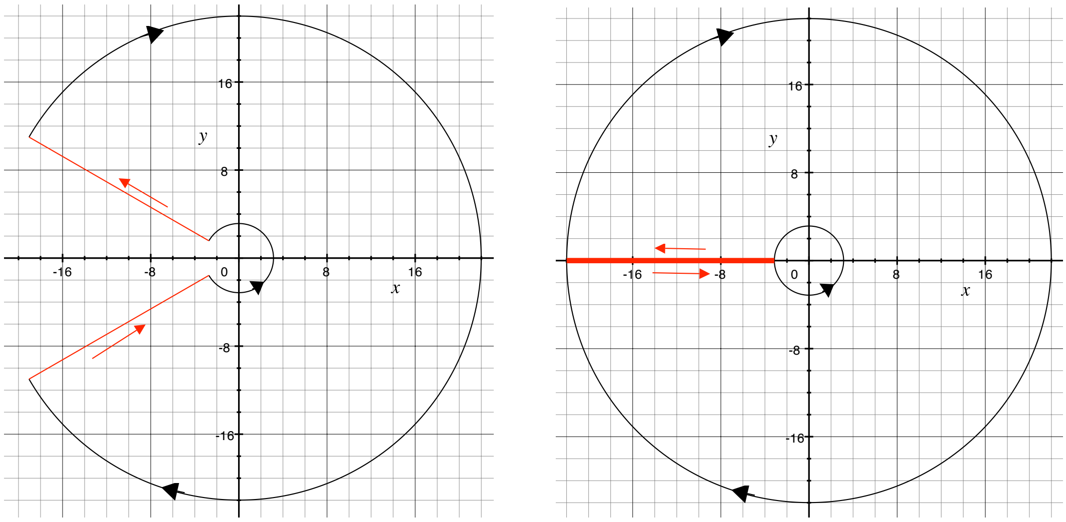
josta

$$\zeta(1-s) = \frac{1}{\pi}\,\sin(\pi\,(1-s))\,\Gamma(s)\,G(1-s) = \frac{1}{\pi}\,\sin(\pi\,s)\,\Gamma(s)\,G(1-s).$$

Tässä

$$G(1-s) = h(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{2\,(1-s)} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k}\,\frac{1}{(2k)!}\,\frac{1}{2k-s}$$

Raja-arvotarkastelujen avulla saadaan zeeta-funktion arvot negatiivisen x-akselin kokonaislukupisteisiin (HT):



KUVA 1. Vasen kuva: Alue $A_\eta(\varepsilon, R)$ ja sen reunakäyrän suunnistus. Oikea kuva: Kun $\eta \to 0+$, alue $A_\eta(\varepsilon, R)$ muuttuu auki leikatuksi rengasalueeksi $\{z \in \mathbb{C} \mid \varepsilon < |z| < R,\ z \notin [-R, -\varepsilon]\}$; reunakäyrän tilalle tulee vastakkaisiin suuntiin suunnistetut ympyrän kehät $|z| = \varepsilon$ ja $|z| = R$ sekä negatiivisen x-akselin jana $[-R, -\varepsilon]$, joka kuljetaan kerran kumpaankin suuntaan.

LAUSE 9.26. *Riemannin zeeta-funktio ζ voidaan laajentaa koko kompleksitasoon meromorfifunktioksi, jolla on yksikertainen napa pisteessä $s = 1$. Kun $k \in \mathbb{Z}_+$, zeetafunktiolla on arvot*

$$\zeta(1-2k) = -\frac{1}{2k} B_{2k} \quad \textit{ja} \quad \zeta(-2k) = 0.$$

Origossa zeeta-funktiolla on arvo

$$\zeta(0) = B_1 = -\tfrac{1}{2}. \qquad \square$$

9.4.3. Riemannin funktionaaliyhtälö. Tässä kohdassa todistetaan

LAUSE 9.27 (Riemannin funktionaaliyhtälö).

$$\boxed{\frac{\pi}{\Gamma(1-s)}\,\zeta(s) = (2\pi)^s \sin\!\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s)}$$

Olkoot $0 < \eta < \pi/2$, $0 < \varepsilon < 2\pi$ ja $R = R_m := 2\pi m + \pi$, kun $m \in \mathbb{Z}_+$. Asetetaan (katso kuva 1)

$$A_\eta(\varepsilon, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid \varepsilon < |z| < R,\ -\pi + \eta < \operatorname{Arg}(z) < \pi - \eta\},$$

ja

$$F(z) := \frac{e^z}{e^z - 1} = \frac{1}{1 - e^{-z}}.$$

Oletetaan aluksi, että $\sigma = \operatorname{Re}(s) < 0$. Sovelletaan residylausetta alueessa $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$ holomorfiseen funktioon $z \mapsto F(z)\, z^{s-1}$ ja käyrään $\partial A_\eta(\varepsilon, R)$.

Funktiolla F on alueessa $A_\eta(\varepsilon, R)$ navat pisteissä $z = 2\pi\, i\, n$, $0 < |n| \leqslant m$.

Alueen $A_\eta(\varepsilon,R)$ reunan parametriesitykseksi valitaan (huomaa: reunan kiertosuunta valitaan negatiiviseksi) $\partial A_\eta(\varepsilon,R)=\overleftarrow{\gamma}_-\vee\gamma_\varepsilon\vee\gamma_+\vee\overleftarrow{\gamma}_R$, missä $\gamma_r(t):=r\,e^{i\,t}$, $t\in[-\pi+\eta,\pi-\eta]$, kun $r>0$, ja $\gamma_\pm(t):=t\,e^{\pm i\,\eta}$, $t\in[\varepsilon,R]$. Residylauseen avulla saadaan

$$\begin{aligned}\oint_{\partial A_\eta(\varepsilon,R)} F(z)\,z^s\,\frac{dz}{z} &= -2\pi\,i\sum_{0<|n|\leqslant m}\operatorname*{Res}_{z=2\pi\,i\,n}\big(F(z)\,z^{s-1}\big)\\ &= -2\pi\,i\sum_{0<|n|\leqslant m}(2\pi\,i\,n)^s\,(2\pi\,i\,n)^{-1} = -\sum_{0<|n|\leqslant m}(2\pi)^s\,|n|^s\,e^{s\,\mathrm{Arg}(2\pi\,i\,n)}\,n^{-1}\\ &= -(2\pi)^s\sum_{n=1}^m n^{s-1}\left(e^{s\,i\,\pi/2}-e^{s\,(-i\,\pi/2)}\right) = -2\,i\,(2\pi)^s\sum_{n=1}^m\frac{1}{n^{1-s}}\,\sin\Big(\frac{\pi\,s}{2}\Big).\end{aligned}$$

Kun $\eta\to 0+$, saadaan (nyt polkujen γ_r määrittelyväliksi muuttuu väli $[-\pi,\pi]$; rajankäynti on helpointa todeta esittämällä integraalit parametriesitysten avulla)

$$\begin{aligned}\oint_{\partial A_\eta(\varepsilon,R)} F(z)\,z^s\,\frac{dz}{z} \to \int_{-R}^{-\varepsilon} F(x)\,|x|^s\,e^{-i\,\pi\,s}\,\frac{dx}{x} + \oint_{\gamma_\varepsilon} F(z)\,z^s\,\frac{dz}{z}\\ + \int_{-\varepsilon}^{-R} F(x)\,|x|^s\,e^{i\,\pi\,s}\,\frac{dx}{x} + \oint_{\overleftarrow{\gamma}_R} F(z)\,z^s\,\frac{dz}{z}\end{aligned}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että F on rajoitettu ympyrän kehällä $|z|=R_m$.

Kun $z=x+i\,y$ ja $R_m-\pi/2=2\pi\,m+\pi/2\leqslant y\leqslant 2\pi\,m+3\,\pi/2=R_m+\pi/2$, on $\cos y\leqslant 0$, joten $|1-e^{-z}|=|1-e^{-x}\cos y+i\,e^{-x}\sin y|\geqslant|1-e^{-x}\cos y|\geqslant 1$. Tällaisissa pisteissä on $|F(z)|=\left|\frac{1}{1-e^{-z}}\right|\leqslant 1$.

Kun $x\geqslant 1$, on $e^{-x}\leqslant e^{-1}$ ja $|1-e^{-z}|\geqslant 1-|e^{-z}|=1-e^{-x}\geqslant 1-e^{-1}$, joten $|F(z)|\leqslant 1/(1-e^{-1})$.

Kun $x\leqslant -1$, on $e^{-x}\geqslant e$ ja $|1-e^{-z}|\geqslant|e^{-z}|-1=e^{-x}-1\geqslant e-1$, joten $|F(z)|\leqslant 1/(e-1)$.

Koska kaikille $z=x+i\,y\in\mathbb{C}$, joille $|z|=R_m$, on (piirrä kuva) $x\geqslant 1$, $x\leqslant -1$ tai $R_m-\pi/2\leqslant y\leqslant R_m+\pi/2$, on $|F(z)|\leqslant e/(e-1)$.

Nyt, kun $s=\sigma+i\,t$, on

$$\Big|\oint_{\overleftarrow{\gamma}_{R_m}} F(z)\,z^s\,\frac{dz}{z}\Big| \leqslant \max\{|F(z)\,z^s|\mid |z|=R_m\}\,\frac{\ell(\gamma_R)}{R}\leqslant e/(e-1)\,R^\sigma\,e^{|t|\,\pi}\,2\pi.$$

Tästä saadaan, kun $\mathrm{Re}(s)<0$,

$$\oint_{\overleftarrow{\gamma}_{R_m}} F(z)\,z^s\,\frac{dz}{z}\to 0,\quad \text{kun } m\to\infty.$$

Siis

$$
\begin{aligned}
-2\,i\,(2\pi)^s\zeta(1-s)\,\sin\Big(\frac{\pi\,s}{2}\Big) &= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} F(x)\,|x|^s\,e^{-i\,\pi\,s}\,\frac{dx}{x} \\
&\quad + \oint_{\gamma_\varepsilon} F(z)\,z^s\,\frac{dz}{z} + \int_{-\varepsilon}^{-\infty} F(x)\,|x|^s\,e^{i\,\pi\,s}\,\frac{dx}{x} \\
&= \int_{\infty}^{\varepsilon} F(-x)\,|-x|^s\,e^{-i\,\pi\,s}\,\frac{dx}{x} \\
&\quad + \oint_{\gamma_\varepsilon} F(z)\,z^s\,\frac{dz}{z} + \int_{\varepsilon}^{\infty} F(-x)\,|-x|^s\,e^{i\,\pi\,s}\,\frac{dx}{x} \\
&= \oint_{\gamma_\varepsilon} F(z)\,z^s\,\frac{dz}{z} + \int_{\varepsilon}^{\infty} F(-x)\,|-x|^s\,(e^{i\,\pi\,s} - e^{-i\,\pi\,s})\,\frac{dx}{x} \\
&= \oint_{\gamma_\varepsilon} F(z)\,z^s\,\frac{dz}{z} - 2\,i\,\sin(\pi\,s)\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x^s}{e^x-1}\,\frac{dx}{x}
\end{aligned}
$$

Siis kaikille $s \in \mathbb{C}$, joille $\mathrm{Re}(s) < 0$, on

$$
-2\,i\,(2\pi)^s\zeta(1-s)\,\sin\Big(\frac{\pi\,s}{2}\Big) = \oint_{\gamma_\varepsilon} F(z)\,z^s\,\frac{dz}{z} - 2\,i\,\sin(\pi\,s)\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x^s}{e^x-1}\,\frac{dx}{x}
$$

Tässä kaavan molemmat puolet ovat koko kompleksitasossa muuttujan s meromorfisia funktioita, joten kaava pätee kaikille $s \in \mathbb{C}$ (lause 7.23).[9]

Kun nyt $\mathrm{Re}(s) > 1$, on (HT; vastaava arviointi kuin edellä; origon lähellä $1-e^{-z} = z + |z|\,\eta(z)$, missä $\eta(z) \to 0$, kun $z \to 0$)

$$
\oint_{\gamma_\varepsilon} F(z)\,z^s\,\frac{dz}{z} \to 0, \quad \text{kun } \varepsilon \to 0+.
$$

Edellisestä kaavasta saadaan nyt

$$
-2\,i\,(2\pi)^s\zeta(1-s)\,\sin\Big(\frac{\pi\,s}{2}\Big) = -2\,i\,\sin(\pi\,s)\int_0^{\infty} \frac{x^s}{e^x-1}\,\frac{dx}{x} = -2\,i\,\sin(\pi\,s)\,G(s).
$$

Tämä identiteetti on osoitettu voimassaolevaksi kaikille $s \in \mathbb{C}$, joille $\mathrm{Re}(s) > 1$. Koska kaavan molemmat puolet ovat koko kompleksitasossa muuttujan s meromorfisia funktioita, kaava pätee kaikille $s \in \mathbb{C}$ (lause 7.23).

Riemannin funktionaaliyhtälö seuraa nyt kaavasta

$$
\zeta(s) = \frac{1}{\pi}\,\sin(\pi\,s)\,\Gamma(1-s)\,G(s). \qquad \square
$$

Kun asetetaan

$$
\xi(s) := \pi^{-s/2}\,\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\,\zeta(s),
$$

toteuttaa funktio ξ seuraavan symmetriaehdon (HT)

$$
\xi(1-s) = \xi(s).
$$

[9] Tarkkaan ottaen: ”...kaava pätee kaikille $s \in \mathbb{C}\backslash E$, missä E on napojen joukko.” Meromorfifunktioille voidaan kuitenkin sopia arvo ”∞” navoissa; vertaa lauseeseen 8.11.

LUKU 10

Analyyttisen funktion kuvausominaisuuksia

10.1. Rouchén lause

Olkoot $G \subset \mathbb{C}$ avoin ja $f\colon G \to \mathbb{C}$ annettu funktio.

Palautetaan mieleen: Avoimen joukon G osajoukko E on *diskreetti*, jos joukolla E ei ole joukkoon G kuuluvaa kasautumispistettä. Funktio f on *meromorfinen*, jos on olemassa diskreetti joukko $E \subset G$ siten, että

a) $f|_{G\setminus E}$ on analyyttinen, ja
b) jokainen $e \in E$ on funktion f napa.

LEMMA 10.1. *Olkoon f meromorfinen funktio avoimessa joukossa G. Oletetaan, että funktiolla f on joukossa G äärellisen monta nollakohtaa $\{a_1, \dots, a_q\}$ ja äärellisen monta napaa $\{b_1, \dots, b_p\}$. Olkoon γ joukon G suhteen nollahomologinen umpinainen tie, jolle $\{a_1, \dots, a_q, b_1, \dots, b_p\} \cap |\gamma| = \varnothing$.*

Tällöin

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = \sum_{j=1}^{q} n_j\, W(\gamma; a_j) - \sum_{j=1}^{p} m_j\, W(\gamma; b_j),$$

missä n_j on nollakohdan a_j kertaluku ja m_j on navan b_j kertaluku.

TODISTUS. Nollakohdan a_j lähellä $f(z) = (z - a_j)^{n_j}\, g(z)$, missä $g(a_j) \neq 0$, joten

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_j}{z - a_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Koska g'/g on analyyttinen pisteen a_j lähellä, on

$$\operatorname*{Res}_{z=a_j} \frac{f'(z)}{f(z)} = n_j.$$

Navan b_j lähellä $f(z) = (z - b_j)^{-m_j}\, g(z)$, missä $g(b_j) \neq 0$, joten

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{m_j}{z - b_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Koska g'/g on analyyttinen pisteen b_j lähellä, on

$$\operatorname*{Res}_{z=b_j} \frac{f'(z)}{f(z)} = -m_j.$$

Väite seuraa nyt residylauseesta. □

[1]Viimeksi muutettu 1.5.2020.

Huomautus 10.2 (Argumentin periaate). Kompleksisen käyräintegraalin määritelmän nojalla on $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = W(f\circ\gamma;0)$, kunhan $f(z)\neq 0$ kaikille $z\in|\gamma|$. Edellisen lauseen oletuksin kuvapolun $f\circ\gamma$ kierrosluku on siis

$$W(f\circ\gamma;0)=\sum_{j=1}^{q}n_j\,W(\gamma;a_j)-\sum_{j=1}^{p}m_j\,W(\gamma;b_j).$$

Määritelmä. *Tien γ rajoittama joukko* (tai *sisäpuoli*) on

$$G_{\gamma,i}:=\{z\in G\backslash|\gamma|\mid W(\gamma;z)\neq 0\}.$$

Vastaavasti *tien γ ulkopuoli* on

$$G_{\gamma,e}:=\{z\in G\backslash|\gamma|\mid W(\gamma;z)=0\}.$$

Seuraus 10.3. *Jos lemman 10.1 oletusten lisäksi $W(\gamma;z)\in\{0,1\}$ kaikille $z\in G\backslash|\gamma|$, niin*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta=N-M,$$

missä N on funktion f tien γ rajoittamassa joukossa olevien nollakohtien lukumäärä, kun nollakohdat lasketaan kertalukujensa mukaan, ja M on funktion f tien γ rajoittamassa joukossa olevien napojen lukumäärä, kun navat lasketaan kertalukujensa mukaan. □

Lause 10.4 (Rouché 1862[2]). *Olkoot f ja g holomorfisia funktioita avoimessa joukossa G ja γ joukon G suhteen nollahomologinen umpinainen tie, jolle $W(\gamma;z)\in\{0,1\}$ kaikille $z\in G\backslash|\gamma|$. Oletetaan, että*

$$|g(\zeta)|<|f(\zeta)|\quad\textit{kaikille } \zeta\in|\gamma|.$$

Tällöin funktioilla f ja $f+g$ on sama määrä nollakohtia tien γ rajoittamassa joukossa $G_{\gamma,i}$, kun nollakohdat lasketaan kertalukujensa mukaan.

Todistus. Oletuksista seuraa, että $f(\zeta)\neq 0$ kaikille $\zeta\in|\gamma|$. Lemman 10.1 nojalla

$$W(f\circ\gamma;0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta=\sum_{j=1}^{q}n_j=\begin{array}{l}\text{funktion } f \text{ nollakohtien lukumäärä}\\ \text{tien } \gamma \text{ rajoittamassa joukossa.}\end{array}$$

Koska $|g(\zeta)|<|f(\zeta)|$ kaikille $\zeta\in|\gamma|$, on $m:=\min\{|f(\zeta)|-|g(\zeta)|\mid\zeta\in|\gamma|\}>0$. Kaikille $\zeta\in|\gamma|$ ja kaikille $s\in[0,1]$ on

$$|f(\zeta)+s\,g(\zeta)|\geqslant|f(\zeta)|-|g(\zeta)|\geqslant m.$$

Olkoon

$$\gamma_s(t):=f(\gamma(t))+s\,g(\gamma(t)),\quad\text{kun } s\in[0,1].$$

[2]Eugène Rouché (1832–1910), Ranska. Theodor Estermann (1902–1991), Saksa, Englanti, oivalsi 1962, että Rouchén lauseen väite pätee myös symmetrisemmällä oletuksella: $|f(\zeta)-g(\zeta)|<|f(\zeta)|+|g(\zeta)|$ kaikille $\zeta\in|\gamma|$.
Serge Lang kirjassaan *Complex analysis* [**11**, s. 181]: "We say that γ has an **interior** if $W(\gamma;\alpha)=0$ or 1 for every complex number α which does not lie on γ. Then the set of points α such that $W(\gamma;\alpha)=1$ will be called the **interior** of γ. It's that simple." Huomaa: Langin tien sisäpuolen käsite on rajoitetumpi kuin määritelmässä.

Tällöin γ_s on alueen $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ tie ja

$$s \mapsto W(\gamma_s; 0) = \frac{1}{2\pi\, i} \oint_{\gamma_s} \frac{dz}{z}$$

on jatkuva kokonaislukuarvoinen funktio (jatkuvuus: vertaa lemman ℂAn1/5.4 todistukseen), joten se on vakiofunktio. Siis

$$W(f \circ \gamma; 0) = W(\gamma_0; 0) = W(\gamma_1; 0) = W((f+g) \circ \gamma; 0).$$

Kierrosluku $W((f+g) \circ \gamma; 0)$ on funktion $f+g$ nollakohtien lukumäärä tien γ rajoittamassa joukossa. □

Seuraus 10.5 (Algebran peruslause). *Olkoon $P(z) = a_n\, z^n + \cdots + a_0$ astetta $n > 0$ oleva kompleksikertoiminen polynomi. Tällöin yhtälöllä $P(z) = 0$ on n juurta, kun nollakohdat lasketaan kertalukujensa mukaan.*

Todistus. Asetetaan $f(z) := a_n\, z^n$ ja $g(z) := P(z) - f(z)$.

Kun $R > 0$ on riittävän suuri, on $|g(z)| < |f(z)|$ kaikille $z \in \mathbb{C}$, joille $|z| \geqslant R$. Rouchén lauseen nojalla funktioille f ja $f + g = P$ on yhtä monta nollakohtaa ympyränkehän $|z| = R$ sisäpuolella. □

Lause 10.6 (Adolf Hurwitz (1859–1919), Saksa; lause 1889). *Olkoon $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ jono holomorfisia funktioita alueessa D. Oletetaan, että*

a) *$f_k \to f$ lokaalisti tasaisesti alueessa D; ja*
b) *$f_k(z) \neq 0$ kaikille $z \in D$ ja kaikille $k \in \mathbb{Z}_+$.*

Tällöin joko $f \equiv 0$ tai $f(z) \neq 0$ kaikille $z \in D$.

Todistus. Tehdään antiteesi: $f \not\equiv 0$, mutta $f(z_0) = 0$ jollekin $z_0 \in D$.

Olkoon nollakohdan z_0 kertaluku k_0. Tällöin on olemassa $r > 0$ siten, että kiekossa $B(z_0; 2r)$ jollekin holomorfiselle funktiolle g on voimassa $g(z) \neq 0$ kaikille $z \in B(z_0; 2r)$ ja $f(z) = (z - z_0)^{k_0}\, g(z)$.

Argumentin periaatteen nojalla, kun $\gamma(t) := z_0 + r\, e^{i\, t}$, $t \in [0, 2\pi]$,

$$\frac{1}{2\pi\, i} \oint_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = k_0 \neq 0.$$

Toisaalta, koska $f_k(z) \neq 0$ kaikille $z \in D$ ja kaikille $k \in \mathbb{Z}_+$, on

$$\frac{1}{2\pi\, i} \oint_{\gamma} \frac{f_k'(\zeta)}{f_k(\zeta)}\, d\zeta = 0 \quad \text{kaikille } k \in \mathbb{Z}_+.$$

Koska $f_k \to f$ lokaalisti tasaisesti alueessa D ja $f(z) \neq 0$ kaikille $z \in D$, joille $|z - z_0| = r$, suppenee $f_k'/f_k \to f'/f$ tasaisesti joukossa $\{z \in D \mid |z - z_0| = r\}$. Tällöin

$$0 = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{2\pi\, i} \oint_{\gamma} \frac{f_k'(\zeta)}{f_k(\zeta)}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi\, i} \oint_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = k_0 \neq 0.$$

Päädytään ristiriitaan. Antiteesi on siis epätosi. □

Hurwitzin lauseesta saadaan injektiivisille kuvauksille

LAUSE 10.7. *Olkoon* $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ *jono holomorfisia funktioita alueessa* D. *Oletetaan, että*

a) $f_k \to f$ *lokaalisti tasaisesti alueessa* D*; ja*
b) *jokainen* f_k *on injektio.*

Tällöin f *on joko vakio tai injektio.*

TODISTUS. Jätetään lukijan tehtäväksi.
⟦Vihje: Kiinnitä $a \in D$ ja tarkastele funktiojonoa $(f_k - f_k(a))_{k=1}^{\infty}$.⟧ □

10.2. Analyyttisen funktion avoimuus

LAUSE 10.8. *Olkoon* $f\colon B(z_0;R) \to \mathbb{C}$ *analyyttinen ja* $w_0 := f(z_0)$. *Oletetaan, että* z_0 *on funktion* $z \mapsto f(z) - w_0$ n*-kertainen nollakohta.*

Tällöin on olemassa $\varepsilon > 0$ *ja* $\delta \in (0,R)$ *siten, että jokaiselle* $w \in B^*(w_0;\varepsilon)$ *yhtälöllä*

$$f(z) = w$$

on täsmälleen n *eri ratkaisua* $z \in B(z_0;\delta)$.

TODISTUS. Koska analyyttisen funktion nollakohdat ovat eristettyjä, on olemassa $\delta \in (0, R/2)$ siten, että

$$f(z) \neq w_0 \quad \text{ja} \quad f'(z) \neq 0 \quad \text{kaikille } z \in B^*(z_0;2\delta).$$

Olkoot $\gamma(t) := z_0 + \delta\, e^{i\,t}$, kun $t \in [0,2\pi]$, ja $\eta := f \circ \gamma$. Koska $w_0 \notin |\eta|$, on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että $B(w_0;\varepsilon) \cap |\eta| = \varnothing$. Tällöin $B(w_0;\varepsilon)$ sisältyy johonkin joukon $\mathbb{C}\backslash|\eta|$ komponenttiin. Lemman 5.7/CAn1 nojalla kaikille $w \in B(w_0;\varepsilon)$ on $W(\eta;w) = W(\eta;w_0)$.

Olkoon $w \in B^*(w_0;\varepsilon)$. Olkoot a_j funktion $f(z)-w$ nollakohdat ja olkoon n_j nollakohdan a_j kertaluku. Argumentin periaatteen nojalla, kun sitä sovelletaan funktioon $z \mapsto f(z) - w$,

$$n = W(\eta;w_0) = W(\eta;w) = \sum_{j=1}^{q} n_j\, W(\gamma;a_j).$$

Koska $f'(z) \neq 0$ kaikille $z \in B^*(z_0;2\delta)$, jokainen nollakohta a_j on yksinkertainen. Tässä jokainen $W(\gamma;a_j) \in \{0,1\}$, joten ratkaisuja a_j on tasan n kappaletta. □

LAUSE 10.9. *Olkoot* D *alue ja* $f\colon D \to \mathbb{C}$ *ei-vakio analyyttinen kuvaus. Tällöin* f *on* avoin kuvaus*, t.s. jokaisen avoimen joukon* $G \subset D$ *kuvajoukko* $f(G)$ *on avoin.*

TODISTUS. Olkoot $G \subset D$ avoin, $w_0 \in f(G)$ ja $z_0 \in D$, jolle $f(z_0) = w_0$. Koska f ei ole vakio, on lauseen 10.8 nojalla olemassa $\varepsilon > 0$ ja $\delta \in (0,R)$ siten, että $B(z_0;\delta) \subset G$ ja jokaiselle $w \in B(w_0;\varepsilon)$ yhtälöllä $f(z) = w$ on ainakin yksi ratkaisu $z \in B(z_0;\delta)$. Tällöin

$$B(w_0;\varepsilon) \subset f(B(z_0;\delta)) \subset f(G),$$

joten $f(G)$ on avoin. □

SEURAUS 10.10. *Olkoot* $G \subset \mathbb{C}$ *avoin,* $f\colon G \to \mathbb{C}$ *analyyttinen ja* $z_0 \in G$. *Jos* $f'(z_0) \neq 0$, *niin on olemassa* $r > 0$ *siten, että*

$$f|_{B(z_0;r)}\colon B(z_0;r) \to f(B(z_0;r))$$

on homeomorfismi.

Todistus. Olkoon $w_0 := f(z_0)$. Sovelletaan lausetta 10.8 jossakin pisteen z_0 ympäristössä $B(z_0; R) \subset G$. Koska $f'(z_0) \neq 0$, on $n = 1$. Siis on olemassa $\varepsilon > 0$ ja $\delta \in (0, R)$ siten, että $B(z_0; \delta) \subset G$ ja jokaiselle $w \in B(w_0; \varepsilon)$ yhtälöllä $f(z) = w$ on täsmälleen yksi ratkaisu $z \in B(z_0; \delta)$. (Tapaus $w = w_0$: HT.) Koska f on jatkuva pisteessä z_0, on olemassa $r > 0$ siten, että $f(B(z_0; r)) \subset B(w_0; \varepsilon)$. Osoitetaan, että rajoittuma $f|_{B(z_0;r)} : B(z_0; r) \to f(B(z_0; r))$ on bijektio.

Injektiivisyys: Antiteesi: On olemassa $z \in B(z_0; r)$ ja $\zeta \in B(z_0; r)$ siten, että $w := f(z) = f(\zeta)$. Todistuksen alussa olleen päättelyn nojalla $\zeta = z$, koska muuten pisteellä w olisi ainakin kaksi alkukuvaa joukossa $B(z_0; r) \subset B(z_0; \delta)$. Siis f on bijektio. Käänteiskuvauksen jatkuvuus seuraa avoimen kuvauksen lauseesta 10.9. □

Seuraus 10.11. *Olkoon $f : G \to \mathbb{C}$ analyyttinen injektio. Tällöin $f'(z) \neq 0$ kaikille $z \in G$.*

Todistus. Olkoot $z_0 \in G$ ja $w_0 := f(z_0)$. Piste z_0 on yhtälön $f(z_0) = w_0$ yksinkertainen juuri, koska muuten pisteen w_0 lähellä olisi $w \in f(G)$, jolla olisi enemmän kuin yksi alkukuva joukossa G (lause 10.8). Tällöin f ei kuitenkaan olisi injektio. Juuren kertaluvun määritelmän nojalla $f'(z_0) \neq 0$. □

Huomaa, että vastaava ei päde edes *reaalianalyyttisille* funktioille. Esimerkiksi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$, on injektio, mutta $f'(0) = 0$.

10.3. Konformikuvauksista

Määritelmä 10.12. Kuvaus $f : D \to \mathbb{C}$ alueessa D on *konformikuvaus*, jos se on analyyttinen injektio.

Edellä olleista tuloksista saadaan

Lause 10.13. *Olkoon $f : D \to \mathbb{C}$ konformikuvaus. Tällöin*

(i) *$f : G \to f(G)$ on homeomorfismi;*
(ii) *$f'(z) \neq 0$ kaikille $z \in D$; ja*
(iii) *käänteiskuvaus $f^{-1} : f(G) \to G$ on konformikuvaus, jolle pisteessä $w = f(z)$ on*

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$ □

Eräs varsin merkittävä konformikuvauksia koskeva tulos on seuraava Riemannin kuvauslause. Sen seurauksena yhdesti yhtenäisiä kompleksitason osajoukkoja ovat $\mathbb{C}$ ja kiekon $B(0; 1)$ konformiset kuvat.

Lause 10.14 (Riemannin kuvauslause; Bernhard Riemann 1851). *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ yhdesti yhtenäinen alue ja $D \neq \mathbb{C}$. Tällöin on olemassa konforminen bijektio $f : D \to B(0; 1)$. Funktiolle f voidaan lisäksi asettaa ehto: kun $z_0 \in D$ on kiinnitetty, on $f(z_0) = 0$ ja $f'(z_0) > 0$. Nämä lisäehdot määräävät funktion f yksikäsitteisesti.*

Todistusta ei tässä esitetä. Katso Freitag & Busam [**7**, §IV.4], Kodaira [**9**, §5.1 (ja 5.2)], Lang [**11**, luku X] tai Wegert [**19**, §6.4 (ja 6.5)]. □

Huomaa, että Liouville lauseen nojalla holomorfinen kuvaus $\mathbb{C} \to B(0; 1)$ on vakio. Riemannin kuvauslause ei tämän vuoksi päde tapauksessa $D = \mathbb{C}$.

Paul Koebe (1882–1945; Saksa) ja Jules Henri Poincaré (1854–1912; Ranska) todistivat vuonna 1907 yleisemmän ns. *uniformisointilauseen*: Jokainen yhdesti yhtenäinen Riemannin pinta voidaan kuvata konformisella bijektiolla yksikkökiekoksi $B(0;1)$, koko kompleksitasoksi $\mathbb{C}$ tai Riemannin palloksi S^2.

10.4. Laajennettu kompleksitaso

Meromorfifunktioille olisi luontevaa antaa arvo ∞ niiden navoissa. Tämän täsmentämiseksi menetellään seuraavasti: Olkoon ∞ symboli, joka ei ole kompleksiluku (eikä myöskään laajennetun reaaliakselin $+\infty$ tai $-\infty$). Määritellään *laajennettu kompleksitaso* asettamalla

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Laajennettuun kompleksitasoon määritellään seuraavat laskutoimitukset

$$\begin{aligned} \infty \pm z := z \pm \infty &:= \infty, && \text{kun } z \in \mathbb{C} \\ \infty \cdot z := z \cdot \infty &:= \infty, && \text{kun } z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \\ \frac{z}{\infty} &:= 0, && \text{kun } z \in \mathbb{C} \\ \frac{z}{0} &:= \infty, && \text{kun } z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \end{aligned}$$

Huomaa, että seuraavia laskutoimituksia **ei määritellä**:

$$\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \infty \cdot 0, \quad 0 \cdot \infty$$

Perinteinen tapa laajennetun kompleksitason havainnollistamiseen on ajatella se kolmiulottisen avaruuden pallopintana, *Riemannin pallona* ($\rightarrow$ kuva 1): Olkoon

$$S^2 := \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 = 1\}.$$

Kompleksitaso $\mathbb{C}$ samaistetaan kolmiulottisen avaruuden xy-tasoksi, $\mathbb{C} = \{(x,y,0) \mid x + i\,y \in \mathbb{C}\}$. Samaistusta varten olkoon $N := (0,0,1)$ pallopinnan S^2 pohjoisnapa. Olkoot $P \in S^2\backslash\{N\}$ ja $\gamma(t) := (1-t)\,N + t\,P$ janapolku pohjoisnavalta N pisteeseen P. Kun janaa tarvittaessa jatketaan, se leikkaa kompleksitason $\mathbb{C}$ täsmälleen yhdessä pisteessä (HT)

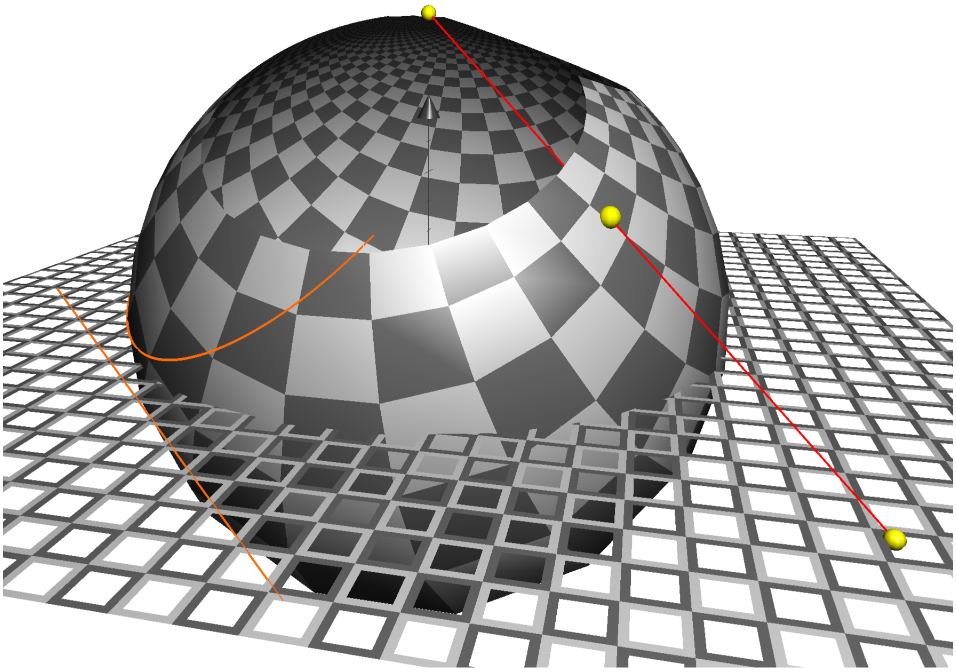
$$\pi(P) = \pi(u,v,w) = \Big(\frac{u}{1-w}, \frac{v}{1-w}, 0\Big).$$

Saatu kuvaus $\pi\colon S^2\backslash\{N\} \to \mathbb{C}$ on *stereografinen projektio* (*pohjoisnavan suhteen*). Kun vielä asetetaan $\pi(N) := \infty$, saadaan bijektio $\pi\colon S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$. Käänteiskuvauksella on lauseke (HT)

$$\pi^{-1}(z,0) = \Big(\frac{2\,\mathrm{Re}(z)}{|z|^2+1}, \frac{2\,\mathrm{Im}(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\Big).$$

Laajennetussa kompleksitasossa $\hat{\mathbb{C}}$ pisteen ∞ kiekkoympäristöksi asetetaan

$$B(\infty;r) := \{\infty\} \cup \big\{z \in \mathbb{C} \;\big|\; |z| > \tfrac{1}{r}\big\}.$$



Kuva 1. Stereografinen projektio pohjoisnavalta xy-taso.
Pohjoisnapa N, pallopinnan S^2 piste P ja sen projektiopiste $\pi(P)$ xy-tasossa on merkitty keltaisena.
Tason janan kuva pallopinnalla on ympyrä (kuvassa vasemmalla).

10.5. Möbius-kuvauksista

Määritelmä 10.15. Kuvausta $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$,

$$f(z) := \frac{a\,z + b}{c\,z + d},$$

missä $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$, $d \in \mathbb{C}$ ja $a\,d - b\,c \neq 0$, kutsutaan *Möbius-kuvaukseksi.*[3]
Tässä

$$\text{jos } c = 0, \text{ niin,} \quad f(z) := \begin{cases} \dfrac{a\,z+b}{d}, & \text{kun } z \in \mathbb{C} \\ \infty, & \text{kun } z = \infty \end{cases}$$

$$\text{jos } c \neq 0, \text{ niin,} \quad f(z) := \begin{cases} \dfrac{a\,z+b}{c\,z+d}, & \text{kun } z \in \mathbb{C}\setminus\{-d/c\} \\ \infty, & \text{kun } z = -d/c \\ \dfrac{a}{c}, & \text{kun } z = \infty \end{cases}$$

Lukijalle jätetään harjoitustehtäväksi osoittaa:

Lause 10.16. *Möbius-kuvaus $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ on homeomorfismi ja konformikuvaus joukossa $\mathbb{C}\setminus\{-d/c\}$, jos $c \neq 0$, ja koko kompleksitasossa, jos $c = 0$.* □

[3] August Ferdinand Möbius (1790–1868), Saksa. Englanninkielessä Möbius-kuvauksista eli *Möbius-muunnoksista* käytetään myös nimityksiä homographic transformation, linear fractional transformation ja linear transformation.

Lause 10.17. *Möbius-kuvausten joukko*

$$\mathcal{M} := \{f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \mid f \text{ on Möbius-kuvaus}\}$$

muodostavat ryhmän, jossa laskutoimituksena on kuvausten yhdistäminen. □

Huomautus 10.18. Kompleksiset 2×2-matriisit

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \text{joille} \quad \det A \neq 0,$$

ja Möbius-kuvaukset

$$f_A(z) := \frac{a\,z + b}{c\,z + d},$$

vastaavat toisiaan niin, että jokaista matriisia

$$\lambda\,A = \begin{bmatrix} \lambda\,a & \lambda\,b \\ \lambda\,c & \lambda\,d \end{bmatrix},$$

missä $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, vastaa kuvaus

$$f_{\lambda\,A}(z) = f_A(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}.$$

Bijektiivinen vastaavuus saadaan rajoittamalla 2×2-matriiseja vaatimalla, että $\det A = 1$ (HT; päättelyä auttaa havainto: $f_{A\,B} = f_A \circ f_B$).

Huomautus 10.19 (Yksinkertaiset Möbius-kuvaukset). Kolme yksinkertaisinta Möbius-kuvaustyyppiä on:

- *siirto* $z \mapsto z + z_0$;
- *kompleksinen skaalaus* eli kuvaus $z \mapsto \lambda\,z$, missä $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$;
- *inversio* $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Jos $|\lambda| = 1$, kuvaus $z \mapsto \lambda\,z$ on *kierto*. Jos $\lambda > 0$, kuvaus $z \mapsto \lambda\,z$ on *dilaatio*; *venytys*, jos $\lambda > 1$, ja *kutistus*, jos $\lambda < 1$. Yleinen tapaus on kierron ja dilaation yhdistetty kuvaus: $\lambda\,z = |\lambda|\,\frac{\lambda}{|\lambda|}\,z$.

Siirto ja skaalaus säilyttävät pisteen ∞ paikoillaan. Inversio vaihtaa pisteet 0 ja ∞ keskenään ja kuvaa origokeskisen yksikköympyrän kehän itselleen. Yksikköympyrän kehällä inversio on peilaus x-akselin suhteen.

Lause 10.20. *Jokainen Möbius-kuvaus on yhdistetty kuvaus siirrosta $z \mapsto z + w$, kuvauksesta $z \mapsto \lambda\,z$, missä $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, ja inversiosta $z \mapsto \frac{1}{z}$,*

Todistus. Väite seuraa identiteetistä

$$\frac{a\,z + b}{c\,z + d} = \begin{cases} \dfrac{b\,c - a\,d}{c^2\,(z + d/c)} + \dfrac{a}{c}, & \text{jos } c \neq 0 \\ \dfrac{a}{d}\,z + \dfrac{b}{d}, & \text{jos } c = 0 \end{cases}$$ □

Yleistetty ympyrä on kompleksitason ympyrä, tai suora, johon on lisätty äärettömyyspiste.

Lause 10.21. *Möbius-kuvaukset kuvaavat yleistetyt ympyrät yleistetyiksi ympyröiksi.*

TODISTUS. Kompleksitason suorat ovat muotoa

$$\text{(S)} \qquad B\,z + \overline{B}\,\overline{z} + c = 0, \quad \text{missä } B \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \text{ ja } c \in \mathbb{R},$$

olevien yhtälöiden ratkaisujoukkoja (sijoita yhtälöön $a\,x + b\,y + c = 0$ muuttuja $z = x + i\,y$, jolloin $2B = a - i\,b$). Vastaavasti ympyrän

$$|z - z_0| = r$$

yhtälö saadaan muotoon

$$\text{(Y)} \qquad z\overline{z} + \overline{B}\,z + B\,\overline{z} + c = 0,$$

missä $B = -z_0 \in \mathbb{C}$, $c = |B|^2 - r^2 \in \mathbb{R}$ ja $c < |B|^2$..

Selvästi suorat säilyvät suorina ja ympyrät ympyröinä kuvauksissa $z \mapsto z + z_0$ ja $z \mapsto \lambda\,z$.

Jos z on suoralla (S), niin sen kuvapiste $w := 1/z$ inversiossa toteuttaa yhtälön

$$B\,\overline{w} + \overline{B}\,w + c\,w\,\overline{w} = 0.$$

Jos $c = 0$, tämä on origon kautta kulkevan suoran yhtälö, muussa tapauksessa se on ympyrän yhtälö (säde $= |B|/|c|$ ja keskipiste $= -B/c$; kaava (Y)).

Jos z on ympyränkehällä (Y), niin sen kuvapiste $w := 1/z$ inversiossa toteuttaa yhtälön

$$1 + \overline{B}\,\overline{w} + B\,w + c\,w\,\overline{w} = 0.$$

Jos $c = 0$, tämä on suoran yhtälö, muussa tapauksessa se on ympyrän yhtälö. $\square$

SEURAUS 10.22. *Jos A on avoin kiekko, suljetun kiekon ulkopuoli tai suoran määräämä avoin puolitaso, niin sen kuva $f(A)$ Möbius-kuvauksessa f on myös jokin mainittua tyyppiä oleva avoin joukko.* $\square$

LAUSE 10.23. *Möbius-kuvauksella $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, joka ei ole identtinen kuvaus, on joko yksi tai kaksi kiintopistettä z_0, t.s. pistettä $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$, jolle $f(z_0) = z_0$.*

TODISTUS. Möbius-kuvauksen kiintopisteet ovat toisen asteen yhtälön

$$z = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}$$

ratkaisuja. Yksityiskohdat jätetään lukijalle (muista huomioida tapaus $z = \infty$). $\square$

LAUSE 10.24. *Olkoot $\{z_1, z_2, z_3\}$ ja $\{w_1, w_2, w_3\}$ kaksi kolmen laajennetun kompleksitason $\hat{\mathbb{C}}$ eri pisteen joukkoa. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi Möbius-kuvaus $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, jolle*

$$f(z_1) = w_1, \quad f(z_2) = w_2 \quad \text{ja} \quad f(z_3) = w_3.$$

TODISTUS. Oletetaan aluksi, että $w_1 = 1$, $w_2 = 0$ ja $w_3 = \infty$. Tällöin kuvaukseksi f käy (HT)

$$f(z) := \frac{(z - z_2)\,(z_1 - z_3)}{(z - z_3)\,(z_1 - z_2)}.$$

Oletetaan, että myös Möbius-kuvaukselle g on $g(z_j) = w_j$, $j \in \{1, 2, 3\}$. Tällöin Möbius-kuvaukselle $f \circ g^{-1}$ on $(f \circ g^{-1})(1) = 1$, $(f \circ g^{-1})(0) = 0$ ja $(f \circ g^{-1})(\infty) = \infty$, joten edellisen lauseen nojalla $f \circ g^{-1}$ on identtinen kuvaus, jolloin $g = f$.

Kun $w_1 \in \hat{\mathbb{C}}$, $w_2 \in \hat{\mathbb{C}}$ ja $w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ ovat mielivaltaiset keskenään eri pisteet, valitaan ensin Möbius-kuvaukset g ja h, joille $g(w_1) = 1 = h(z_1)$, $g(w_2) = 0 = h(z_2)$ ja

$g(w_3) = \infty = h(z_3)$. Tällöin $g^{-1}(1) = w_1$, $g^{-1}(0) = w_2$ ja $g^{-1}(\infty) = w_3$, joten kuvauksella $f := g^{-1} \circ h$ on haluttu ominaisuus. □

MÄÄRITELMÄ 10.25. Olkoot $z_1 \in \hat{\mathbb{C}}$, $z_2 \in \hat{\mathbb{C}}$, $z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ ja $z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ neljä eri pistettä. Luku

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] := \frac{(z_4 - z_2)\,(z_1 - z_3)}{(z_4 - z_3)\,(z_1 - z_2)}$$

on *pisteiden z_1, z_2, z_3 ja z_4 kaksoissuhde.*

HUOMAUTUS. Kaksoissuhde on Möbius-kuvauksia käsittelevässä kirjallisuudessa standardikäsite. Sen määrittelevä kaava sen sijaan ei ole standardoitunut. Tähän valitun kaksoissuhteen määräämä kuvaus $z \mapsto [z_1, z_2, z_3, z]$ vie siis pisteet z_1, z_2 ja z_3 pisteiksi 1, 0 ja ∞, ja on myös ainoa, jolla tämä ominaisuus on.

LAUSE 10.26. *Olkoot $z_1 \in \hat{\mathbb{C}}$, $z_2 \in \hat{\mathbb{C}}$, $z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ ja $z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ neljä eri pistettä ja $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ Möbius-kuvaus. Tällöin*

$$[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4].$$

TODISTUS. Olkoon $g(z) := [z_1, z_2, z_3, z]$ se Möbius-kuvaus, jolle $g(z_1) = 1$, $g(z_2) = 0$ ja $g(z_3) = \infty$. Tällöin kuvakselle $g \circ f^{-1}$ on

$$(g \circ f^{-1})(f(z_1)) = 1, \quad (g \circ f^{-1})(f(z_2)) = 0 \quad \text{ja} \quad (g \circ f^{-1})(f(z_3)) = \infty.$$

Toisaalta, myös kuvauksella $w \mapsto [f(z_1), f(z_2), f(z_3), w]$ on samat ominaisuudet. Yksikäsitteisyyden nojalla

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = g(z_4) = (g \circ f^{-1})(f(z_4)) = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)]. \qquad \square$$

HUOMAUTUS. Edellinen lause tarjoaa helpon menetelmän määrätä Möbius-kuvaus f, joka kuvaa annetut kolme eri pistettä z_1, z_2 ja z_3 kolmelle eri pisteelle w_1, w_2 ja w_3: Ratkaistaan $f(z)$ yhtälöstä

$$[w_1, w_2, w_3, f(z)] = [z_1, z_2, z_3, z].$$

ESIMERKKI 10.27. Määrätään Möbius-kuvaus f, jolle $f(1) = 1$, $f(0) = 0$ ja $f(2) = i$. Käytetään yhtälöä

$$[1, 0, i, f(z)] = [1, 0, 2, z] \quad \text{eli} \quad \frac{(f(z) - 0)\,(1 - i)}{(f(z) - i)\,(1 - 0)} = \frac{(z - 0)\,(1 - 2)}{(z - 2)\,(1 - 0)}.$$

Ratkaisuksi saadaan

$$f(z) = \frac{i\,z}{(2 - i)\,z - 2 + 2\,i}.$$

Lauseen 10.21 ja sen seurauksen nojalla f kuvaa reaaliakselin ympyränkehälle C, jonka määrää pisteet 1, 0 ja i. Koska $f(-i) = -1/3$ on ympyränkehän C ulkopuolella, kuvaa f ylemmän puolitason ympyränkehän C sisäpuoleksi $= B(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}; 1/\sqrt{2})$.

Olkoon $C := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$ piste z_0-keskinen, r-säteinen ympyränkehä. *Pisteen $z \in \hat{\mathbb{C}}$ heijastuspiste kehän C suhteen* on

$$z^* = \begin{cases} z_0 + \dfrac{r^2}{\overline{z} - \overline{z}_0}, & \text{jos } z \notin \{z_0, \infty\} \\ \infty, & \text{jos } z = z_0 \\ z_0, & \text{jos } z = \infty \end{cases}$$

Sanotaan, että *pisteet z ja z^* ovat symmetrisiä ympyränkehän C suhteen.*

LAUSE 10.28. *Pisteet z ja w ovat symmetrisiä ympyränkehän C suhteen, jos ja vain jos*

$$[w, z_1, z_2, z_3] = \overline{[z, z_1, z_2, z_3]} \quad \textit{kaikille } z_1 \in C,\ z_2 \in C \textit{ ja } z_3 \in C.$$

TODISTUS. Kun $z = z_0 + r\,e^{i\theta} \in C$, on $z^* = z$ (HT). Erityisesti siis $z_j^* = z_j$. Pisteen z heijastuspisteelle z^* on siis

$$z^* - z_j = z^* - z_j^* = \frac{r^2\,(\overline{z}_j - \overline{z})}{\overline{z} - \overline{z}_0}.$$

Tästä saadaan (HT)

$$[z^*, z_1, z_2, z_3] = \overline{[z, z_1, z_2, z_3]}.$$

Käänteisen puolen todistus jätetään lukijalle. □

SEURAUS 10.29. *Olkoot f Möbius-kuvaus ja C yleistetty ympyrä. Tällöin ympyrän C suhteen symmetristen pisteiden z ja z^* kuvapisteet $f(z)$ ja $f(z^*)$ ovat symmetrisiä yleistetyn ympyrän $f(C)$ suhteen.* □

ESIMERKKI 10.30. Määrätään Möbius-kuvaus f, joka kuvaa yksikkökiekon $B(0;1)$ itselleen, ja jolle $f(0) = 0$ ja $f(1) = i$.

Origon symmetrinen piste ympyränkehän $\partial B(0;1)$ suhteen on ∞. Koska $f(0) = 0$, pysyy origon heijastuspiste ∞ paikallaan eli $f(\infty) = \infty$. Siis

$$[i, 0, \infty, f(z)] = [1, 0, \infty, z],$$

josta

$$\frac{f(z)}{i} = \frac{z}{1} \quad \text{eli} \quad f(z) = i\,z.$$

10.6. Möbius-kuvaukset konformikuvauksina

LAUSE 10.31. *Olkoot $z_0 \in B(0;1)$ ja $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$. Tällöin Möbius-kuvaus f,*

$$f(z) := \lambda\,\frac{z - z_0}{1 - z\,\overline{z}_0}$$

määrää konformisen bijektion $f\colon B(0;1) \to B(0;1)$, jolle $f(z_0) = 0$.

TODISTUS. Kuvaus on muotoa $f(z) = \frac{a\,z+b}{c\,z+d}$, missä $a = \lambda$, $b = -\lambda\,z_0$, $c = -1$ ja $d = 1$. Siis $a\,d - b\,c = \lambda - \lambda\,|z_0|^2 = \lambda\,(1 - |z_0|^2) \neq 0$, joten f on Möbius-kuvaus.

Koska $f(z_0) = 0$, riittää tarkistaa, että $f(\partial B(0;1)) \subset \partial B(0;1)$. Kun $|z| = 1$, on

$$|f(z)| = |\lambda|\left|\frac{z - z_0}{1 - z\,\overline{z}_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{\left|\frac{z\,\overline{z}}{|z|^2} - z\,\overline{z}_0\right|} = \frac{|z - z_0|}{|z|\,|\overline{z} - \overline{z}_0|} = 1. \qquad \square$$

Palautetaan mieleen kurssilta CAn1:

LAUSE 10.32 (Schwarzin lemma). *Olkoon $f\colon B(0;1) \to \mathbb{C}$ holomorfinen funktio, jolle $f(0) = 0$ ja $|f(z)| \leqslant 1$ kaikille $z \in B(0;1)$. Tällöin*

$$|f'(0)| \leqslant 1 \quad \textit{ja} \quad |f(z)| \leqslant |z| \quad \textit{kaikille } z \in B(0;1).$$

Lisäksi, jos jollekin $z_0 \in B(0;1)$ on $|f(z_0)| = |z_0|$, on olemassa $\lambda \in \mathbb{C}$ siten, että $|\lambda| = 1$ ja

$$f(z) = \lambda\,z \quad \textit{kaikille } z \in B(0;1).$$

Todistus. Jätetään nytkin harjoitustehtäväksi; sovella maksimiperiaatetta funktioon

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & \text{kun } z \neq 0, \text{ ja} \\ f'(0), & \text{kun } z = 0. \end{cases}$$ □

Lause 10.33. *Olkoon $f\colon B(0;1) \to B(0;1)$ konforminen bijektio ja $z_0 = f^{-1}(0)$. Tällöin on olemassa $\lambda \in \mathbb{C}$ siten, että $|\lambda| = 1$ ja*

$$f(z) = \lambda \,\frac{z - z_0}{1 - z\,\overline{z}_0} \quad \textit{kaikille } z \in B(0;1).$$

Todistus. Olkoon

$$g(z) := \frac{z - z_0}{1 - z\,\overline{z}_0},$$

jolloin lauseen 10.31 nojalla g määrittelee konformikuvauksen kiekolta $B(0;1)$ itselleen. Lisäksi $g(z_0) = 0$. Tällöin $h := f \circ g^{-1}$ toteuttaa Schwarzin lemman ehdot, joten

$$|h(z)| \leqslant |z| \quad \text{kaikille } z \in B(0;1).$$

Myös $h^{-1} = g \circ f^{-1}$ toteuttaa Schwarzin lemman ehdot, joten

$$|h^{-1}(w)| \leqslant |w| \quad \text{kaikille } w \in B(0;1).$$

Siis, kun $z \in B(0;1)$ ja $w := h(z)$, on

$$|h(z)| \leqslant |z| = |h^{-1}(w)| \leqslant |w| = |h(z)|,$$

joten

$$|h(z)| = |z| \quad \text{kaikille } z \in B(0;1).$$

Schwarzin lemman nojalla on olemassa $\lambda \in \mathbb{C}$ siten, että $|\lambda| = 1$ ja

$$h(z) = \lambda\, z \quad \text{kaikille } z \in B(0;1).$$

Tällöin

$$f(z) = h(g(z)) = \lambda\, g(z) = \lambda\,\frac{z - z_0}{1 - z\,\overline{z}_0},$$

kuten väitettiin. □

Seuraus 10.34. *Olkoot B kiekko ja $f\colon B \to B$ konforminen bijektio. Tällöin f on Möbius-kuvauksen rajoittuma kiekkoon B.* □

Lause 10.35. *Olkoon $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kokonainen injektio. Tällöin olemassa $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ja $b \in \mathbb{C}$ siten, että*

$$f(z) = a\,z + b \quad \textit{kaikille } z \in \mathbb{C}.$$

Todistus. Osoitetaan aluksi, että f on polynomi.

Jos f ei ole polynomi, äärettömyyspiste on sen oleellinen erikoispiste. Tällöin origo on kuvauksen $z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$ oleellinen erikoispiste. Casoratin ja Weierstrassin lauseen nojalla $f(\mathbb{C}\backslash B(0;1))$ on tällöin tiheä kompleksitason osajoukko. Lauseen 10.9 nojalla $f(B(0;1))$ on avoin, joten

$$f(\mathbb{C}\backslash B(0;1)) \cap f(B(0;1)) \neq \varnothing.$$

Tällöin on olemassa pisteet $z_1 \in \mathbb{C}\backslash B(0;1)$ ja $z_2 \in B(0;1)$, joille $f(z_1) = f(z_2)$. Tämä on kuitenkin vastoin injektiivisyysoletusta. Siis f on polynomi.

Lauseen 10.8 nojalla f ei ole injektio, jos sen aste on suurempi kuin yksi. $\boxed{\mathbb{C}\text{An2}}$

Kirjallisuutta

[CAn1] Tero Kilpeläinen: *Kompleksianalyysi 1*, luentomuistiinpanoja keväälle 2015.
[CAn2] Antti Vähäkangas: *Kompleksianalyysi 2*, luentomuistiinpanoja keväälle 2015.

[1] Lars V. Ahlfors: *Comples analysis. An introduction to the the theory of analytic functions of one complex variable*, kolmas laitos, McGraw-Hill, 1979.

[2] Tom M. Apostol: *Mathematical analysis*, toinen laitos, viides painos (ensimmäinen painos 1974), Addison-Wesley, 1981.
Kommentteja: Kirjan ensimmäisessä laitoksessa (*Mathematical analysis. A modern approach to advanced calculus*, alunperin 1957) on vektorianalyysiä käsittelevä luku (ml. vektorikentän käyräintegraali ja Greenin lause), josta saatavia tuloksia käytetään Cauchyn lauseen todistamiseen. Cauchyn lauseen homotopiaversiota ei ole. Toisesta laitoksesta vektorianalyysiä käsittelevä luku on poistettu. Cauchyn lause käsitellään homotopian avulla. Käyräintegaalien käsittelyssä hyödynnetään kirjan luvun 7 Riemannin ja Stieltjesin integraalia. Kirjan kummassakin laitoksessa Cauchyn ja Riemannin yhtälö ja kompleksinen differentioituvuus käsitellään kirjan alussa, ja sarjateoria löytyy omasta luvustaan. Kompleksianalyysin käsittely on kaiken kaikkiaan suppean johdannon kaltainen.

[3] Richard Courant ja Fritz John: *Introduction to calculus and analysis, Volume II/2*, uusintapainos vuoden 1989 laitoksesta, Classics in Mathematics, Springer, 2000.
Kommentteja: Kirjassa on käytettävissä vektorianalyysi (ml. vektorikentän käyräintegraali ja Greenin lause), josta saatavia tuloksia käytetään Cauchyn lauseen todistamiseen. Homotopiaa ei käsitellä. Vain suppea johdanto kompleksianalyysiin.

[4] William R. Derrick: *Complex analysis and applications*, Wadsworth mathematics series, Wadsworth 1984.
Kommentteja: Cauchyn lauseen todistus perustetaan Greenin lauseeseen. Nimensä mukaisesti mukana kompleksianalyysin sovelluksia.

[5] Jean Dieudonné: *Infinitesimal calculus*, Hermann, Paris, 1971.
Kommentteja: Kirjasta reilu kolmannes käsittelee kompleksianalyysiä. Käsittely aloitetaan kompleksitermisillä potenssisarjoilla. Analyyttinen funktio tarkoittaa funktiota, joka voidaan lokaalisti esittää suppenevan potenssisarjan summana. Moniarvoisia funktioita kirjassa ei käytetä. Alunperin julkaistu ranskankielisenä *Calcul infinitésimal*, Hermann, Paris, 1968.

[6] Jean Dieudonné: *Foundations of modern analysis*, kolmas (laajennettu ja korjattu) painos, Academic Press, 1969.
Kommentteja: Tunnetaan myös nimellä *Treatise on analysis 1*; ranskankielinen käännös *Fondements de l'analyse moderne* tai *Éléments d'analyse 1*. Kompleksianalyysi käsitellään potenssisarjalähtöisesti usean kompleksisen muuttujan funktioille (eli $f\colon G \to E$, missä $G \subset \mathbb{C}^n$ ja E on kompleksinen Banachin avaruus; kursseilla CAn1+2 on $n = 1$ ja $E = \mathbb{C}$).

[7] Eberhard Freitag ja Rolf Busam: *Complex analysis*, toinen laitos, Universitext, Springer, 2009.
Kommentteja: Vaikuttaa kurssille varsin hyvin sopivalta. Kirjan jälkimmäinen puoli suuntautuu ns. analyyttiseen lukuteoriaan. Kirjalle on Eberhard Freitagin kirjoittama jatko-osa *Complex analysis 2. Riemann surfaces, several complex variables, Abelian functions, higher modular forms*, Universitext, Springer, 2011.

[4]Viimeksi muutettu 3.1.2020.

[8] Theodore W. Gamelin: *Complex analysis*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2001.
Kommentteja: ”Moniarvoisia funktioita” käytetään varsin vapaamielisesti. Cauchyn integraalilauseen käsitely perustuu Greenin lauseeseen.

[9] Kunihiko Kodaira: *Complex analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 107, Cambridge University Press, 2007.
Kommentteja: Kirjan *analyyttinen funktio* voi olla moniarvoinen; sen sijaan *holomorfinen funktio* on yksiarvoinen. Painovirheitä kirjasta löytyy melko paljon. Cauchyn integraalilause todistetaan melko yleisille alueille, joiden ominaisuuksien selvittelyyn uhrataan 27 sivua. Hieman vaille puolet kirjasta käsittelee ns. Riemannin pintoja ja kompleksianalyysiä niillä määritellyille funktioille ja differentiaalimuodoille.

[10] Serge Lang: *Undergraduate analysis*, toinen laitos, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1997 (korjattu neljäs painos 2005). (Edelliset laitokset *Analysis I*, Addison-Wesley, 1968; *Undergraduate analysis*, Springer, 1983.)
Kommentteja: Yhden ja usean reaalimuuttujan funktioiden analyysin oppikirja. Kirjaan on hyvä tutustua ennen saman kirjoittajan kompleksianalyysin kirjaan [**11**] tutustumista.

[11] Serge Lang: *Complex analysis*, neljäs laitos, Graduate Texts in Mathematics 103, Springer, 1999. (Edelliset laitokset Addison-Wesley, 1977; toinen laitos, Springer, 1985; kolmas laitos, Springer, 1993.)
Kommentteja: Kompleksianalyysin kurssille kohtalaisesti sopivaa oheislukemistoa. Asioiden käsittelyjärjestys poikkeaa kurssista (esimerkiksi potenssisarjat kästiellään jo kirjan toisessa luvussa, kun CAn-kursseilla ne jäävät jälkimmäiseen osaan. Potenssisarjateoria aloitetaan tutustumalla ns. muodollisiin potenssisarjoihin). Kirjan terminologiassa *käyrä* (engl. *curve*) tarkoittaa samaa kuin kurssin *polku* (engl. *path*). Kirjan *path* puolestaan on paloittain jatkuvasti differentioituva polku (ja käytetty merkintä huono).

[12] Jaqueline Lelong-Ferrand ja Jean-Marie Arnaudiès : *Cours de mathématiques. Tome 2. Analyse*, 4$^{\mathrm{e}}$ édition, Dunod, 1977.
Kommentteja: Erityisen huolellisesti kirjoitettu perusanalyysin kirja. Kompleksiset funktiot näyttäytyvät vain potenssisarjoina (*analyyttisinä funktioina*).

[13] Jaqueline Lelong-Ferrand ja Jean-Marie Arnaudiès : *Cours de mathématiques. Tome 4. Equations différentielles, intégrales multiples, fonctions holomorphes*, 2$^{\mathrm{e}}$ édition, Dunod, 1977.
Kommentteja: Sisältö on hieman kirjava. Kompleksianalyysiin liittyvää asiaa varsin vähän, ja Cauchyn integraalilause perustuu niteessä aiemmin käsiteltyyn Greenin lauseeseen.

[14] Rolf Nevanlinna ja Veikko Paatero: *Funktioteoria*, Otava, 1971.
Kommentteja: Vanhahtava; perustelut osin heuristisia ja kaipaavat täsmentämistä.

[15] Tristan Needham: *Visual complex analysis*, Oxford University Press, 1997.
Kommentteja: Nimensä mukainen. Derivaatta määritellään vasta melko myöhään.

[16] Walter Rudin: *Real and complex analysis*, toinen laitos, Tata McGraw-Hill, 1979.
Kommentteja: Kirjassa käsitellään sujuvasti rinnakkain mitta- ja integraaliteorian, funktionaalianalyysin ja kompleksianalyysin asioita. Tutustumisen arvoinen kirja.

[17] Michael Spivak *Calculus*, kolmas laitos, Cambridge University Press, 1994.
Kommentteja: Erinomaisen luettava yhden muuttujan funktioiden analyysin oppikirja (eikä siis varsinaisesti otsikkonsa mukaisen ”peruscalculuksen”). Luvun IV sarjateoria ja kompleksilukujen ja kompleksifunktioiden käsittely on hyvää johdatusta kompleksianalyysin kurssiin. Algebran peruslause todistetaan hyvin yksinkertaisin apuvälinein.

[18] John Stillwell: *Mathematics and its history*, toinen laitos, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2002 (kolmas laitos 2010).
Kommentteja: Kompleksianalyysin kurssiin liittyvät luvut **14** Complex Numbers in Algebra, **15** Complex Numbers and Curves, ja **16** Complex Numbers and Functions.

[19] Elias Wegert: *Visual complex functions. An introduction with phase portraits*, Birkhäuser, 2012.
Kommentteja: Faasin käyttäminen kuvien väritysperiaatteena vaatii kuvien lukutaitoa. Kirjan esitys on muutenkin vaativa (mm. funktion analyyttisyys määritellään potenttisarjaesityksen avulla).