Banach-avaruudet 2026

Harjoitus 7

deadline: 11.5.2026, klo 12:00

Ex 7.1: Olkoon E refleksiivinen Banach-avaruus ja $V \subset E$ suljettu vektorialiavaruus. Osoita, että V on refleksiivinen.

Ex 7.2: Olkoon E Banach-avaruus ja $\mathcal{F}$ kokoelma alhaalta puolijatkuvia funktioita $E \mapsto (-\infty, \infty]$. Osoita, että

$$g(x) = \sup_{f \in \mathcal{F}} f(x)$$

määrittelee alhaalta puolijatkuvan funktion $E \mapsto (-\infty, \infty]$.

Ex 7.3: Olkoon E Banach-avaruus ja $\mathcal{F}$ kokoelma konvekseja funktioita $E \mapsto (-\infty, \infty]$. Osoita, että

$$g(x) = \sup_{f \in \mathcal{F}} f(x)$$

määrittelee konveksin funktion $E \mapsto (-\infty, \infty]$.

Ex 7.4: Olkoon E Banach-avaruus ja $(x_n)_n \subset E$. Osoita, että

$$C_n := \overline{\left\{ \sum_{i=n}^{N} t_i x_i \, : \, \sum_{i=n}^{N} t_i = 1, t_i \geq 0, N \in \mathbb{N} \right\}}.$$

on konveksi.

Ex 7.5: Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu avoin konveksi joukko ja $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja konveksi. Osoita, että $F \colon f \mapsto \int_\Omega g(f(x))\, dx$ on alhaalta puolijatkuva $L^2(\Omega)$:n vahvassa topologiassa.

Ex 7.6: Olkoon F kuten tehtävässä 2. Osoita, että F:llä on minimoija joukossa $\{f \in L^2(\Omega) \, : \, \|f\|_2 = 1\}$.