Banach-avaruudet 2026
Harjoitus 6
deadline: 4.5.2026, klo 12:00

Ex 6.1: Olkoon E äärellisulotteinen. Osoita, että $E^* = E^\dagger$.

Ex 6.2: Olkoon E normiavaruus jonka duaali E^* on separoituva. Onko tällöin E separoituva?

Ex 6.3: Olkoon E separoituva normiavaruus. Onko tällöin duaali E^* separoituva?

Ex 6.4: Osoita, että Banach-avaruus E on refleksiivinen jos ja vain jos sen duaali E^* on refleksiivinen.

Ex 6.5: Osoita, että on olemassa sellainen $x^* \in \mathcal{L}(\ell^\infty, \mathbb{R})$, että $||x^*|| = 1$ ja

$$x^*(x) = \lim_{k\to\infty} x_k$$

kaikilla

$$x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c = \{(x_k) : \lim_{k\to\infty} x_k \text{ on olemassa}\},$$

missä c on ℓ^∞:n suljettu vektorialiavaruus $||\cdot||_\infty$-normilla varustettuna.

Ex 6.6: Olkoon E Banach-avaruus, $M \subset E$ suljettu aliavaruus ja $S \in \mathcal{L}(M, \ell^\infty)$. Osoita, että on olemassa $T \in \mathcal{L}(E, \ell^\infty)$ siten, että $Tx = Sx$ kaikilla $x \in M$ ja $||T|| = ||S||$.