

Seuraus 5.7. Ääretönulotteisessa Banach-avaruudessa X jokainen $U \in \sigma(X, X^*) \setminus \{\emptyset\}$ on rajoittamaton.

Todistus. Koska $U \neq \emptyset$, on Lemman 5.6 nojalla on olemassa äärellinen $F \subset X^*$, $x \in X$ ja $\varepsilon > 0$ siten, että

$$U_{F,\varepsilon,x} = \bigcap_{x^* \in F} \{y \in X : |\langle y - x, x^* \rangle| < \varepsilon\} \subset U.$$

Erityisessti

$$V_{F,x} := \bigcap_{x^* \in F} \{y \in X : \langle y - x, x^* \rangle = 0\} = x + \bigcap_{x^* \in F} \{y \in X : \langle y, x^* \rangle = 0\} \subset U,$$

missä

$$\bigcap_{x^* \in F} \{y \in X : \langle y, x^* \rangle = 0\}$$

on ääretönulotteinen X :n vektorialiavaruus (koska X on ääretönulotteinen). Niinpä $V_{F,x}$ ja siten U on rajoittamaton. \square

Lemma 5.8. Olkoon X Banach-avaruus ja $(x_n)_n \subset X$, $x \in X$ siten, että $x_n \rightarrow x$. Tällöin $\sup_n \|x_n\| < \infty$ ja $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$.

Todistus. Olkoon $J: X \rightarrow X^{**}$ kanoninen upotus ja $L_n = J(x_n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jokaiselle $x^* \in X^*$ pätee $\langle x^*, L_n \rangle = \langle x_n, x^* \rangle \rightarrow \langle x, x^* \rangle$, kun $n \rightarrow \infty$. Erityisesti $(\langle x^*, L_n \rangle)_n$ on rajoitettu. Banach-Steinhausin lauseen 2.3 nojalla $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|L_n\|_{X^{**}} < \infty$. Koska $\|L_n\|_{X^{**}} = \|x_n\|_X$, on lemmän ensimmäinen väite todistettu.

Toisen väitteen todistamiseksi huomataan ensin, että kaikille $x^* \in X^*$ pätee

$$|\langle x_n, x^* \rangle| \leq \|x^*\|_{X^*} \|x_n\|_X,$$

joten

$$|\langle x_n, x^* \rangle| \leq \|x^*\|_{X^*} \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X.$$

Seurauksen 4.9 ja yllä olevan nojalla

$$\|x\|_X = \sup_{x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1} |\langle x, x^* \rangle| \leq \sup_{x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1} \|x^*\|_{X^*} \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X.$$

\square

Lemma 5.9. Banach-avaruus X on ääretönulotteinen jos ja vain jos $\sigma(X, X^*) \neq \tau_X$.

Todistus. Oletetaan ensin, että X on äärellisulotteinen. Olkoon $e_1, \dots, e_n \in X$ avaruuden X kanta siten, että $\|e_i\|_X = 1$ kaikilla i . Jos $x \in X$, on olemassa yksikäsitteiset $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ siten, että

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Kaikille i on kuvaus $x_i^*: x \mapsto x_i$ lineaarinen ja jatkuva. Valitsemalla $F = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$, on kaikille $x \in U_{F, \frac{1}{n}, \bar{0}}$ voimassa

$$\|x\|_X = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|_X \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\|_X = \sum_{i=1}^n |x_i| = \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i^* \rangle| < 1.$$

Niinpä $U_{F, \frac{1}{n}, \bar{0}} \subset B_X(\bar{0}, 1)$. Tästä seuraa, että $\tau_X \subset \sigma(X, X^*)$. Koska aina $\sigma(X, X^*) \subset \tau_X$, on $\sigma(X, X^*) = \tau_X$.

Oletetaan sitten, että X on ääretönulotteinen. Tällöin Seurauksen 5.7 nojalla jokainen $U \in \sigma(X, X^*) \setminus \{\emptyset\}$ on rajoittamaton. Kuitenkin $\emptyset \neq B_X(\bar{0}, 1) \in \tau_X$ ja $B_X(\bar{0}, 1)$ on rajoitettu. Siten $\sigma(X, X^*) \neq \tau_X$. \square

5.3. Konveksit joukot heikossa topologiassa. Muistutuksena, että vektoriavaruuden X joukko $C \subset X$ on konvekksi, jos kaikilla $x, y \in C$ ja $t \in (0, 1)$ on $tx + (1 - t)y \in C$.

Määritelmä 5.10. Olkoon X normiavaruus, $U \subset X$ avoin konvekksi joukko siten, että $\bar{0} \in U$. Tällöin *Minkowskin funktionaali* on kuvaus

$$p_U: X \rightarrow [0, \infty): x \mapsto \inf\{\lambda > 0 : \lambda^{-1}x \in U\}.$$

Seminormia yleisempi käsite on sublineaarisuus. Kuvaus $p: X \rightarrow [0, \infty)$ on *sublineaarinen*, jos se toteuttaa kolmioepäyhtälön $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ ja kaikille $\lambda > 0$ on $\lambda p(x) = p(\lambda x)$.

Lemma 5.11. *Olkoon X normiavaruus, $U \subset X$ avoin konvekksi joukko siten, että $\bar{0} \in U$. Tällöin Minkowskin funktionaali p_U on sublineaarinen ja sille pätee lisäksi $U = \{x \in X : p_U(x) < 1\}$ ja $p_U(x) \leq M\|x\|$, missä $1/M = \sup\{r > 0 : B(\bar{0}, r) \subset U\}$.*

Todistus. Olkoon $x \in X$ ja $\eta > 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} p_U(\eta x) &= \inf\{\lambda > 0 : \lambda^{-1}\eta x \in U\} = \inf\{\eta\lambda > 0 : (\eta\lambda)^{-1}\eta x \in U\} \\ &= \eta \inf\{\lambda > 0 : \lambda^{-1}x \in U\} = \eta p_U(x). \end{aligned}$$

Olkoon $x, y \in X$ ja $\lambda, \eta > 0$ siten, että $\lambda^{-1}x, \eta^{-1}y \in U$. Tällöin joukon U konveksisuuden perusteella

$$\frac{x + y}{\lambda + \eta} = \frac{\lambda}{\lambda + \eta} \frac{x}{\lambda} + \frac{\eta}{\lambda + \eta} \frac{y}{\eta} \in U.$$

Niinpä

$$p_U(x + y) \leq p_U(x) + p_U(y).$$

Näin ollen p_U on sublineaarinen.

Olkoon $x \in X$ siten, että $p_U(x) < 1$. Tällöin on olemassa $0 < \lambda < 1$ siten, että $\lambda^{-1}x \in U$. Koska U on konvekksi ja $\bar{0} \in U$, on myös $x \in U$. Oletetaan seuraavaksi, että $y \in U$. Koska U on avoin, on olemassa $\lambda < 1$ siten, että myös $\lambda^{-1}y \in U$. Niinpä $p_U(y) < 1$. Saimme siis osoitettua $U = \{x \in X : p_U(x) < 1\}$.

Olkoon $\varepsilon > 0$ pieni ja $r > 0$ siten, että $B(\bar{0}, r + \varepsilon) \subset U$, $x \in X$ ja $\lambda > 0$ siten, että $\lambda^{-1}x \in U$ ja $\|\lambda^{-1}x\| \geq r$. Tällöin

$$p_U(x) \leq \lambda \leq \frac{1}{r}\|x\|.$$

Tästä seuraa viimeinen väite $p_U(x) \leq M\|x\|$. \square

Lemma 5.12. *Olkoon X normiavaruus, $C \subset X$ konvekksi ja $x \in X \setminus C$ siten, että $\text{dist}(x, C) > 0$. Tällöin on olemassa $x^* \in X^*$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ siten, että $\langle y, x^* \rangle > \lambda > \langle x, x^* \rangle$ kaikilla $y \in C$.*

Todistus. Olkoon $r = \frac{1}{2} \text{dist}(x, C) > 0$. Otetaan mielivaltainen $y \in C$. Tällöin $U = C - B(y, r)$ on avoin konvekksi joukko siten, että $\bar{0} \in U$ ja $\text{dist}(x - y, U) > r$. Lemman 5.11 nojalla p_U on sublineaarinen ja toisaalta lineaarinen kuvaus

$$f: \text{span}(x - y) \rightarrow \mathbb{R}: t(x - y) \mapsto t$$

toteuttaa $f \leq p_U$. Hahn-Banachin lauseen todistus toimii myös siinä tapauksessa, että p on pelkästään sublineaarinen, joten Lauseen 2.3 nojalla f voidaan laajentaa halutuksi x^* . (Lemman 5.12 $p_U(x) \leq M\|x\|$, niin saatu jatko x^* on jatkuva.) \square

Lemma 5.13. *Banach avaruuden konvekksi joukko on suljettu vahvassa topologiassa jos ja vain jos se on suljettu heikossa topologiassa.*

Todistus. Olkoon X Banach avaruus ja $C \subset X$ konvekksi. Jos C on heikosti suljettu, on $X \setminus C \in \sigma(X, X^*) \subset \tau_X$ ja siten C on myös vahvasti suljettu.

Oletetaan seuraavaksi, että C on vahvasti suljettu. Olkoon $x \in X \setminus C$. Tällöin Lemman 5.12 on olemassa sellainen $x^* \in X^*$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$, että $\langle y, x^* \rangle > \lambda > \langle x, x^* \rangle$ kaikilla $y \in C$. Siten

$$x \in U := \{y \in X : \langle y, x^* \rangle < \lambda \in \sigma(X, X^*)\}$$

ja $U \subset X \setminus C$. Niinpä $X \setminus C \in \sigma(X, X^*)$ ja siten C on suljettu topologiassa $\sigma(X, X^*)$. \square

Lause 5.14 (Mazurin lemma). *Olkoon X Banach-avaruus ja $(x_n)_n \subset X$, $x \in X$ siten, että $x_n \rightarrow x$. Tällöin on olemassa jonon $(x_n)_n$ äärellisten konveksien kombinaatioiden jono $(y_n)_n$ (eli $y_n = \sum_{i=1}^{N_n} \lambda_{n,i} x_i$, $0 \leq \lambda_{n,i} \leq 1$ ja $\sum_i \lambda_{n,i} = 1$), joka suppenee vahvasti.*

Todistus. Jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ määritellään konvekksi (vahvasti) suljettu joukko

$$C_n := \overline{\left\{ \sum_{i=1}^N t_i x_i : \sum_{i=1}^N t_i = 1, t_i \geq 0, N \in \mathbb{N} \right\}}.$$

Lemman 5.13 nojalla C_n on myös heikosti suljettu. Koska $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, on haluttu jono $(y_n)_n$ siten olemassa. \square

5.4. Heikko* topologia.

Määritelmä 5.15. Olkoon X Banach-avaruus. Tällöin duaaliavaruuden X^* heikko* topologia $\sigma(X^*, X)$ on karkein kuvausjoukon $\{J(x) : x \in X\}$ indusoima topologia, missä J on kappa-leessa 1 mainittu kanoninen kuvaus

$$J: X \rightarrow X^{**}: x \mapsto J_x,$$

missä

$$J_x: X^* \rightarrow \mathbb{K}: x^* \mapsto \langle x, x^* \rangle.$$

Jonon $(x_n^*)_n \subset X^*$ heikko* suppenemista kuvaukseen $x^* \in X^*$ merkitään $x_n^* \xrightarrow{*} x^*$.

Koska $J(X) \subset X^{**}$, on

$$\sigma(X^*, X) \subset \sigma(X^*, X^{**}) \subset \tau_{X^*}.$$

Banach-avaruus X on refleksiivinen (eli $J(X) = X^{**}$) jos ja vain jos $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$.

Lause 5.16 (Banach-Alaoglu). *Olkoon X Banach avaruus. Tällöin suljettu yksikköpallo $\overline{B}_{X^*} \subset X^*$ on kompakti heikko* topologiassa.*

Todistus. (ohitetaan) \square

Todistetaan seuraavaksi erikoistapaus Banach-Alaoglun lauseesta.

Lause 5.17. *Olkoon X separoituva Banach-avaruus ja $(x_n^*)_n \subset X^*$ rajoitettu. Tällöin on olemassa osajono $(x_{n_i}^*)_i$ ja $x^* \in X^*$ siten, että $x_{n_i}^* \xrightarrow{*} x^*$.*

Todistus. Merkitään $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\|_{X^*}$. Olkoon $(v_n)_n \subset X$ tiheä joukko. Koska $(x_n^*)_n$ on rajoitettu, on $(\langle v_1, x_n^* \rangle)_n \in \mathbb{K}$ rajoitettu. Niinpä on olemassa osajono $(n_{1,i})_i$ siten, että $\langle v_1, x_{n_{1,i}}^* \rangle \rightarrow L(v_1)$, kun $i \rightarrow \infty$. Edelleen jonolla $(n_{1,i})_i$ on osajono $(n_{2,i})_i$ siten, että $\langle v_2, x_{n_{2,i}}^* \rangle \rightarrow L(v_2)$, kun $i \rightarrow \infty$. Tästä jatkaen induktiivisesti saadaan jono osajonoja $(n_{k,i})_i$ siten, että $\langle v_k, x_{n_{k,i}}^* \rangle \rightarrow$

$L(v_k)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, kun $i \rightarrow \infty$. Otetaan näistä jonoista diagonaalijono määrittelemällä $n_i := n_{i,i}$. Tällöin $\langle v_k, x_{n_i}^* \rangle \rightarrow L(v_k)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, kun $i \rightarrow \infty$.

Kaikilla $\lambda_k \in \mathbb{K}$, $k \in \{1, \dots, N\}$ on määritelmä

$$L\left(\sum_{k=1}^N \lambda_k v_k\right) := \sum_{k=1}^N \lambda_k L(v_k)$$

kuvausten x_n^* lineaarisuuden perusteella hyvin määritelty. Siten $L: \text{span}\{v_i : i \in \mathbb{N}\} \rightarrow \mathbb{K}$ on lineaarinen ja $\|L\| \leq M$. Tällöin Lauseen 1.9 nojalla L laajenee yksikäsitteiseksi $x^* \in X^*$, (jolle $\|x^*\| \leq M$).

Kaikille $x \in X$ on olemassa osajono siten, että $v_{k_m} \rightarrow x$. Siten

$$\begin{aligned} |\langle x, x^* \rangle - \langle x, x_{n_i}^* \rangle| &\leq |\langle x, x^* \rangle - \langle v_{k_m}, x^* \rangle| + |\langle v_{k_m}, x^* \rangle - \langle v_{k_m}, x_{n_i}^* \rangle| + |\langle v_{k_m}, x_{n_i}^* \rangle - \langle x, x_{n_i}^* \rangle| \\ &\leq \|x - v_{k_m}\| \|x^*\| + |\langle v_{k_m}, x^* \rangle - \langle v_{k_m}, x_{n_i}^* \rangle| + \|v_{k_m} - x\| \|x_{n_i}^*\| \\ &\leq 2M \|x - v_{k_m}\| + |\langle v_{k_m}, x^* \rangle - \langle v_{k_m}, x_{n_i}^* \rangle| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $i \rightarrow \infty$ ja $m \rightarrow \infty$. Niinpä $x_{n_i}^* \xrightarrow{*} x^*$. □

Heikko*-kompaktius on hyödyllinen variaatio-ongelmien ja erilaisten minimoijien olemassaolon todistamisessa. Hilbert-avaruuksien kurssin alussa huomasimme kuinka funktioavaruuden normi voi olla suoraan ongelman antama ja siten löydettävänä on normin minimoija jostain funktioluokasta. Minimoija voidaan mahdollisesti löytää ottamalla jono funktioita joiden normi suppenee kohti ongelman minimiä (infimumia), ottamalla tästä jonosta suppeneva osajono (tähän tarvitaan kompaktiutta) ja osoittamalla että rajafunktio minimoi normia (tähän tarvitaan normin jatkuvuutta tai vähintäänkin alhaalta puolijatkuvuutta). Tätä lähestymistapaa sanotaan *variaatiolaskennan suoraksi menetelmäksi*.

Määritelmä 5.18. Olkoon (X, τ) topologinen avaruus. Tällöin $F: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ on *alhaalta puolijatkuva* mikäli $\{x \in X : F(x) \leq \lambda\}$ on suljettu kaikille $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esimerkiksi normikuvaus $x \mapsto \|x\|$ on alhaalta puolijatkuva heikossa topologiassa. Tämä saadaan esimerkiksi erikoistapauksena seuraavasta vahvemmasta tuloksesta

Lemma 5.19. *Olkoon X Banach-avaruus ja $F: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ alhaalta puolijatkuva vahvassa topologiassa. Jos F on lisäksi konvekksi, on F alhaalta puolijatkuva myös heikossa topologiassa.*

Todistus. Koska F on alhaalta puolijatkuva vahvassa topologiassa, on $\{x \in X : F(x) \leq \lambda\}$ vahvasti suljettu. Koska F on konvekksi, on $\{x \in X : F(x) \leq \lambda\}$ konvekssi joukko. Siten Lemman 5.13 nojalla $\{x \in X : F(x) \leq \lambda\}$ on suljettu myös heikossa topologiassa. Niinpä F on alhaalta puolijatkuva myös heikossa topologiassa. □

Variaatiolaskennan suora menetelmä voidaan nyt muotoilla seuraavasti.

Lause 5.20. *Olkoon X refleksiivinen Banach-avaruus ja $F: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ konvekksi ja alhaalta puolijatkuva. Oletetaan lisäksi, että $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} F(x) = \infty$. Tällöin funktionaalilla F on olemassa minimoija avaruudessa X eli $x_0 \in X$ siten, että $F(x_0) = \inf_{x \in X} F(x)$.*

Todistus. Jos $\inf_{x \in X} F(x) = \infty$, on väite totta. Niinpä voidaan olettaa, että $\inf_{x \in X} F(x) < \infty$. Määritellään nyt kaikille $\lambda > 0$ joukko $A_\lambda = \{x \in X : F(x) \leq \lambda\}$. Tällöin A_λ on Lemman 5.19 nojalla suljettu heikossa topologiassa. Oletuksesta $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} F(x) = \infty$ seuraa, että A_λ on

rajoitettu. Koska X on refleksiivinen, on A_λ Banach-Alaoglu'n lauseen 5.16 nojalla kompakti heikossa topologiassa. Niinpä

$$\bigcap_{\lambda > \inf_{x \in X} F(x)} A_\lambda$$

on epätyhjä ja sisältää halutun pisteen x_0 .

□