

asettamalla

$$h_1 \prec h_2 \iff N_1 \subset N_2 \text{ ja } h_1(x) = h_2(x) \text{ kaikilla } x \in N_1,$$

kun $h_1 \in \mathcal{F}_{N_1}$ ja $h_2 \in \mathcal{F}_{N_2}$. Selvästi (\mathcal{F}, \prec) on järjestety joukko.

Olkoon

$$\mathcal{G} = \{h_i \in \mathcal{F}_{N_i} : i \in I\}$$

jokin joukon \mathcal{F} ketju. Nyt

$$N = \bigcup_{i \in I} N_i$$

on avaruuden E vektorialiavaruus: Kaikilla $x, y \in N$ on olemassa $i, j \in I$ siten, että $x \in N_i$ ja $y \in N_j$. Nyt $N_i \subset N_j$ jolloin $x, y \in N_j$ ja edelleen $x + y \in N_j$ tai $N_j \subset N_i$ jolloin $x, y \in N_i$ ja edelleen $x + y \in N_i$. Siten $x + y \in N$. Määritellään nyt $k \in L(N, \mathbb{R})$ asettamalla

$$k(x) = h_i(x), \quad \text{kun } x \in N_i.$$

Samaan tapaan kuin huomattiin, että N on vektorialiavaruus nähdään, että kuvaus k on hyvin määritelty ja lineaarinen sillä \mathcal{G} on ketju. Nyt k on ketjun \mathcal{G} pienin yläraja.

Niinpä Zornin lemman nojalla on olemassa maksimaalinen alkio $g \in \mathcal{F}$, $g: W \rightarrow \mathbb{R}$. Maksimaalisuudesta seuraa, että $W = E$, sillä jos olisi $W \neq E$, niin olisi olemassa $z \in E \setminus W$ ja Lemman 4.4 nojalla $g_1: W_1 = W \oplus \text{span}(z) \rightarrow \mathbb{R}$ siten, että $g(x) = g_1(x)$ kaikilla $x \in W$ ja $|g_1(x)| \leq p(x)$ kaikilla $x \in W_1$. Näin ollen g ei olisikaan joukon \mathcal{F} maksimaalinen alkio. \square

Osoitetaan seuraavaksi kompleksinen versio Hahn-Banachin lauseesta. Huomataan ensin, että kompleksikertoimisen vektoriavaruuden E kuvaus $f \in E^\dagger$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x),$$

missä $f_1, f_2: E \rightarrow \mathbb{R}$ ovat kuvauksen reaali- ja imaginaariosat. Lineaarisuuden perusteella

$$f_1(ix) + if_2(ix) = f(ix) = i(f_1(x) + if_2(x)) = if_1(x) - f_2(x),$$

eli

$$f_1(ix) = -f_2(x).$$

Siten

$$f(x) = f_1(x) - if_1(ix), \quad x \in E.$$

Kääntäen, jokainen tätä muotoa $f(x) = f_1(x) + if_1(ix)$ oleva kuvaus, missä f_1 on \mathbb{R} -lineaarinen, on \mathbb{C} -lineaarinen

Lause 4.5 (Bohnenblust-Sobczyk-Suhomlinov). *Olkoon E vektoriavaruus, jonka kerroinkunta on $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Olkoon $M \subset E$ vektorialiavaruus, p seminormi E :ssä ja $f: M \rightarrow \mathbb{K}$ lineaarinen siten, että $|f(u)| \leq p(u)$ kaikilla $u \in M$. Tällöin on olemassa sellainen lineaarinen $g: E \rightarrow \mathbb{K}$, että $g(u) = f(u)$, kun $u \in M$ ja $|g(x)| \leq p(x)$ kaikilla $x \in E$.*

Todistus. Tapaus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on sama kuin Lause 4.1. Oletetaan siis, että $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Tämä tapaus palautetaan Lauseeseen 4.1 seuraavasti. Edellä huomattiin, että kuvaus f voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(u) = f_1(u) - if_1(iu),$$

kun $u \in M$, missä f_1 on \mathbb{R} -lineaarinen. Nyt

$$|f_1(x)| = \frac{1}{2}|f(x) + \overline{f(x)}| \leq \frac{1}{2}(|f(x)| + |\overline{f(x)}|) = |f(x)| \leq p(x)$$

kaikilla $x \in M$. Hahn-Banachin lauseen 4.1 nojalla on siis olemassa sellainen \mathbb{R} -lineaarinen funktionaali $g_1: E \rightarrow \mathbb{R}$ siten, että $g_1(u) = f_1(u)$, kun $u \in M$, ja $|g_1(x)| \leq p(x)$ kaikilla $x \in E$.

Asetetaan nyt

$$g(x) = g_1(x) - ig_1(x), \quad x \in E.$$

Tällöin g on \mathbb{C} -lineaarinen funktionaali ja kaikilla $u \in M$ on

$$g(u) = g_1(u) - ig_1(u) = f_1(u) - if_1(u) = f(u).$$

Vielä tulee osoittaa, että $|g(x)| \leq p(x)$ kaikilla $x \in E$. Olkoon siis $x \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{C}$ siten, että $|\lambda| = 1$ ja

$$|g(x)| = \lambda g(x).$$

Koska g on \mathbb{C} -lineaarinen on

$$g(\lambda x) = \lambda g(x) = |g(x)| = |g_1(\lambda x)|$$

ja edelleen

$$|g(x)| = |g_1(\lambda x)| \leq p(x) = |\lambda|p(x) = p(x).$$

Siten g täyttää vaaditut ehdot. □

Edellistä lausetta sanotaan myös usein Hahn-Banachin lauseeksi.

Otetaan seuraavaksi Hahn-Banachin Lauseen 4.1 seuraus jota myös kutsutaan usein Hahn-Banachin lauseeksi.

Lause 4.6. *Olkoon E normiavaruus, $M \subset E$ vektorialiavaruus ja $u^* \in M^*$. Tällöin on olemassa $x^* \in E^*$ siten, että $\langle u, x^* \rangle = \langle u, u^* \rangle$ kun $u \in M$, ja $\|x^*\| = \|u^*\|$.*

Todistus. Määritellään seminormi p avaruuteen E asettamalla

$$p(x) = \|x\| \|u^*\|,$$

kun $x \in E$. Tällöin

$$|\langle u, u^* \rangle| \leq \|u\| \|u^*\| = p(u),$$

kun $u \in M$. Lauseen 4.1 nojalla on siis olemassa sellainen $x^* \in E^\dagger$, että $\langle u, x^* \rangle = \langle u, u^* \rangle$, kun $u \in M$ ja

$$|\langle x, x^* \rangle| \leq p(x) = \|x\| \|u^*\|$$

kaikilla $x \in E$. Erityisesti, x^* on jatkuva, eli $x^* \in E^*$, ja $\|x^*\| \leq \|u^*\|$. Koska epäyhtälö $\|u^*\| \leq \|x^*\|$ pätee myös, on väite osoitettu. □

Jatketaan edelleen Hahn-Banachin seurauksilla.

Lause 4.7. *Olkoon E normiavaruus, $M \subset E$ vektorialiavaruus ja $x_0 \in E$ siten, että*

$$d = \text{dist}(x_0, M) > 0.$$

Tällöin on olemassa sellainen $x^ \in E^*$, että $x^*(M) = \{0\}$, $\langle x_0, x^* \rangle = d$ ja $\|x^*\| = 1$.*

Todistus. Merkitään $W = M \oplus \text{span}(x_0)$. Jos $z \in W$, niin $z = u + \lambda x_0$, missä $u \in M$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ ovat yksikäsitteiset. Asetetaan $\langle z, z^* \rangle = \lambda d$. Tällöin z^* on lineaarinen muoto $W \rightarrow \mathbb{K}$, eli $z^* \in W^\dagger$. Jos $u = \bar{0}$ ja $\lambda = 1$, niin saadaan $\langle x_0, z^* \rangle = d$. Jos taas $\lambda = 0$, niin $\langle z, z^* \rangle = 0$ kaikilla $z \in M$.

Väitämme, että $z^* \in W^*$. Olkoon $z = u + \lambda x_0 \in W$ mielivaltainen. Voidaan olettaa, että $\lambda \neq 0$. Tällöin

$$|\langle z, z^* \rangle| = |\lambda|d \leq |\lambda| \left\| \frac{u}{\lambda} + x_0 \right\| = \|u + \lambda x_0\| = \|z\|,$$

missä $d \leq \|\lambda^{-1}u + x_0\|$ koska vektori $-\lambda^{-1}u \in M$. Päättelemme, että $z^* \in W^*$ ja $\|z^*\| \leq 1$.

Tarkistetaan seuraavaksi, että itse asiassa $\|z^*\| = 1$. Tätä varten olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Koska $d = \inf\{\|x_0 - u\| : u \in M\}$, niin löytyy sellainen $u \in M$, että $\|x_0 - u\| < d + \epsilon$. Määritelmän mukaan

$$|\langle x_0 - u, z^* \rangle| = |\langle x_0, z^* \rangle| = d,$$

joten vektorille $\frac{x_0 - u}{\|x_0 - u\|} \in W$ pätee

$$\|z^*\| = \sup\{|\langle u, z^* \rangle| : u \in W, \|u\| \leq 1\} \geq \frac{|\langle x_0 - u, z^* \rangle|}{\|x_0 - u\|} = \frac{d}{\|x_0 - u\|} > \frac{d}{d + \epsilon}.$$

Tästä päättelemme, että $\|z^*\| \geq 1$.

Voimme soveltaa Lausetta 4.6, joka takaa sellaisen jatkuvan lineaarifunktionaalin $x^* \in E^*$ olemassaolon, jolle $\langle x, x^* \rangle = \langle x, z^* \rangle$, kun $x \in W$, ja $\|x^*\| = \|z^*\|$. Tällöin siis $x^*(M) = \{0\}$, $\langle x_0, x^* \rangle = \langle x_0, z^* \rangle = d$ ja $\|x^*\| = 1$. \square

Seuraus 4.8. Jos E on normiavaruus ja $\bar{0} \neq x_0 \in E$, niin on olemassa $x^* \in E^*$ siten, että $\langle x_0, x^* \rangle = \|x_0\|$ ja $\|x^*\| = 1$. Erityisesti, jos $x, y \in E$ ja $x \neq y$, niin on olemassa $x^* \in E^*$ jolle $\langle x, x^* \rangle \neq \langle y, x^* \rangle$.

Todistus. Jos $M = \{\bar{0}\}$, niin $\text{dist}(x_0, M) = \|x_0\|$. Ensimmäinen väite seuraa siten välittömästi Lauseesta 4.7. Jos $x \neq y$, niin erityisesti on olemassa sellainen $x^* \in E^*$, että

$$\langle x, x^* \rangle - \langle y, x^* \rangle = \langle x - y, x^* \rangle = \|x - y\| > 0.$$

\square

Seuraus 4.9. Jos E on normiavaruus ja $x \in E$, niin

$$\|x\| = \max\{|\langle x, x^* \rangle| : x^* \in E^*, \|x^*\| \leq 1\}$$

Erityisesti, jos $x \in E$ on sellainen, että $\langle x, x^* \rangle = 0$ kaikilla $x^* \in E^*$, $x = \bar{0}$.

Todistus. Jos $\|x^*\| \leq 1$, niin

$$|\langle x, x^* \rangle| \leq \|x\| \|x^*\| \leq \|x\|.$$

Toisaalta kun $x \neq \bar{0}$, on Seurauksen 4.8 nojalla olemassa sellainen $x^* \in E^*$, että

$$|\langle x, x^* \rangle| = \|x\| \quad \text{ja} \quad \|x^*\| = 1,$$

joten väitteen maksimi saavutetaan tällä x^* . \square

Seuraus 4.10. Olkoon M normiavaruuden E vektorialiavaruus. Tällöin M on tiheä avaruudessa E , eli $\bar{M} = E$, jos ja vain jos avaruudelle M pätee: Jos $x^* \in E^*$ ja $x^*(M) = \{0\}$, niin $x^* = \bar{0}$.

Todistus. Oletetaan ensin, että $\bar{M} = E$. Jos tällöin $x^*(M) = \{0\}$, niin $M \subset \text{Ker}(x^*)$. Koska $\text{Ker}(x^*)$ on suljettu E :ssä, on $E = \bar{M} \subset \text{Ker}(x^*)$. Niinpä $E = \text{Ker}(x^*)$, eli $x^* = \bar{0}$.

Oletetaan kääntäen, että $\bar{M} \neq E$. Tällöin löytyy sellainen vektori $x_0 \in E$, että $\text{dist}(x_0, M) = \text{dist}(x_0, \bar{M}) > 0$. Lauseen 4.7 nojalla on olemassa sellainen $x^* \in E^*$, että $x^*(M) = \{0\}$ ja $\|x^*\| = 1$. Erityisesti $x^* \neq \bar{0}$. \square

5. HEIKKO TOPOLOGIA

Palataan takaisin heikkoon suppenemiseen ja otetaan tällä kertaa näkökulmaksi sen antama topologia. Palautetaan ensin mieleen mitä topologia onkaan.

Määritelmä 5.1. Olkoon $X \neq \emptyset$ joukko ja τ kokoelma joukon X osajoukkoja. Tällöin τ on *topologia*, jos

- (1) $\emptyset \in \tau$ ja $X \in \tau$,
- (2) Jos $U_1, \dots, U_n \in \tau$, $n \in \mathbb{N}$, niin $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$,
- (3) Jos $U_\alpha \in \tau$ kaikilla $\alpha \in A$, niin $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$.

Topologinen avaruus (X, τ) on *metristyvä*, jos on olemassa etäisyys d joukossa X siten, että $\tau = \{U : U \text{ avoin metrisessä avaruudessa } (X, d)\}$.

5.1. Kuvausten indusoima karkea topologia. Jokaisella joukolla X on kokoluokassaan äärimmäiset topologiat, eli triviaali topologia $\{\emptyset, X\}$ ja täysi topologia 2^X . Harvoin kumpikaan näistä on erityisen hyödyllinen. Jos meille on annettu joukko kuvauksia $f_i: X \rightarrow Y_i$, $i \in I$ missä (Y_i, τ_i) ovat topologisia avaruuksia, voidaan määritellä *karkein topologia* τ jolla kaikki kuvaukset $f_i: (X, \tau) \rightarrow (Y_i, \tau_i)$ ovat jatkuvia. Tämä saadaan ottamalla topologian esikannaksi joukot kaikki joukot $f_i^{-1}(U_i)$, missä $i \in I$ ja $U_i \in \tau_i$, eli toisin sanoen asettamalla

$$\tau = \left\{ \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A : \mathcal{A} \subset \left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i) : J \subset I \text{ äärellinen, } U_i \in \tau_i \right\} \right\}.$$

Sanotaan, että τ on kuvasten f_i antama/indusoima karkein topologia.

Lemma 5.2. *Olkoon $X, \tau, (Y_i, \tau_i), f_i$ kuten yllä. Tällöin τ on X :n topologia. Sille pätee*

- (1) *kuvaus $f_i: (X, \tau) \rightarrow (Y_i, \tau_i)$ on jatkuva kaikilla $i \in I$*
- (2) *Jos $\tilde{\tau}$ on X :n topologia siten, että $f_i: (X, \tilde{\tau}) \rightarrow (Y_i, \tau_i)$ on jatkuva kaikilla $i \in I$, niin $\tau \subset \tilde{\tau}$.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että τ on topologia. Koska $\emptyset = f_i^{-1}(\emptyset)$ ja $X = f_i^{-1}(Y_i)$, niin $\emptyset, X \in \tau$.

Jos $U_1, \dots, U_n \in \tau$, on olemassa

$$\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \in \mathcal{U} := \left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i) : J \subset I \text{ äärellinen, } U_i \in \tau_i \right\}$$

siten, että $U_i = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_i} A$. Tällöin

$$\bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcap_{i=1}^n \bigcup_{A \in \mathcal{A}_i} A = \bigcup_{A_1 \in \mathcal{A}_1} \dots \bigcup_{A_n \in \mathcal{A}_n} \bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau,$$

sillä $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{U}$.

Jos $U_\alpha \in \tau$ kaikilla $\alpha \in A$, on olemassa \mathcal{A}_α siten, että $U_\alpha = \bigcup_{E \in \mathcal{A}_\alpha} E$. Tällöin

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} \bigcup_{E \in \mathcal{A}_\alpha} E = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E \in \tau,$$

missä $\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{A}_\alpha$. Niinpä τ on topologia.

Väite (1) seuraa suoraan τ :n määritelmästä: Kaikille $U \in \tau_i$ on $f_i^{-1}(U) \in \tau$.

Olkoon $\tilde{\tau}$ kuten (2):ssa. Tällöin $f_i^{-1}(U) \in \tilde{\tau}$ kaikilla $U \in \tau_i$ ja $i \in I$. Topologian ehdon (2) nojalla saadaan $\mathcal{U} \subset \tilde{\tau}$, josta edelleen topologian ehdon (3) nojalla $\tau \subset \tilde{\tau}$. \square

Lemma 5.3. *Olkoon $X, \tau, (Y_i, \tau_i), f_i$ kuten yllä. Tällöin jono $(x_n)_n \subset X$ suppenee pisteeseen $x \in X$ topologiassa τ jos ja vain jos $f_i(x_n) \rightarrow f_i(x)$ kaikilla $i \in I$.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $(x_n)_n$ suppenee topologiassa τ . Olkoon $i \in I$. Jos $U \in \tau_i$ siten, että $f_i(x) \in U$, niin $x \in f_i^{-1}(U) \in \tau$. Siispä on olemassa $m \in \mathbb{N}$ siten, että $x_n \in f_i^{-1}(U)$ kaikilla $n \geq m$. Tällöin $f_i(x_n) \in U$ kaikilla $n \geq m$. Näin ollen $f_i(x_n) \rightarrow f_i(x)$ kaikilla $i \in I$.

Oletetaan sitten kääntäen, että $f_i(x_n) \rightarrow f_i(x)$ kaikilla $i \in I$. Olkoon $U \in \tau$ siten, että $x \in U$. Tällöin $U \supset \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i) \ni x$ joillain $U_i \in \tau_i$ ja äärellisellä $J \subset I$. Siten kaikilla $i \in J$ on $x \in f_i^{-1}(U_i)$ ja siis $f_i(x) \in U_i$. Koska $f_i(x_n) \rightarrow f_i(x)$, on olemassa $m_i \in \mathbb{N}$ siten, että $f_i(x_n) \in U_i$ kaikilla $n \geq m_i$. Valitsemalla $m = \max_{i \in J} m_i$, saadaan $x_n \in f^{-1}(U_i)$ kaikilla $n \geq m$ eli $x_n \in \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i) \subset U$ kaikilla $n \geq m$. Saatiin siis, että $(x_n)_n$ suppenee topologiassa τ . \square

5.2. Heikko topologia. Merkitään Banach-avaruuden X vahvaa topologiaa eli normin antaman etäisyyden indusoimaa topologiaa τ_X ,

Määritelmä 5.4. Banach-avaruuden X heikko topologia $\sigma(X, X^*)$ on kuvausten $\{x^* \in X^*\}$ antama karkein topologia. Jonon $(x_n)_n \subset X$ suppenemista pisteeseen $x \in X$ heikossa topologiassa $\sigma(X, X^*)$ merkitään $x_n \rightharpoonup x$.

Banach-avaruuden X heikko topologia on siis karkein topologia, jonka suhteen kaikki (X :n normin suhteen) jatkuvat lineaarikuvaukset $x^*: X \rightarrow \mathbb{K}$ ovat jatkuvia. Erityisesti siis, $\sigma(X, X^*) \subset \tau_X$.

Lemma 5.5. *Banach-avaruuden X heikko topologia $\sigma(X, X^*)$ on Hausdorff.*

Todistus. Olkoon $x, y \in X, x \neq y$. Tällöin Hahn-Banachin lauseen Seurauksen 4.8 nojalla on olemassa $x^* \in X^*$ siten, että $\langle x - y, x^* \rangle = \|x - y\|$. Valitaan $\lambda = \|x - y\|/2$. Tällöin

$$x \in U := \{z \in X : |\langle x - z, x^* \rangle| < \lambda\}$$

ja

$$y \in V := \{z \in X : |\langle x - z, x^* \rangle| > \lambda\},$$

missä $U, V \in \sigma(X, X^*)$ siten, että $U \cap V = \emptyset$. Niinpä $\sigma(X, X^*)$ on Hausdorff. \square

Lemma 5.6. *Banach-avaruuden X heikolla topologialla $\sigma(X, X^*)$ on kanta*

$$\{U_{F, \varepsilon, x} : F \subset X^* \text{ äärellinen, } \varepsilon > 0, x \in X\},$$

missä

$$U_{F, \varepsilon, x} = \bigcap_{x^* \in F} \{y \in X : |\langle y - x, x^* \rangle| < \varepsilon\}.$$

Todistus. Olkoon $U \in \sigma(X, X^*)$. Voidaan olettaa, että $U \neq \emptyset$. Otetaan $x \in U$. Tällöin on heikon topologian määritelmän nojalla olemassa äärellinen joukko $\{x_1^*, \dots, x_n^*\} \subset X^*$ ja avoimet $U_1, \dots, U_n \subset \mathbb{K}$ siten, että

$$x \in \bigcap_{i=1}^n (x_i^*)^{-1}(U_i) \subset U.$$

Jokaisella i pätee siis $\langle x, x_i^* \rangle \in U_i$. Koska U_i on avoin, on olemassa $\varepsilon_i > 0$ siten, että

$$|\langle y - x, x_i^* \rangle| = |\langle y, x_i^* \rangle - \langle x, x_i^* \rangle| < \varepsilon_i$$

Siispä valitsemalla $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$ ja $F = \{x_i^* : i \in \{1, \dots, n\}\}$ saadaan

$$x \in U_{F, \varepsilon, x} \subset \bigcap_{i=1}^n (x_i^*)^{-1}(U_i) \subset U. \quad \square$$