

Harjoitus 5**deadline: 27.4.2026, klo 12:00**

Ex 5.1: Olkoon (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja $f: X \rightarrow Y$ jatkuva. Onko tällöin funktion f kuvaaja suljettu, kun etäisyytenä avaruudessa $X \times Y$ on

$$d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)?$$

Ex 5.2: Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funktio jonka graafi on suljettu. Onko tällöin f jatkuva?

Ex 5.3: Olkoon E Banach-avaruus ja $M, N \subset E$ vektorialiavaruuksia siten, että $E = M \oplus N$ (eli $E = M + N$ ja $M \cap N = \{\bar{0}\}$). Osoita, että tällöin lineaarinen projektio

$$P: E \rightarrow E: x \mapsto m, \quad \text{missä } m \in M \text{ ja } x - m \in N,$$

on jatkuva jos ja vain jos M ja N ovat suljettuja avaruudessa E .

Ex 5.4: Olkoon E Banach-avaruus ja $M, N \subset E$ suljettuja vektorialiavaruuksia siten, että $M \cap N = \{\bar{0}\}$. Osoita, että $M + N$ on suljettu avaruudessa E jos ja vain jos on olemassa vakio $C < \infty$ siten, että

$$\|x\| \leq C\|x + y\| \quad \text{kaikilla } x \in M \text{ ja } y \in N.$$

Ex 5.5: Olkoon E Banach-avaruus ja $M, N \subset E$ suljettuja vektorialiavaruuksia siten, että $M \cap N = \{\bar{0}\}$. Osoita, että $M + N$ on suljettu avaruudessa E jos ja vain jos

$$\inf\{\|x - y\| : x \in M, y \in N, \|x\| = \|y\| = 1\} > 0.$$

Ex 5.6: Olkoon E normiavaruus, F Banach-avaruus ja $T: E \rightarrow F$ lineaarinen surjektio jonka kuvaaja on suljettu. Onko tällöin T jatkuva?